

УДК 532.5.032

DOI: 10.15372/PMTF202415462

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНОГО ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ДИФфуЗИОННОГО ИСПАРЕНИЯ

В. Б. Бекежанова*, Н. И. Гилев*,**

* Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

** Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

E-mails: vbek@icm.krasn.ru, gilevnick@gmail.com

На основе точного частично инвариантного решения уравнений термоконцентрационной конвекции изучаются характеристики совместных течений испаряющейся жидкости и ламинарного газового потока в плоском горизонтальном канале. Исследуется влияние толщины жидкого слоя и условий для функции температуры на верхней стенке канала на скорость испарения, вызванного прокачкой газа. Верификация точного решения выполняется на основе сравнения с данными экспериментов. Исследуется линейная устойчивость точного решения. Установлено, что независимо от типа граничного теплового режима в системе всегда реализуется колебательная неустойчивость в форме ячейистой конвекции. Теплоизоляция верхней стенки не приводит к изменению структуры наиболее опасных возмущений, незначительно дестабилизирует течение в случае длинноволновых возмущений и оказывает стабилизирующее влияние при коротковолновых возмущениях.

Ключевые слова: точное решение, двухфазная система, термокапиллярная конвекция, испарение, колебательная неустойчивость

Введение. Исследование конвекции в условиях испарения представляет интерес вследствие широкого распространения испаряющихся жидкостей в природе и технике [1]. При использовании двухфазных систем в лабораторном и промышленном оборудовании одной из главных проблем является управление режимами тепломассопереноса в рабочих средах [2, 3]. Технические резервуары, в которых реализуются конвективные течения, могут находиться в условиях внешней тепловой нагрузки, в том числе комбинированной, когда, например, часть границ теплоизолирована, а на некоторых участках происходит нагрев (охлаждение). Изменение интенсивности внешней тепловой нагрузки существенно влияет на параметры конвективного тепломассообмена [4] и устойчивость основного состояния рабочей жидкости [5]. В условиях, когда конвекция происходит в системах с границами раздела и сопровождается фазовыми превращениями, возникают дополнительные факторы, которые могут существенно менять характер течений и влиять на их устойчивость. Испарение является эндотермическим процессом, при котором происходит охлаждение поверхности жидкости, в результате чего меняется поверхностное натяжение межфазной границы и проявляется термокапиллярный эффект, определяющий интенсивность конвекции и возможные режимы неустойчивости [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-11-00243).

© Бекежанова В. Б., Гилев Н. И., 2024

Известно, что наличие границы раздела даже в условиях устойчивой температурной стратификации рабочей жидкости не гарантирует устойчивость основного состояния [6, 7]. Кроме того, в зависимости от типа граничного теплового режима могут меняться форма критических возмущений и типы возникающих неустойчивостей. Влияние тепловых граничных условий на устойчивость равновесного состояния горизонтального слоя со свободными границами изучалось в [8]. Показано, что в случае изотермических границ конвективное движение в жидком слое с отрицательным внутренним температурным градиентом возникает под действием возмущений, имеющих форму ячеек с горизонтальным масштабом порядка толщины слоя. При заданном тепловом потоке имеет место длинноволновая неустойчивость. В обоих случаях возникновение и развитие конвекции представляет собой вилочную бифуркацию от состояния механического равновесия. В замкнутых областях такое поведение системы реализуется вследствие адиабатических условий на вертикальных (боковых) стенках, изменение которых приводит к появлению различных форм неустойчивости. Влияние заданного постоянного потока на бифуркацию длинноволнового вихревого течения исследовано в работе [9], в которой бифуркационные явления описаны с использованием чисел Рэлея, соответствующих горизонтальному и вертикальному перепадам температур. В бинарных жидкостях наряду с влиянием неоднородности теплового поля, обусловленной внешней тепловой нагрузкой, проявляется влияние концентрации, которое может приводить к возникновению конвективных [10] и конечно-амплитудных [11] течений. В газопаровых смесях при испарении (конденсации) одного из компонентов может возникать инверсия плотности, вследствие чего при определенных граничных температурных режимах независимо от направления градиента температуры могут сформироваться и сосуществовать неустойчивый и устойчивый “подслой” [12]. В двухслойной системе ультратонких пленок, подвергаемой действию произвольно ориентированного температурного градиента, при совместном действии сил Марангони и Ван-дер-Ваальса возможно образование капель, упорядоченных и иррегулярных структур в зависимости от интенсивности внешней тепловой нагрузки [13].

В указанных выше работах изучались условия возникновения конвекции и нелинейной эволюции вследствие температурного воздействия в изначально покоящейся среде. В данной работе исследуются характеристики конвективного теплообмена в двухслойной системе жидкость — газопаровая смесь, заполняющей бесконечный плоский горизонтальный канал. В качестве основного состояния рассматривается стационарное течение, описываемое точным решением определяющих уравнений. Предполагается, что граница раздела сред является термокапиллярной поверхностью, допускающей фазовый переход диффузионного типа. Анализируются изменения параметров конвективного режима, обусловленные сменой граничного режима на верхней стенке, контактирующей с газовой фазой, и нагревом подложки по линейному закону. Исследовано влияние толщины жидкого слоя на скорость испарения, вызванного прокачкой газа, проведено сравнение с известными данными экспериментов. В результате решения задачи об устойчивости течения получены пороговые характеристики устойчивости, рассчитанные в рамках постановок с граничными условиями первого и второго рода для функции температуры газовой фазы.

