УДК 532.591+517.948

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РУССО — СМЕРЕКИ

А. А. Чесноков

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Получены новые классы инвариантных решений интегродифференциальных уравнений, описывающих распространение нелинейных волн концентрации в разреженной пузырьковой жидкости. Для всех найденных решений вычислены траектории движения частиц в фазовом пространстве. Проведено исследование устойчивости некоторых течений по линейному приближению. В ряде случаев построение решения сведено к интегральному уравнению второго рода, которое может быть решено методом итераций.

Для моделирования волн концентрации в течении пузырьковой жидкости часто используют кинетические подходы, основанные на статистическом описании взаимодействия большого числа пузырьков. Один из недавних результатов в этой области — вывод кинетической модели для разреженного пузырькового течения, данный Д. Руссо и П. Смерекой.

Работа посвящена построению точных частных решений одномерного уравнения Руссо — Смереки методами классического группового анализа. В ней с использованием группы допускаемых точечных преобразований выписаны более простые подмодели, определяющие семейства точных решений, некоторые из них проинтегрированы. Полученным решениям дана физическая интерпретация.

1. Математическая модель и допускаемые преобразования. Кинетические уравнения движения пузырьков в жидкости выведены и использовались в [1–3], а также в ряде других работ. В [4] Д. Руссо и П. Смерекой предложена интегродифференциальная модель, описывающая распространение волн концентрации в разреженной пузырьковой жидкости. В этой модели пузырьки являются твердыми невесомыми сферами одинакового радиуса, жидкость идеальная и несжимаемая, покоящаяся на бесконечности, а ее течение в области между пузырьками считается потенциальным. Одномерное уравнение Руссо — Смереки в безразмерных переменных [5] имеет вид

$$f_t + (p - j)f_x + pj_x f_p = 0, \qquad j(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} pf\,dp. \tag{1.1}$$

Здесь t — время; x — пространственная переменная; p — импульс пузырька; $f(t, x, p)$ — искомая функция распределения пузырьков в фазовом пространстве; $j(t, x)$ — первый момент функции распределения.

Модель пригодна для описания реальных течений разреженной пузырьковой жидкости в случае малых перепадов давления. Условие разреженности пузырькового течения выражается неравенством

$$n(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, p)\,dp < 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00660) и программы “Ведущие научные школы” (код проекта 96-15-96283).

Будем искать решения уравнения (1.1), для которых это условие выполнено. В [5] исследованы характеристические свойства (1.1) и бегущие волны, построена бесконечная серия законов сохранения.

Заметим, что уравнение (1.1) инвариантно относительно следующей группы преобразований G_4: 1) $t' = t + a$; 2) $x' = x + a$; 3) $t' = at$, $x' = ax$; 4) $x' = ax$, $p' = ap$, $f' = a^{-1}f$. Этим преобразованиям соответствует алгебра Ли операторов L_4: $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = t\partial_t + x\partial_x$, $X_4 = x\partial_x + p\partial_p - f\partial_f$. Развитый в [6] метод позволяет строить инвариантные решения уравнения (1.1) по подалгебрам L_4.

Для рационального использования имеющихся преобразований при нахождении инвариантных решений выписана оптимальная система подалгебр алгебры Ли операторов L_4, построение которой проведено по алгоритму, предложенному в [7]. Перечислим всех представителей оптимальной системы ранга один: 1) $\alpha X_3 + X_4$; 2) $X_1 + X_4$; 3) $X_2 - X_3 + X_4$; 4) X_3; 5) $X_1 + X_2$; 6) X_2; 7) X_1. Система оптимальна в том смысле, что классы решений, получаемые с помощью ее представителей, исчерпывают все возможные инвариантные решения, отвечающие однопараметрическим подгруппам группы преобразований G_4 с точностью до замены переменных. Дальнейшее построение инвариантных решений сводится к нахождению инвариантов соответствующих подалгебр, получению и интегрированию фактор-систем.

2. Подмодели. Для всех представителей оптимальной системы ранга один приводится набор базисных инвариантов J, представление решения и фактор-система E/H ($H(\alpha^i X_i)$ обозначает подалгебру).

1. $H(\alpha X_3 + X_4)$, $J = (t^{-(1+\beta)}x, t^{-\beta}p, t^{\beta}f)$, $\beta = \alpha^{-1}$. Решение инвариантно относительно растяжения всех переменных, зависящего от параметра α ($\alpha \neq -1,\ 0$). Это решение описывает класс автомодельных (в узком смысле) движений среды. Представление решения

$$\xi = t^{-(1+\beta)}x, \quad \varphi = t^{-\beta}p, \quad f = t^{-\beta}\psi(\xi,\varphi), \quad j = t^{\beta}m(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$-\beta\psi + (\varphi - m - (1+\beta)\xi)\psi_\xi + (m_\xi - \beta)\varphi\psi_\varphi = 0, \quad m(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\psi\, d\varphi. \tag{2.1}$$