1. Постановка задачи. Рассматривается стратифицированное установившееся течение в системе сред испаряющаяся жидкость — парогазовая смесь в плоском горизонтальном мини-канале с твердыми непроницаемыми стенками $y = -l$ и $y = h$ (рис. 1). Обе среды полагаются вязкими теплопроводными и несжимаемыми жидкостями, разделенными гладкой поверхностью Γ . Силы поверхностного натяжения, действующие на внутренней границе Γ , характеризуются функцией $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, где σ_0 , T_0 — характерные значения поверхностного натяжения и температуры жидкости соответственно; σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения. В верхнем слое газ прокачивается

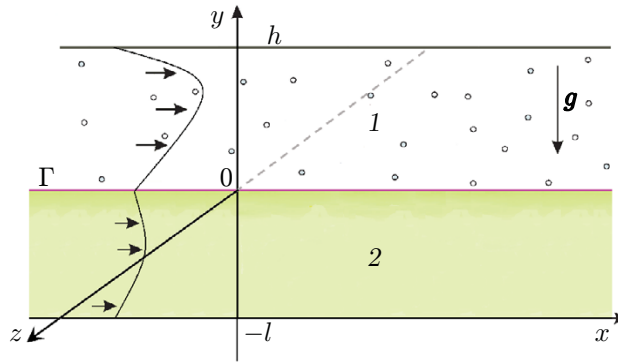


Рис. 1. Схема области течения:
1 — газопаровая смесь, 2 — жидкость

с заданным расходом R_g , что приводит к формированию дополнительных сдвиговых напряжений на границе раздела сред и испарению жидкости. Испаряемый компонент в несущем газе считается инертной примесью.

Основными механизмами, определяющими структуру конвективных течений с испарением в рассматриваемой двухслойной системе, являются продув газа, термокапиллярный эффект и сила плавучести. Для описания конвективного теплообмена используется двусторонняя математическая модель на основе уравнений Обербека — Буссинеска

$$\mathbf{v}_{jt} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = -\rho_j^{-1} \nabla p_j + \nu_j \Delta \mathbf{v}_j - \mathbf{g}(\beta_j T_j + \delta_j^2 \gamma C), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j = 0, \quad T_{jt} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla T_j = \chi_j (\Delta T_j + \delta_j^2 \alpha_C \Delta C);$$

$$C_t + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla C = D(\Delta C + \alpha_T \Delta T_2). \quad (2)$$

Здесь индексы $j = 1, 2$ соответствуют жидкой и газовой фазам; $\mathbf{v} = (u, v)$ — вектор скорости; p — модифицированное давление; T — температура; C — функция концентрации пара; $\mathbf{g} = (0, -g)$ — ускорение свободного падения; ρ — средняя плотность; ν , χ , β — кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент теплового расширения соответственно; D — коэффициент диффузии пара в газе; γ — коэффициент изменения плотности вследствие изменения концентрации; α_T и α_C — параметры Соре и Дюфура; δ_j^2 — символ Кронекера. Уравнение (2) описывает перенос пара в газовом слое.

Система уравнений (1), (2) допускает частично инвариантное точное решение ранга 1 дефекта 3 [14, 15]:

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(y), \quad v_j = 0, \quad T_j = T_j(x, y) = (a_1^j + a_2^j y)x + \theta_j(y), \\ C &= C(x, y) = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y), \quad p_j = p_j(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь a_k^j , b_k ($k = 1, 2$) — параметры решения, которые должны удовлетворять условиям совместности, зависящим от граничных условий.

На термокапиллярной поверхности раздела Γ наряду со стандартными условиями непрерывности поля температуры и вектора скорости, кинематическим (удовлетворяется тождественно в силу вида решения (3)) и динамическим условиями задаются условие теплового баланса, учитывающее диффузионный перенос массы за счет испарения, и соотношение, определяющее концентрацию насыщенного пара на межфазной поверхности:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u_1 &= u_2 = u_\Gamma, \quad T_1 = T_2 = T_\Gamma, \\ \rho_1 \nu_1 u_{1y} &= \rho_2 \nu_2 u_{2y} - \sigma_T T_{1x}, \quad p_1 = p_2, \\ \kappa_1 T_{1y} - \kappa_2 T_{2y} - \alpha_C \kappa_2 C_y &= -LM, \quad C = C_0[1 + \varepsilon(T_2 - T_0)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь u_Γ , T_Γ — значения скорости и температуры на межфазной поверхности соответственно; κ_j — теплопроводность; L — скрытая теплота парообразования; M — массовая скорость испарения; C_0 — равновесная концентрация насыщенного пара (соответствует равновесной температуре T_0); $\varepsilon = L\mu/(R^*T_0^2)$; μ — молярная масса испарившейся жидкости; R^* — универсальная газовая постоянная. Скорость испарения определяется с помощью закона сохранения массы

$$M = -(C_n + \alpha_T T_{1n}), \quad (5)$$

причем структура решения позволяет реализовать случаи однородного и неоднородного испарения. В первом случае скорость испарения постоянна ($M = M_0 = \text{const}$), во втором изменяется вдоль канала по линейному закону ($M = M_0 + M_x x$). Постоянная M_0 интерпретируется как средняя скорость испарения на рабочем участке; это позволяет провести непосредственное сравнение с экспериментальными значениями M_{exp} . Рассматривая конденсацию как испарение с отрицательным потоком массы, по знаку величины M можно различать режимы фазового перехода: случай $M > 0$ соответствует испарению жидкости в несущий газ, $M < 0$ — конденсации пара.

Вывод условий (4) осуществлялся с учетом формы решения (3); кроме того, предполагалось, что в установившемся режиме межфазная поверхность остается недеформированной. Возможность поддержания плоской формы границы между испаряющейся жидкостью и газовым потоком с точностью до ± 10 мкм с помощью шпирен-метода в реальной физической системе описана в [16].