При $\alpha = 0$ имеем $J = (t, x^{-1}p, xf)$. Решение инвариантно относительно растяжения x, p и f. Представление решения

$$\varphi = x^{-1}p, \qquad f = x^{-1}\psi(t,\varphi), \qquad j = xm(t).$$

Фактор-система E/H

$$\psi_t - (\varphi - m)\psi + (2m - \varphi)\varphi\psi_\varphi = 0, \qquad m(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\psi\, d\varphi.$$

2. $H(X_1{+}X_4)$, $J = (x\exp(-t), p\exp(-t), f\exp(t))$. Решение инвариантно относительно одновременного переноса по t и растяжения x, p, f. Представление решения

$$\xi = x\exp(-t), \quad \varphi = p\exp(-t), \quad f = \exp(-t)\psi(\xi,\varphi), \quad j = \exp(t)m(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$-\psi + (\varphi - m - \xi)\psi_\xi + (m_\xi - 1)\varphi\psi_\varphi = 0, \qquad m(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\psi\, d\varphi.$$

3. $H(X_2 - X_3 + X_4)$, $J = (t\exp(x), tp, t^{-1}f)$. Решение инвариантно относительно одновременного переноса по направлению оси x и растяжения t, p, f. Представление решения

$$\xi = t\exp(x), \qquad \varphi = tp, \qquad f = t\psi(\xi,\varphi), \qquad j = t^{-1}m(\xi).$$

Фактор-система E/H

$$\psi + (\varphi - m + 1)\xi\psi_\xi + (1 + \xi m_\xi)\varphi\psi_\varphi = 0, \quad m(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\psi\, d\varphi. \tag{2.2}$$

4. $H(X_3)$, $J = (t^{-1}x, p, f)$. Решение инвариантно относительно равномерного растяжения переменных t, x и описывает класс автомодельных движений среды. Представление решения $\xi = t^{-1}x$, $f = f(\xi, p)$. Фактор-система E/H

$$(p - j - \xi)f_\xi + pj_\xi f_p = 0, \qquad j(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} pf\, dp. \tag{2.3}$$

5. $H(X_1 + X_2)$, $J = (x - t, p, f)$. Решение инвариантно относительно одновременного переноса по t, x и описывает бегущие волны. Представление решения $\xi = x - t$, $f = f(\xi, p)$. Фактор-система E/H

$$(p - j - 1)f_\xi + pj_\xi f_p = 0, \qquad j(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} pf\, dp. \tag{2.4}$$

6. $H(X_2)$, $J = (t, p, f)$. Решение инвариантно относительно переноса по оси x. Представление решения $f = f(t, p)$, $j = j(t)$. Фактор-система E/H

$$f_t = 0. \tag{2.5}$$

7. $H(X_1)$, $J = (x, \lambda, p, f)$. Решение инвариантно относительно переноса по времени. Представление решения $f = f(x, p)$. Фактор-система E/H

$$(p - j)f_x + pj_x f_p = 0, \qquad j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} pf\, dp. \tag{2.6}$$

3. Инвариантные решения. Ниже приводятся результаты интегрирования фактор-систем и анализируются найденные решения.

Траектории движения пузырьков в фазовом пространстве находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = p - j, \qquad \frac{dp}{dt} = pj_x. \tag{3.1}$$

Исследование устойчивости течений по линейному приближению будем проводить на основе характеристического уравнения

$$\chi(k) = 1 - n + (j + k)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_p}{p - j - k}\, dp = 0 \tag{3.2}$$

и условий гиперболичности

$$\Delta \arg \chi^{\pm}(p) = 0, \qquad \chi^{\pm}(p) \neq 0,$$

$$\chi^{\pm}(p) = 1 - n(t,x) + p^2\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t,x,p')}{\partial p'}\,\frac{1}{p'-p}\,dp' \pm \pi i\,\frac{\partial f(t,x,p)}{\partial p}\Big)$$

(приращение аргумента вычисляется при изменении p от $-\infty$ до ∞ при фиксированных t, x), полученных в [5] на основе подхода, предложенного в [8]. Условия гиперболичности гарантируют отсутствие комплексных характеристических корней уравнения (3.2) и являются необходимыми для устойчивости течения.

Заметим, что (1.1) на частном классе решений, для которых $n = 1$, сводится к уравнениям, описывающим плоскопараллельные вихревые течения идеальной однородной жидкости в удлиненном канале. Анализ характеристических свойств этой системы проведен в [9], где также приведены некоторые точные решения.

Подмодель (2.5). В результате интегрирования фактор-системы (2.5) находим класс стационарных однородных по пространству решений $f = f(p)$.

Подмодели (2.4), (2.6). Интегрирование фактор-систем (2.4) и (2.6) дает равенства

$$f = \Phi(p^2 - 2(j+a)p), \qquad j(x-at) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p\Phi\,dp$$

($a = 1; 0$ соответственно). Эти значения параметра a исчерпывают класс инвариантных решений вида $f = f(x-Dt,p)$, $D = \mathrm{const}$ (бегущие волны) с точностью до замены переменных. Такие решения рассмотрены в [5], где приведены формулы, определяющие бегущую волну, распространяющуюся с постоянной скоростью D по стационарному однородному по пространству фону.