На обеих стенках канала считаются выполненными условия прилипания для функции скорости, верхняя стенка $y = h$ непроницаема для пара. На нижней границе $y = -l$ для функции температуры ставится условие Дирихле, задающее линейный нагрев стенки. На верхней границе для функции температуры T_2 могут быть сформулированы как условие Дирихле, так и условие Неймана, учитывающее полный поток температуры и предполагающее теплоизоляцию верхней стенки:

$$\begin{aligned} y = -l: \quad T_1 &= A_1 x + T_{10}, \\ y = h: \quad T_2 &= A_2 x + T_{20} \quad \text{или} \quad T_{2y} + \alpha_C C_y = 0, \quad C_y + \alpha_T T_y = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь A_j — граничные продольные градиенты температуры; T_{j0} — постоянные, определяющие среднюю температуру стенок. Оба типа условий для функции температуры на верхней границе обеспечивают корректность постановки краевой задачи. Тепловая нагрузка, распределенная по линейному закону и приложенная на внешних границах, является дополнительным фактором, влияющим на параметры возникающих конвективных режимов.

В качестве замыкающего используется условие, задающее расход газа R_g в верхнем слое. В экспериментах [16, 17] величина R_g является режимным параметром, который контролируется за счет сохранения постоянной скорости прокачки газа. При решении двумерной задачи значения расхода газа, соответствующие условиям эксперимента, могут быть

получены с помощью формулы $R_g = \int_0^h \rho_2 u_2^*(y) dy$, где u_2^* — экспериментальное значение скорости газового потока.

Явные представления искомых функций (3) восстанавливаются однозначным образом [7]. Константы интегрирования и параметры решения определяются с учетом граничных условий (4)–(6). Ниже решения вида (3), построенные в рамках представленных постановок, различающихся типом граничного условия для функции температуры T_2 , используются при анализе влияния граничного теплового режима на параметры конвективных режимов в двухслойной системе этанол — воздух, включая пороговые характеристики

устойчивости. Верификация решения выполняется на основе сравнения значений массовой скорости испарения, полученных в экспериментах, с расчетными значениями, найденными с помощью точного решения.

2. Сравнительный анализ параметров конвективных режимов. Представим результаты исследования двухслойных течений в системе этанол — воздух при одновременном линейном нагреве нижней и верхней стенок канала (режим 1) и при комбинированной тепловой нагрузке, когда на нижней стенке поддерживается линейное распределение температуры с продольным градиентом A_1 , а верхняя стенка теплоизолирована (режим 2). Выбраны следующие значения теплофизических параметров: для этанола — $\rho = 0,79 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0,15 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\beta = 1,08 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹, $\chi = 0,8 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\kappa = 0,17$ Вт/(м·К), $\sigma_0 = 24,14 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\sigma_T = 0,8 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К), для воздуха — $\rho = 1,2$ кг/м³, $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\beta = 3,67 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹, $\chi = 0,21 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\kappa = 0,03$ Вт/(м·К), $\mu = 46 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $D = 0,13 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\gamma = -0,62$, $\alpha_T = 5 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹, $\alpha_C = 10^{-3}$ К, на межфазной поверхности $L = 8,79 \cdot 10^5$ Вт·с/кг [18]. Поскольку точные значения коэффициентов γ , α_T и α_C для паров этанола в воздухе неизвестны, выбранные значения являются модельными и не противоречащими известным общим требованиям [19, 20]. Все расчеты выполнялись для условий нормальной гравитации $g = 9,81$ м/с² при величине расхода $R_g = 8,33 \cdot 10^{-6}$ кг/(м·с) (соответствует скорости газового потока $u_2^* = 1,389 \cdot 10^{-3}$ м/с), толщине газового слоя $h = 5$ мм и средней температуре стенок $T_{10} = T_{20} = 20$ °С. Равновесные характеристики сохранялись равными $T_0 = 20$ °С, $C_0 = 0,1$. Значения граничных продольных градиентов изменялись в диапазоне $A_j = -5 \div 5$ °С/м, за исключением случаев, оговоренных особо. Указанный диапазон значений A_j позволяет обеспечить перепады температуры в системе в пределах 1 °С, что близко к условиям экспериментов [16, 17].

На рис. 2–4 представлены профили скорости, поля температуры в двухслойной системе и распределение концентрации пара в газовом слое при различных условиях внешней тепловой нагрузки и постоянной скорости испарения ($M = \text{const}$).

Установлено, что изменение типа граничного условия для функции T_2 не влияет на структуру поля скорости (ср. рис. 2, а, г, ж и рис. 3, а, г, ж) и не приводит к формированию топологически новых классов течений (классификация течений в двухфазных системах представлена в [21]). В рассматриваемом диапазоне значений A_j решение описывает известные классы течений (чисто термокапиллярные, смешанные или пуазейлевские).

Однако смена граничного температурного режима оказывает существенное влияние на структуру теплового поля в системе и, как следствие, на распределение концентрации пара в газовом слое. Теплоизоляция верхней стенки обеспечивает условия для формирования однородного температурного поля в газовой фазе с градиентами T_{2y} , близкими к нулю (см. рис. 2, б, д, з). При одновременном нагреве стенок могут формироваться режимы с горячим термоклинном на межфазной поверхности или в жидкой объемной фазе, при этом в одном из слоев наблюдается неустойчивая температурная стратификация в вертикальном направлении (см. рис. 3, 4). Линейный нагрев стенок с различной интенсивностью при $A_1 \neq A_2$ может приводить к возникновению режимов с неоднородной температурной стратификацией в поперечном направлении (см. рис. 4, а) или с однородным полем температуры в одном из слоев (см. рис. 4, д).

В табл. 1 приведены значения скорости на межфазной границе u_T , перепада температуры ΔT на рабочем участке длиной 5 см и постоянной массовой скорости испарения M , рассчитанные на основе точного решения (3) при различных типах граничных условий для функции температуры на верхней стенке канала $y = h$. Все значения получены для системы с толщиной жидкого слоя $l = 3$ мм. Для случая линейного нагрева обеих стенок приведены значения указанных характеристик, полученные при условии $A_1 = A_2$ (в этом

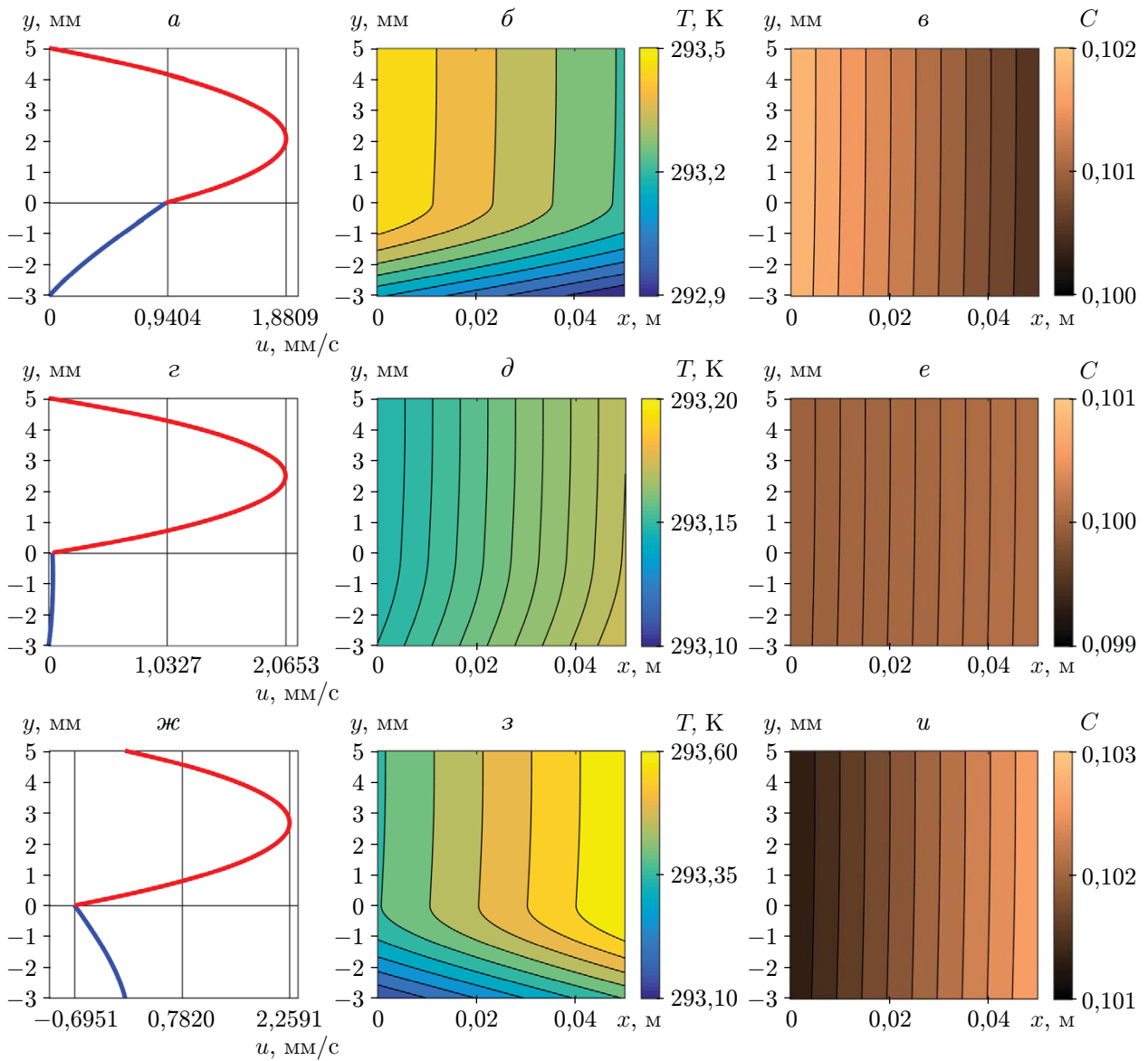


Рис. 2. Профиль скорости (a , $г$, $ж$), поле и изолинии температуры ($б$, $д$, $з$), распределение и изолинии концентрации пара ($в$, $е$, $и$) для системы этанол — воздух с $l = 3$ мм в канале с адиабатической верхней границей:
 a – $в$ — $A_1 = -5$ °C/м, $г$ – $е$ — $A_1 = 0,5$ °C/м, $ж$ – $и$ — $A_1 = 5$ °C/м

случае значение градиента температуры в продольном направлении на поверхности раздела A совпадает со значениями градиентов на твердых границах).

В силу вида решения значения массовой скорости испарения M совпадают для обоих рассматриваемых типов граничных условий для функции температуры. При этом изменение типа тепловой нагрузки (охлаждение стенок вдоль оси канала при $A_j < 0$ и нагрев при $A_j > 0$) приводит лишь к смене знака величины M , что может рассматриваться как некоторый дефект двумерного решения. Вместе с тем совпадение значений $|M|$ в случае противоположных знаков градиентов A позволяет провести сравнение с данными экспериментов. В реальной системе на поверхности жидкости, обдуваемой газовым потоком, формируется продольный температурный градиент, направление которого противоположно