Свободное движение пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости. Подмодель (2.2). Рассмотрим случай $m = 1$. Тогда характеристическая система уравнения (2.2) имеет первые интегралы $\varphi - \ln\xi$ и $\varphi\psi$. Поэтому решение фактор-системы можно представить в виде

$$\psi = \varphi^{-1}A(\varphi - \ln\xi), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\varphi - \ln\xi)\,d\varphi = 1$$

(A — произвольная функция). Построим решение в некоторой области $-\infty < \varphi < \infty$, $\exp(b) < \xi < \infty$ ($b = \mathrm{const}$). Для этого в качестве A возьмем любую неотрицательную дифференцируемую функцию, определенную на интервале $[-b,\infty)$, которая вместе с производной обращается в нуль в точке $-b$ и на бесконечности, и $\int\limits_{-b}^{\infty} A(\lambda)\,d\lambda = 1$. Вне интервала $[-b,\infty)$ продолжим функцию $A(\lambda)$ нулем. В результате в области $b < \ln t + x < \infty$ получим решение уравнения (1.1)

$$\begin{gathered} f(t,x,p) = p^{-1}A(tp - x - \ln t), \quad 0 < q < p < \infty, \qquad f(t,x,p) = 0, \quad -\infty < p \leqslant q, \\ \int\limits_{q}^{\infty} A(tp - x - \ln t)\,dp = t^{-1} \qquad (q = (-b + \ln t + x)t^{-1}). \end{gathered} \tag{3.3}$$

На решениях класса (3.3) $j = t^{-1}$, а функция $n(t,x)$ достигает максимального значения на линии $b = \ln t + x$ и монотонно убывает с ростом t и x.

В кинетической модели Руссо — Смереки сила, действующая на систему пузырьков, пропорциональна градиенту первого момента функции распределения. В данном случае $j_x = 0$ во все моменты времени, поэтому решения (3.3) описывают свободное движение

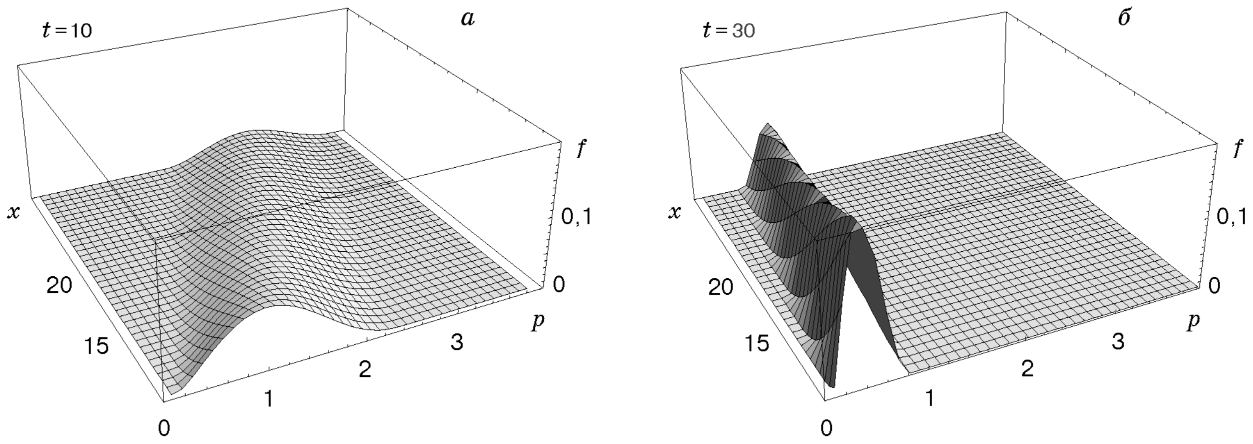

Рис. 1

пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости. Отметим, что отсутствие сил связано со специальным самосогласованным распределением пузырьков в пространстве. Из уравнений (3.1) находим, что траектории движения частиц задаются формулами

$$x = tp_0 - \ln t - x_0, \qquad p = p_0 \tag{3.4}$$

(x_0, p_0 — постоянные).

Приведем пример решения класса (3.3). Пусть

$$A(\lambda) = \frac{2\alpha}{\pi}\cos^2(\alpha\lambda), \qquad \lambda \in \Big[-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\Big],$$

в противном случае $A(\lambda) = 0$ (α — положительная постоянная). Тогда в области $\pi/(2\alpha) < \ln\, t + x < \infty$ получаем решение с финитной функцией распределения

$$f(t, x, p) = \frac{2\alpha}{\pi p}\cos^2(\alpha(tp - \ln\, t - x)), \tag{3.5}$$

если $-\pi/(2\alpha) + \ln t + x \leqslant tp \leqslant \pi/(2\alpha) + \ln t + x$; иначе $f \equiv 0$. Пусть для определенности $\alpha = 0{,}14$.

На рис. 1 показаны распределения пузырьков в пространстве в фиксированные моменты времени. Из формул (3.5) и рис. 1 следует, что со временем в ограниченном интервале изменения x носитель функции распределения сужается по переменной p. При больших значениях t функция $f \neq 0$ только на малом интервале $p \in (0, \varepsilon)$ ($\varepsilon = (\pi/(2\alpha) + \ln t + x)t^{-1}$ и стремится к нулю при $t \to \infty$), поэтому в процессе эволюции течения в области наблюдения остаются только те пузырьки, импульсы которых близки к нулю. Для объяснения этого факта рассмотрим траектории движения пузырьков (3.4). Из формул (3.4) следует, что каждый пузырек, начиная с некоторого момента времени, движется в сторону увеличения значений x, так как $p = p_0 > 0$ (в области $p < 0$ функция $f \equiv 0$) и $x \sim p_0 t$, но при этом скорость движения пузырьков различная. Пузырьки с большими импульсами движутся быстрее (и быстрее покидают область наблюдения), чем пузырьки с незначительными импульсами. Таким образом, построенное решение описывает процесс свободного "разлета" пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости. Отметим, что в данном случае аналог гидродинамической плотности $n(t, x) < 1$ и убывает со временем (проверяется непосредственными вычислениями).

Проведем исследование устойчивости течения (3.5) по линейному приближению с использованием характеристического уравнения, точнее, условий гиперболичности, гарантирующих отсутствие комплексных корней уравнения (3.2) на рассматриваемом решении.

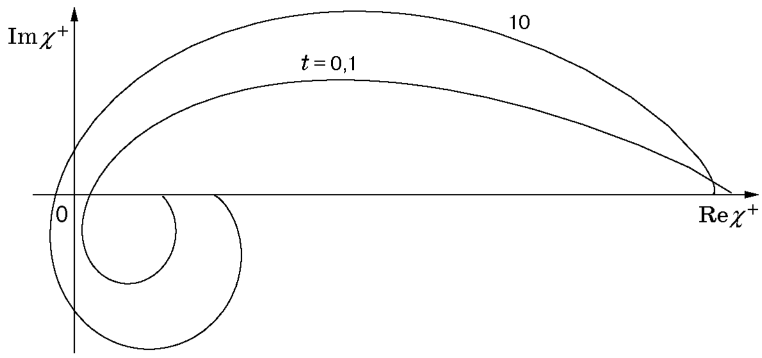

Рис. 2

На рис. 2 показаны графики функции $\chi^+(p)$ при изменении p от $-\infty$ до $+\infty$ в моменты времени $t = 0{,}1$; 10 в точке $x = \pi\alpha^{-1} \approx 22{,}439$; по оси абсцисс откладываются значения $\operatorname{Re}\chi^+$, по оси ординат — значения $\operatorname{Im}\chi^+$. Графики функций $\chi^+(p)$ и $\chi^-(p)$ симметричны относительно оси абсцисс. Из рис. 2 следует, что при $t = 0{,}1$ приращение аргумента функций $\chi^{\pm}$ равно нулю и условия гиперболичности выполнены. Следовательно, в некоторой окрестности точки $x = \pi\alpha^{-1}$ при $t \approx 0{,}1$ течение устойчиво по линейному приближению. При $t = 10$ (рис. 2) $\Delta \arg \chi^+(p) = 2\pi$, а $\Delta \arg \chi^-(p) = -2\pi$. В этом случае условия гиперболичности нарушены (имеются комплексные характеристические корни) и течение неустойчиво. Тем самым установлено, что в свободном движении пузырьков возможно возникновение неустойчивости при определенных начальных данных.

Течения разреженной пузырьковой жидкости с критическим слоем. Ниже приводятся результаты поиска автомодельных решений уравнения Руссо — Смереки.

Подмодель (2.3). Рассмотрим частный класс решений фактор-системы (2.3), для которых $m = \sigma\xi$ (σ — произвольная постоянная). Пусть $\sigma \neq -1$; 0 (в случае $\sigma = -1$ получаем решения, для которых $n = 1$, при $\sigma = 0$ решения имеют вид $f = f(p)$). В результате интегрирования (2.3) получаем

$$f = \Phi(C), \quad C = |\xi| \Big| \frac{(1-2\gamma)p}{\xi} \Big|^{1-\gamma} \Big| 1 - \frac{(1-2\gamma)p}{\xi} \Big|^{\gamma}, \quad \frac{\gamma}{1-2\gamma}\xi = \int p\Phi \, dp, \tag{3.6}$$

где $\gamma = \sigma(1+\sigma)^{-1}$. Функция распределения сохраняет постоянные значения на линиях $C = \mathrm{const}$. Пусть $\gamma = 2$ (другие случаи аналогичны, но математические выкладки сложнее). Тогда согласно (3.6) инвариант C имеет вид

$$C = |p|^{-1}(3p + \xi)^2. \tag{3.7}$$

На рис. 3 показаны характеристики (линии $C = \mathrm{const}$) в плоскости переменных (p, ξ). Рассмотрим задачу Коши

$$f(\xi_0, p) = f_0(p), \qquad \gamma(1-2\gamma)^{-1}\xi_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p f_0(p) \, dp. \tag{3.8}$$