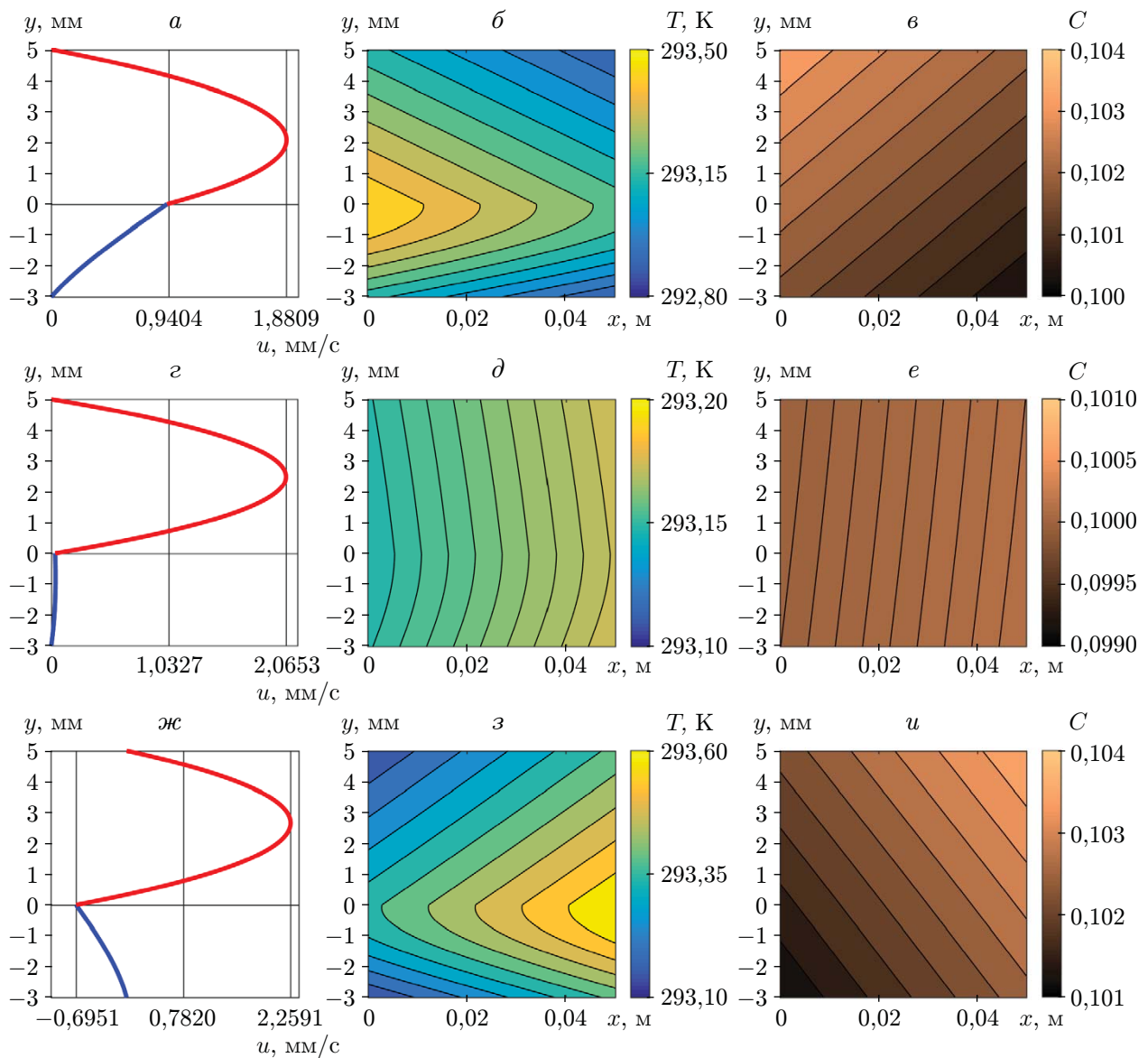


Рис. 3. Профиль скорости (*а, г, ж*), поле и изолинии температуры (*б, д, з*), распределение и изолинии концентрации пара (*в, е, и*) для системы этанол — воздух с $l = 3$ мм в канале с нагреваемыми стенками при $A_1 = A_2$:
а-в — $A_1 = A_2 = -5$ °C/м, *г-е* — $A_1 = A_2 = 0,5$ °C/м, *ж-и* — $A_1 = A_2 = 5$ °C/м

направлению прокачки газа, т. е. температура поверхности уменьшается в направлении прокачки. Однако, поскольку решение дает одинаковые по абсолютной величине значения массовой скорости испарения, с его помощью могут быть определены качественные зависимости расхода испарения от режимных параметров системы.

Согласно данным экспериментов [22] значения массовой скорости испарения и градиента температуры на поверхности слоя жидкости толщиной 3 мм, измеренные при скорости газового потока $u_2^* = 1,389 \cdot 10^{-3}$ м/с и рабочей температуре $T_0 = 20$ °C, составляют $M_{exp} = 6,71 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с) и $A_{exp} = 10,916$ °C соответственно. Из табл. 1 следует, что решение дает заниженные значения массовой скорости испарения M по сравнению с экспериментальным значением M_{exp} . Главным образом, это обусловлено двумерностью