Построим решение типа простой волны в области $-\infty < p < \infty$, $\xi_0 < \xi < \xi_1 < 0$. Условия (3.8) обеспечивают непрерывное примыкание простой волны к заданному стационарному однородному по пространству решению $f_0(p)$. Как видно на рис. 3, для $\xi > \xi_0$ решение задачи Коши однозначно определяется по начальным данным в областях Ω_1, Ω_2, Ω_4 и Ω_5, а в области Ω_3, ограниченной жирной линией $C = C_0 = -12\xi_0$ и прямой $\xi = \xi_1$, решение находится из дополнительных уравнений. Отметим, что задача Коши (3.8) некорректна

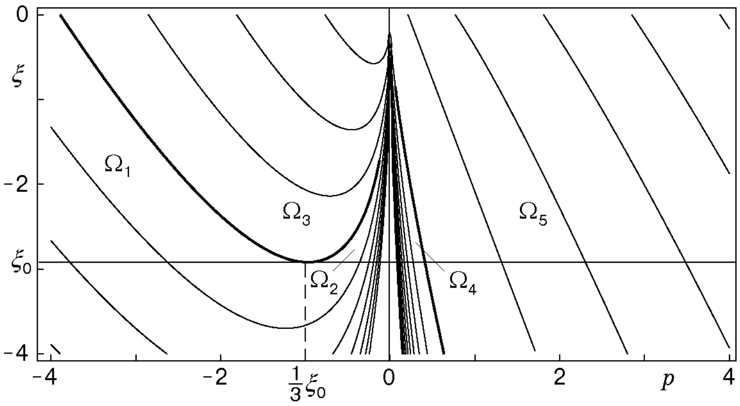

Рис. 3

для $\xi < \xi_0$, так как функция $f_0(p)$ не может быть задана произвольно (характеристики пересекают линию, на которой заданы условия Коши в двух точках).

Определим решение в областях

$$\Omega_1 = \{(p,\xi)\colon \xi_0 \le \xi < \xi_1,\ -\infty < p \leqslant (2\xi_0 - \xi - 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi})/3\},$$

$$\Omega_2 = \{(p,\xi)\colon \xi_0 \leqslant \xi < \xi_1,\ (2\xi_0 - \xi + 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi})/3 \leqslant p \leqslant 0\}.$$

Для этого вычислим функцию $\Phi(C)$ ($C \geqslant C_0$) при $\xi = \xi_0$ (обозначим ее Φ_{01} для $p \leqslant \xi_0/3$ и Φ_{02} для $p \geqslant \xi_0/3$). Из формул (3.7) и (3.8) получаем

$$\Phi_{01}(C) = f_0((-6\xi_0 - C - \sqrt{12\xi_0 C + C^2}\,)/18), \quad \Phi_{02}(C) = f_0((-6\xi_0 - C + \sqrt{12\xi_0 C + C^2}\,)/18).$$

По известным функциям Φ_{01}, Φ_{02} из (3.6) и (3.7) определяем решение в областях Ω_1, Ω_2:

$$f(p,\xi) = \Phi_1(-(3p+\xi)^2/p),\ -\infty < p \leqslant (2\xi_0 - \xi - 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi}\,)/3,$$

$$f(p,\xi) = \Phi_2(-(3p+\xi)^2/p),\ (2\xi_0 - \xi + 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi})/3 \leqslant p \leqslant 0.$$

Далее найдем решение в областях

$$\Omega_4 = \{(p,\xi)\colon \xi_0 \leqslant \xi < \xi_1,\ 0 \leqslant p \leqslant -\xi/3\}, \quad \Omega_5 = \{(p,\xi)\colon \xi_0 \leqslant \xi < \xi_1,\ -\xi/3 \leqslant p < \infty\}.$$

На линии $\xi = \xi_0$ функция $\Phi(C)$ ($0 \leqslant C < \infty$) при $0 \leqslant p \leqslant -\xi_0/3$ и $p \geqslant -\xi_0/3$ соответственно имеет вид

$$\Phi_{04}(C) = f_0((-6\xi_0 + C - \sqrt{-12\xi_0 C + C^2}\,)/18), \ \Phi_{05}(C) = f_0((-6\xi_0 + C + \sqrt{-12\xi_0 C + C^2}\,)/18).$$

Эти формулы позволяют определить простую волну в областях Ω_4 и Ω_5:

$$f(p,\xi) = \Phi_4((3p+\xi)^2/p), \quad 0 \leqslant p \leqslant -\xi/3, \quad f(p,\xi) = \Phi_5((3p+\xi)^2/p), \quad -\xi/3 \leqslant p < \infty.$$

Построим решение в области

$$\Omega_3 = \{(p,\xi)\colon \xi_0 \leqslant \xi < \xi_1,\ (2\xi_0 - \xi - 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi}\,)/3 \leqslant p \leqslant (2\xi_0 - \xi + 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi}\,)/3\}.$$

Преобразуем соотношение

$$-\frac{2\xi}{3} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p f(\xi,p)\,dp \tag{3.9}$$