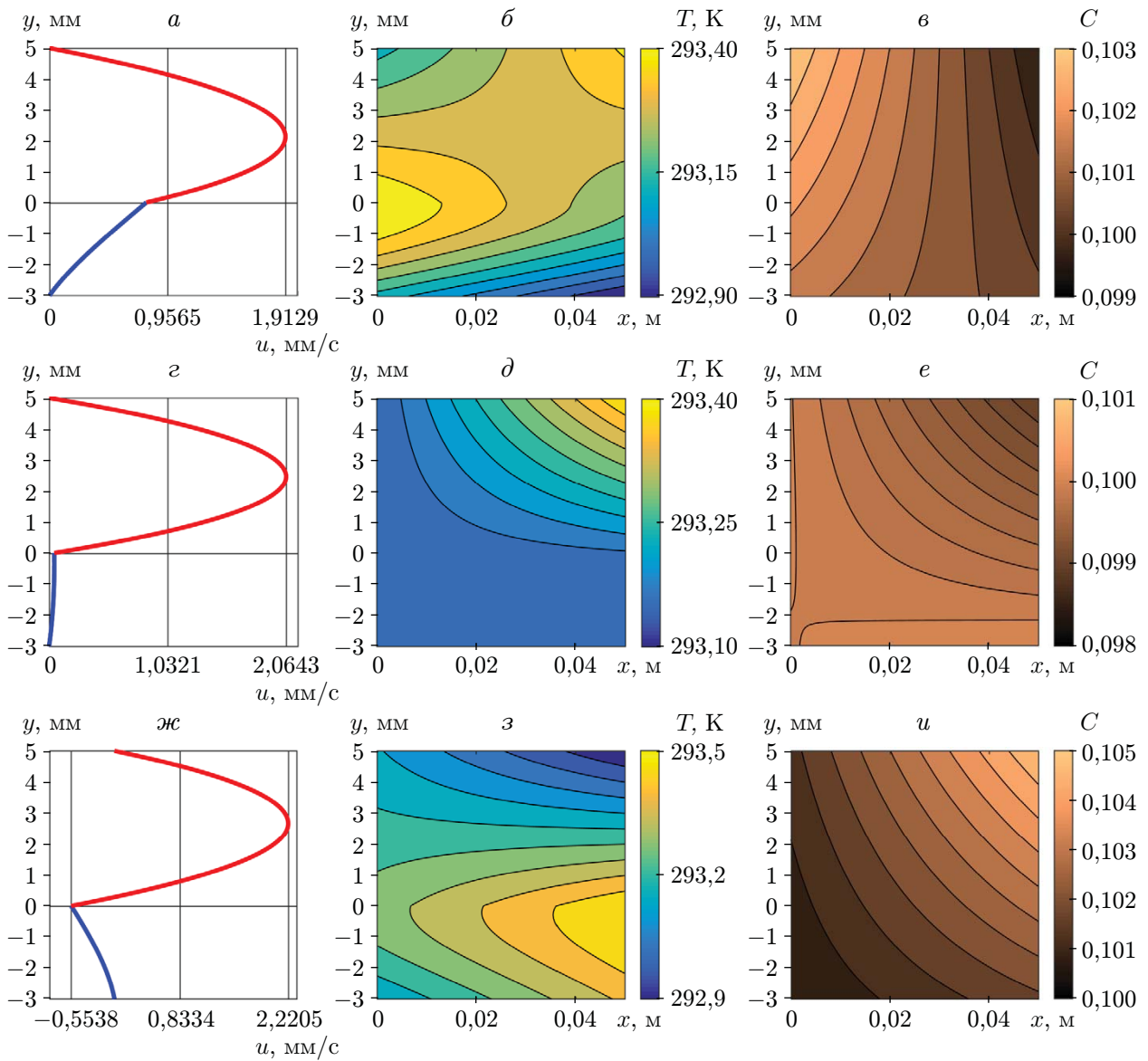


Рис. 4. Профиль скорости (*а, г, ж*), поле и изолинии температуры (*б, д, з*), распределение и изолинии концентрации пара (*в, е, и*) для системы этанол — воздух с $l = 3$ мм в канале с нагреваемыми стенками при $A_1 \neq A_2$:
а-в — $A_1 = -5$ °C/м, $A_2 = 5$ °C/м, *г-е* — $A_1 = 0$, $A_2 = 5$ °C/м, *ж-и* — $A_1 = 5$ °C/м, $A_2 = -5$ °C/м

используемой постановки задачи. В реальной системе испарение происходит не только в продольном направлении, но и в поперечном, поэтому объем несущего газа, в который происходит испарение, больше; следовательно, с единицы площади поверхности испаряется большее количество жидкости. Кроме того, значения температурного градиента на поверхности, получаемые в рассматриваемом диапазоне величины A_j , меньше A_{exp} . Поэтому дополнительно были вычислены параметры u_Γ , ΔT , M при граничных температурных градиентах A_j , совпадающих по абсолютному значению с полученным в эксперименте. Решение на качественном уровне адекватно описывает уменьшение скорости испарения при уменьшении теплового градиента на межфазной границе.

Таблица 1

Расчетные значения характеристик конвективных режимов
при различных граничных температурных режимах на верхней стенке канала

$T_2 = A_2x + T_{20}$				$T_{2y} + \alpha_C C_y = 0$			
$A, ^\circ\text{C}/\text{м}$	$u_\Gamma, \text{мм}/\text{с}$	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	$M, \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$	$A_1, ^\circ\text{C}/\text{м}$	$u_\Gamma, \text{мм}/\text{с}$	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	$M, \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$
-10,916	1,885	1,948	$-5,00 \cdot 10^{-7}$	-10,916	1,885	2,085	$-5,00 \cdot 10^{-7}$
-5,000	0,926	0,571	$-2,29 \cdot 10^{-7}$	-5,000	0,926	0,604	$-2,29 \cdot 10^{-7}$
-4,000	0,764	0,413	$-1,83 \cdot 10^{-7}$	-4,000	0,764	0,436	$-1,83 \cdot 10^{-7}$
-3,000	0,602	0,277	$-1,37 \cdot 10^{-7}$	-3,000	0,602	0,292	$-1,37 \cdot 10^{-7}$
-2,000	0,440	0,163	$-9,16 \cdot 10^{-8}$	-2,000	0,440	0,170	$-9,16 \cdot 10^{-8}$
-1,000	0,277	0,070	$-4,58 \cdot 10^{-8}$	-1,000	0,277	0,073	$-4,58 \cdot 10^{-8}$
1,000	-0,047	0,051	$4,58 \cdot 10^{-8}$	1,000	-0,047	0,051	$4,58 \cdot 10^{-8}$
2,000	-0,209	0,124	$9,16 \cdot 10^{-8}$	2,000	-0,209	0,126	$9,16 \cdot 10^{-8}$
3,000	-0,371	0,218	$1,37 \cdot 10^{-7}$	3,000	-0,371	0,224	$1,37 \cdot 10^{-7}$
4,000	-0,533	0,334	$1,83 \cdot 10^{-7}$	4,000	-0,533	0,346	$1,83 \cdot 10^{-7}$
5,000	-0,695	0,472	$2,29 \cdot 10^{-7}$	5,000	-0,695	0,492	$2,29 \cdot 10^{-7}$
10,916	-1,654	1,733	$5,00 \cdot 10^{-7}$	10,916	-1,654	1,841	$5,00 \cdot 10^{-7}$