в интегральное уравнение для определения функции $\Phi(C)$ на интервале ($C_1 = -12\xi_1 < C < C_0 = -12\xi_0$). Для этого в каждой из областей, где простая волна уже определена, перейдем в (3.9) от переменной интегрирования p к переменной C. Пусть $s = -12\xi$. В области Ω_1 функция f и переменная p выражаются через s и C следующим образом:

$$f = \Phi_1(C), \quad p = (s/2 - C - \sqrt{C}\sqrt{C-s}\,)/18, \quad C_0 < C < \infty.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{a_1} pf\,dp = 18^{-2}\int\limits_{C_0}^{\infty}\Big(s - 2C - \sqrt{C}\sqrt{C-s} - \frac{(2C-s)^2}{4\sqrt{C}\sqrt{C-s}}\Big)\Phi_1(C)\,dC,$$

где $a_1 = (2\xi_0 - \xi - 2\sqrt{\xi_0^2 - \xi_0\xi}\,)/3$. Аналогично преобразуются интегралы в других областях. В итоге для определения неизвестной функции Φ в области Ω_3 получаем интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{s}^{C_0} K(C,s)\Phi(C)\,dC = F(s), \tag{3.10}$$

где

$$K = \sqrt{C}\sqrt{C-s} + \frac{(2C-s)^2}{4\sqrt{C}\sqrt{C-s}};$$

$$F(s) = -9s + \frac{1}{2}\int\limits_{C_0}^{\infty}(s - 2C - K(C,s))\Phi_1(C)\,dC - \frac{1}{2}\int\limits_{C_0}^{\infty}(s - 2C + K(C,s))\Phi_2(C)\,dC -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}(s + 2C - V(C,s))\Phi_4(C)\,dC + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}(s + 2C + V(C,s))\Phi_5(C)\,dC;$$

$$V = \sqrt{C}\sqrt{C+s} + \frac{(2C+s)^2}{4\sqrt{C}\sqrt{C+s}}.$$

Покажем, что (3.10) можно свести к уравнению второго рода. Выделим сингулярность в ядре интегрального оператора (3.10):

$$K(C,s) = \frac{s\sqrt{s}}{4\sqrt{C-s}} + Q(C,s), \quad Q(C,s) = \sqrt{C}\sqrt{C-s} + \frac{(2C-s)^2 - s\sqrt{sC}}{4\sqrt{C}\sqrt{C-s}}.$$

Ядро $Q(C,s)$ не имеет особенностей в области интегрирования. С учетом этого уравнение (3.10) можно переписать в виде

$$\int\limits_{s}^{C_0} \frac{\Phi(C)}{\sqrt{C-s}}\,dC = G(s), \quad G(s) = \frac{4}{s\sqrt{s}}\Big(F(s) - \int\limits_{s}^{C_0} Q(C,s)\Phi(C)\,dC\Big). \tag{3.11}$$

Функция $G(s)$ является непрерывно дифференцируемой и обращается в нуль в точке $s = C_0$. Обращение интегрального оператора Абеля (3.11) позволяет получить интегральное уравнение второго рода для определения функции $\Phi(C)$:

$$\Phi(C) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{C}^{C_0} \frac{G'(s)}{\sqrt{s-C}}\,ds. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) разрешимо итерационным методом. Если функция $\Phi(C)$ найдена, то автомодельное решение определено.

Интегрированием (1.1) по переменной p находим, что функция $n(t,x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$n_t + ((1-n)j)_x = 0.$$

На рассматриваемом классе простых волн оно имеет вид $n' + 2(1-n)/\xi = 0$. Решая это уравнение, получаем

$$n(\xi) = 1 - (1-n_0)\Big(\frac{\xi}{\xi_0}\Big)^2, \qquad n_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(p)\,dp. \tag{3.13}$$

Из анализа (3.13) следует, что в простой волне плотность $n(\xi)$ возрастает и в пределе достигает единицы с убыванием $|\xi|$ до нуля.

Уравнения (3.1) в переменных t, ξ, p имеют вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{3p-\xi}{3t}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{2p}{3t} \qquad (t>0) \tag{3.14}$$

и определяют траектории движения пузырьков в системе координат, движущейся вместе с простой волной. Интегрируя уравнения (3.14), находим траектории $\xi = -3at^{-2/3} + bt^{-1/3}$, $p = at^{-2/3}$, где a и b — произвольные постоянные. Заметим, что $C = (3p+\xi)^2/|p| = \mathrm{const}$ является интегралом системы (3.14). Поэтому при анализе траекторий движения частиц будем использовать рис. 3. Величина $p-\xi/3$ в области Ω_1 отрицательна, в областях Ω_2, Ω_4, Ω_5 положительна, а в области Ω_3 меняет знак с отрицательного на положительный при переходе через прямую, соединяющую в плоскости (p,ξ) точки $(\xi_0/3, \xi_0)$ и $(0,0)$. Построенное решение описывает течение с критическим слоем, так как на линии $\xi = 3p$ скорость движения частиц совпадает со скоростью волны. В область простой волны Ω_3 через фронт $\xi = \xi_*$ $(\xi_0 \leqslant \xi_* < \xi_1)$ проникают пузырьки, относительная скорость которых меняет знак в некоторой точке траектории, после чего эти пузырьки возвращаются на фронт $\xi = \xi_*$ и покидают область Ω_3. Траектории движения пузырьков в простой волне показаны на рис. 4 в пространстве переменных (t, ξ, p). На рис. 4 проекции кривых *1*, *2* на плоскость (p,ξ) лежат в областях Ω_4, Ω_5, а проекции кривых *3*, *4* (имеющие точки поворота) пересекают области Ω_1, Ω_3, Ω_2. Таким образом, построенные автомодельные решения описывают процессы проникновения пузырьков в невозмущенную область, по которой распространяется простая волна.