Таблица 2

Расчетные значения средней массовой скорости испарения M
при различных значениях толщины жидкого слоя
и граничных температурных режимах на верхней стенке канала

$l, \text{мм}$	$A_{exp}, ^\circ\text{C}$	$T_2 = A_2x + T_{20}$		$T_{2y} + \alpha_C C_y = 0$	
		$M \cdot 10^7, \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$	$M_0 \cdot 10^6, \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$	$M \cdot 10^7, \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$	$M_0 \cdot 10^4, \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$
1	32,745	15,00	9,37	15,00	2,96
2	16,372	7,50	14,07	7,50	2,77
3	10,916	5,00	15,52	5,00	2,57
4	8,162	3,74	13,27	3,74	2,38
5	6,132	2,81	6,44	2,81	2,18

С учетом имеющихся экспериментальных зависимостей скорости испарения от толщины жидкого слоя l на основе точного решения (3) были рассчитаны значения M при различных значениях l для обоих типов граничных условий для функции температуры на верхней стенке (табл. 2). Расчеты проводились с учетом экспериментальных данных [22], свидетельствующих о зависимости градиента температуры на границе жидкость — газ от толщины жидкого слоя. Известна закономерность изменения поверхностного теплового градиента с изменением толщины слоя жидкого теплоносителя: увеличение толщины l приводит к уменьшению A (см. табл. 2, в которой указаны градиенты A_{exp} , полученные на основе экспериментальных данных). Расчетные значения M получены при $A_1 = A_2 = A_{exp}$ для соответствующей толщины жидкого слоя в случае линейного нагрева стенок и при $A_1 = A_{exp}$ в случае адиабатической верхней границы.

Сравнение расчетных значений M , полученных для случая постоянной скорости испарения, с экспериментальными значениями показало, что решение не описывает поведение величины M , связанное с изменением толщины жидкого слоя. Согласно экспериментальным данным при $l = 3$ мм кривая M_{exp} имеет максимум, который сохраняется при различных значениях скорости прокачки газа u_2^* (рис. 5, а).

Учет неоднородного характера испарения, когда скорость испарения меняется вдоль канала по линейному закону $M = M_0 + M_x x$, позволяет на качественном уровне воспроиз-

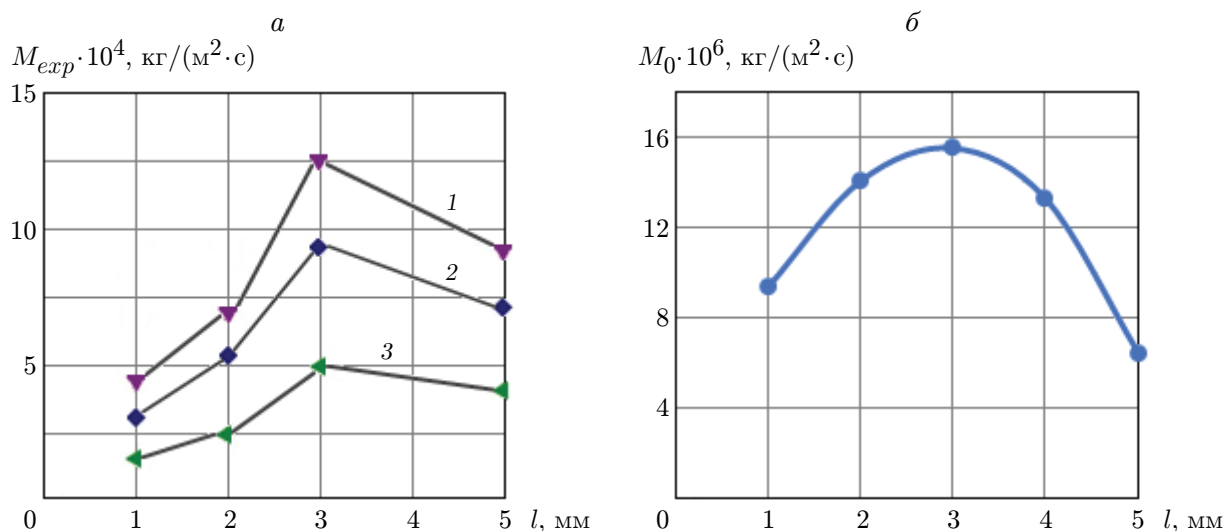


Рис. 5. Зависимость массовой скорости испарения M в системе сред этанол — воздух от толщины жидкого слоя l :

a — экспериментальные данные, b — результаты расчета с учетом неоднородного характера испарения; 1 — $u_2^* = 0,041$ м/с, 2 — $u_2^* = 0,027$ м/с, 3 — $u_2^* = 0,013$ м/с

вести поведение экспериментальной кривой $M_{exp}(l)$ при толщине жидкого слоя $l = 1 \div 5$ мм в рамках постановки с условием Дирихле для функции температуры (рис. 5, б). Соответствующие значения M_0 , рассчитанные при тех же значениях граничных температурных градиентов, приведены в табл. 2. При обоих типах граничных условий значения M_0 существенно превышают значения скорости испарения, полученные в предположении об однородном характере испарения, и значительно ближе к экспериментальным значениям M_{exp} . Заметим, что изменение массовой скорости испарения вдоль поверхности жидкости, обдуваемой ламинарным газовым потоком, фиксировалось в теплофизических экспериментах [17].

3. Устойчивость двухслойных течений при наличии испарения. Поскольку смена граничного теплового режима на верхней стенке может вызывать изменение поля температуры во всей двухфазной системе, была исследована линейная устойчивость точного решения (3), описывающего течение слабоиспаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, в плоском горизонтальном канале. Рассмотрены инфинитезимальные двумерные возмущения установившегося течения с недеформируемой межфазной границей при обоих типах тепловых граничных условий на внешней стенке канала $y = h$, контактирующей с газовой фазой.