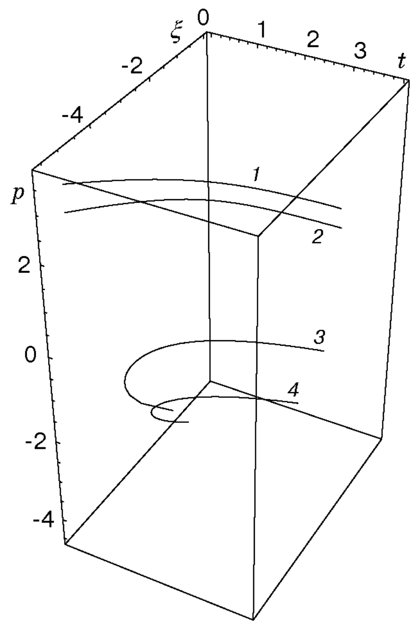

Рис. 4

Подмодель (2.1). Рассмотрим уравнение (2.1) при $\beta = -1/2$. В этом случае представление решения и фактор-система E/H следующие:

$$\xi = x/\sqrt{t}, \qquad \varphi = p\sqrt{t}, \qquad f = \sqrt{t}\psi(\xi,\varphi); \tag{3.15}$$

$$\frac{\psi}{2} + (\varphi - l)\psi_\xi + l'\varphi\psi_\varphi = 0, \qquad l(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\psi\,d\varphi + \frac{\xi}{2}. \tag{3.16}$$

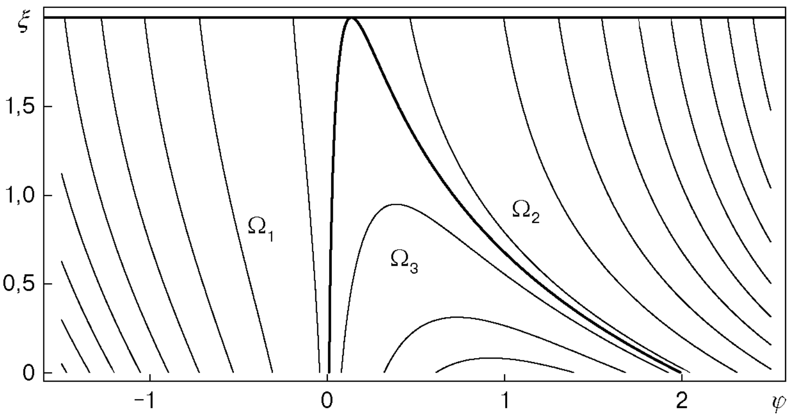

Рис. 5

Заметим, что характеристическая система первого уравнения в (3.16) имеет интеграл

$$C = \varphi^2 - 2\varphi l(\xi). \tag{3.17}$$

Это позволяет найти еще один интеграл и представить ψ в виде

$$\psi = \Phi(C) \exp\left(\mp \frac{1}{2} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{l^2(\tau) + C}}\, d\tau \right). \tag{3.18}$$

В (3.17) знак “минус” выбирается при выполнении неравенства $\varphi - l(\xi) > 0$, знак “плюс” — при $\varphi - l(\xi) < 0$. Второе уравнение (3.16), представимое в виде

$$l(\xi) - \frac{\xi}{2} = \int\limits_{-l^2(\xi)}^{\infty} \left(\frac{l(\xi)}{\sqrt{l^2(\xi) + C}} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{l^2(\tau) + C}}\, d\tau \right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{l^2(\tau) + C}}\, d\tau \right) \right) \Phi(C)\, dC, \tag{3.19}$$

служит для определения функции $\Phi(C)$.

На интервале $[\xi_0, \xi_1]$ произвольно зададим непрерывно дифференцируемую неотрицательную монотонно убывающую функцию $l(\xi)$. На рис. 5 показаны линии $C = \text{const}$ в плоскости переменных (φ, ξ). В данном случае $l(\xi) = \exp(-\xi)$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 2$. При другом выборе $l(\xi)$ качественный вид рис. 5 сохраняется. В областях

$$\Omega_1 = \{(\xi, \varphi)\colon \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1,\ -\infty < \varphi \leqslant l(\xi) - \sqrt{l^2(\xi) - l_1^2}\},$$

$$\Omega_2 = \{(\xi, \varphi)\colon \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1,\ l(\xi) + \sqrt{l^2(\xi) - l_1^2} \leqslant \varphi < \infty\}$$

интеграл C принимает значения от $-l_1^2$ до бесконечности, а в области

$$\Omega_3 = \{(\xi, \varphi)\colon \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1,\ l(\xi) - \sqrt{l^2(\xi) - l_1^2} < \varphi < l(\xi) + \sqrt{l^2(\xi) - l_1^2}\} \text{ —}$$

от $-l_0^2$ до $-l_1^2$ ($l_0 = l(\xi_0)$, $l_1 = l(\xi_1)$).

На полупрямой $[-l_1^2, \infty)$ зададим функцию $\Phi = \Phi_*(C)$ такую, что в точке $\xi = \xi_1$ уравнение (3.19) выполнено. Как видно на рис. 5, в областях Ω_1 и Ω_2 значения функции $\Phi(C)$

определяются по известной функции $\Phi_*(C)$, а в области Ω_3 не определяются. Для построения решения в области Ω_3 необходимо найти функцию $\Phi(C)$ на отрезке $[-l_0^2, -l_1^2)$. С этой целью преобразуем соотношение (3.19):

$$\int\limits_{-l^2}^{-l_1^2} \Big(\frac{l}{\sqrt{l^2+C}}\,\mathrm{ch}\,(q(l,C)) - \mathrm{sh}\,(q(l,C))\Big)\Phi(C)\,dC =$$

$$= l - \frac{\xi(l)}{2} - \int\limits_{-l_1^2}^{\infty} \Big(\frac{l}{\sqrt{l^2+C}}\,\mathrm{ch}\,(q(l,C)) - \mathrm{sh}\,(q(l,C))\Big)\Phi_*(C)\,dC = F(l), \qquad (3.20)$$

где

$$q(l,C) = \frac{1}{2}\int\limits_{l_0}^{l} \frac{\xi'(\zeta)}{\sqrt{\zeta^2+C}}\,d\zeta \text{ —}$$

непрерывная функция переменных l, C.

Выделим особенность в ядре интегрального оператора (3.20) и введем обозначения $s=-l^2$, $s_1=-l_1^2$, $s_0=-l_0^2$, $\tilde F(s)=F(l)$. Получим уравнение

$$\int\limits_{s}^{s_1} \frac{\Phi(C)}{\sqrt{C-s}}\,dC = G(s) = \frac{1}{\sqrt{-s}\,\mathrm{ch}\,(q(\sqrt{-s},s))}\Big[\tilde F(s) -$$

$$- \int\limits_{s}^{s_1} \Big(\frac{\sqrt{-s}}{\sqrt{C-s}}\,[\mathrm{ch}\,(q(\sqrt{-s},C)) - \mathrm{ch}\,(q(\sqrt{-s},s))] - \mathrm{sh}\,(q(\sqrt{-s},C))\Big)\Phi(C)\,dC\Big]. \qquad (3.21)$$

Дифференцируемая функция $G(s)$ определена на интервале $[s_0, s_1]$. Обратим интегральный оператор Абеля (3.21):

$$\Phi(C) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{G(s_1)}{\sqrt{s_1-C}} - \int\limits_{C}^{s_1} \frac{G'(s)}{\sqrt{s-C}}\,ds\Big). \qquad (3.22)$$

В итоге для определения функции $\Phi(C)$ получено интегральное уравнение второго рода (3.22). Уравнение (3.22) однозначно разрешимо методом последовательных приближений. Заметим, что $G(s_1)=0$, так как в точке $\xi=\xi_1$ уравнение (3.19) выполнено. Если функция $\Phi(C)$ определена, то формулы (3.15), (3.17), (3.18) задают инвариантное решение уравнения (1.1).

Запишем уравнения (3.1), определяющие траектории движения частиц, в переменных ξ, φ:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\varphi - l(\xi)}{t}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l'(\xi)\varphi}{t}.$$

Относительная скорость движения пузырьков в области Ω_3 меняет знак при обращении величины $\varphi - l(\xi)$ в нуль. Поэтому построенное инвариантное решение описывает течения с критическим слоем.

Автор выражает благодарность В. М. Тешукову за внимание к работе, участие в обсуждении результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wijngaarden L., Kapteyn C.** Concentration waves in dilute bubble liquid mixtures // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 111–137.
2. **Biesheuvel A., Gorissen W. C. M.** Void fraction disturbance in a uniform bubble liquid // J. Multuphase Flow. 1990. V. 16. P. 217–231.
3. **Smereka P.** On the dynamics of bubbles in a periodic box // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 79–112.
4. **Russo G., Smereka P.** Kinetic theory for bubbly flow I: collisionless case // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, N 2. P. 327–357.
5. **Тешуков В. М.** Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 86–100.
6. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
8. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
9. **Чесноков А. А.** Вихревые движения жидкости в узком канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 38–47.

Поступила в редакцию 25/XII 1998 г.,
в окончательном варианте — 30/IX 1999 г.