3.1. Постановка задачи. Для того чтобы сформулировать задачу об устойчивости двухслойных течений и ввести определяющие критерии подобия, выполним переход к безразмерным переменным. Выбирая в качестве характерных значений всех физических величин значения соответствующих параметров газа, получаем безразмерные аналоги $\omega = \omega_1/\omega_2$ для каждого физического параметра ω_1 . Примем величины h , ν_2/h , $\rho_2\nu_2^2/h^2$ и Ah в качестве масштабов длины, скорости, давления и температуры соответственно. Тогда $\hat{h} = l/h$ — безразмерная толщина жидкого слоя; $\tau = \nu_2 t/h^2$, $\xi = (\xi, \eta) = (x/h, y/h)$ — безразмерные переменные времени и пространства. Для безразмерных коэффициентов Соре и Дюфура используем обозначения $\hat{\alpha}_C = \alpha_C/(Ah)$ и $\hat{\alpha}_T = \alpha_T Ah$ соответственно. В резуль-

тате обезразмеривания получаем следующие параметры и критерии подобия:

$$\text{Gr} = \frac{g\beta_2 Ah^4}{\nu_2^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu_2}{\chi_2}, \quad \text{Ga} = \frac{gh^3}{\nu_2^2}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu_2}{D}, \quad \text{Ma} = \frac{\sigma_T Ah^2}{\nu_2^2 \rho_2}, \quad \text{E} = \frac{LD\rho_2}{\kappa_2 Ah}. \quad (7)$$

Здесь Gr, Pr, Ga, Sc, Ma — числа Грасгофа, Прандтля, Галилея, Шмидта и Марангони соответственно; E — параметр испарения.

Рассмотрим малые двумерные возмущения стационарного течения, описываемого решением (3):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) &= (U_j(\eta), V_j(\eta)) \exp[i(\alpha_x \xi - \lambda \tau)], \quad P_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) = P_j(\eta) \exp[i(\alpha_x \xi - \lambda \tau)], \\ \Theta_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) &= \Theta_j(\eta) \exp[i(\alpha_x \xi - \lambda \tau)], \quad S(\boldsymbol{\xi}, \tau) = S(\eta) \exp[i(\alpha_x \xi - \lambda \tau)]. \end{aligned}$$

Здесь α_x — безразмерный аналог волнового числа вдоль оси x ; $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный декремент. Будем считать, что поверхность раздела Γ остается недеформированной под действием возмущений.

В результате линеаризации уравнений (1), (2) и граничных условий вблизи стационарного решения (3) получаем задачу

$$\begin{aligned} -\hat{h} < \eta < 0: \quad & i\alpha_x U_1 + V_1' = 0, \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_1)U_1 + u_1' V_1 = -i\alpha_x \rho^{-1} P_1 + \nu(U_1'' - \alpha_x^2 U_1), \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_1)V_1 = -\rho^{-1} P_1' + \nu(V_1'' - \alpha_x^2 V_1) + \beta \text{Gr} \Theta_1, \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_1)\Theta_1 + U_1 T_{1\xi} + V_1 T_{1\eta} = \chi \text{Pr}^{-1} (\Theta_1'' - \alpha_x^2 \Theta_1), \\ 0 < \eta < 1: \quad & i\alpha_x U_2 + V_2' = 0, \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_2)U_2 + u_2' V_2 = -i\alpha_x P_2 + (U_2'' - \alpha_x^2 U_2), \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_2)V_2 = -P_2' + (V_2'' - \alpha_x^2 V_2) + \text{Gr} \Theta_2 + \gamma \text{Ga} S, \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_2)\Theta_2 + U_2 T_{2\xi} + V_2 T_{2\eta} = \text{Pr}^{-1} (\Theta_2'' - \alpha_x^2 \Theta_2 + \hat{\alpha}_C (S'' - \alpha_x^2 S)), \\ & (-i\lambda + i\alpha_x u_2)S + U_2 C_\xi + V_2 C_\eta = \text{Sc}^{-1} (S'' - (\alpha_x^2 + \alpha_z^2)S + \hat{\alpha}_T (\Theta_2'' - (\alpha_x^2 + \alpha_z^2)\Theta_2)), \\ \eta = -\hat{h}: \quad & U_1 = V_1 = \Theta_1 = 0, \\ \eta = 1: \quad & U_2 = V_2 = S' = 0, \quad \Theta_2 = 0 \quad \text{или} \quad \Theta_2' + \hat{\alpha}_C S' = 0, \\ \eta = 0: \quad & U_1 = U_2, \quad V_1 = V_2 = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \\ & U_2' - \nu \rho U_1' + i\alpha_x (V_2 - \nu \rho V_1) = \text{Ma} i\alpha_x \Theta_1, \\ & P_1 - P_2 = 2(\nu \rho V_1' - V_2'), \quad \kappa \Theta_1' - \Theta_2' - \hat{\alpha}_C S' = \text{E} (S' + \hat{\alpha}_T \Theta_2'), \end{aligned} \quad (8)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной η . Система (8) представляет собой обобщенную задачу о собственных значениях $\lambda G(\mathbf{V}, P, \Theta, S)^T = J(\mathbf{V}, P, \Theta, S)^T$ для декремента λ и вектора возмущений $(\mathbf{V}, P, \Theta, S)$, который является собственным вектором, соответствующим декременту λ . Здесь G — диагональная матрица; J — якобиан, определяющий правую часть линеаризованной задачи. Диагональные элементы матрицы G , соответствующие производным по времени компонент вектора (\mathbf{V}, Θ, S) , равны $-i$, в то время как элементы, соответствующие возмущению давления P , и элементы, связанные с граничными условиями, равны нулю. Поэтому $\det G = 0$ и возникающая обобщенная спектральная задача не может быть сведена к стандартной. Задача (8) решалась численно с помощью алгоритма Абрамова — Годунова [23], адаптированного для области с внутренней границей раздела.

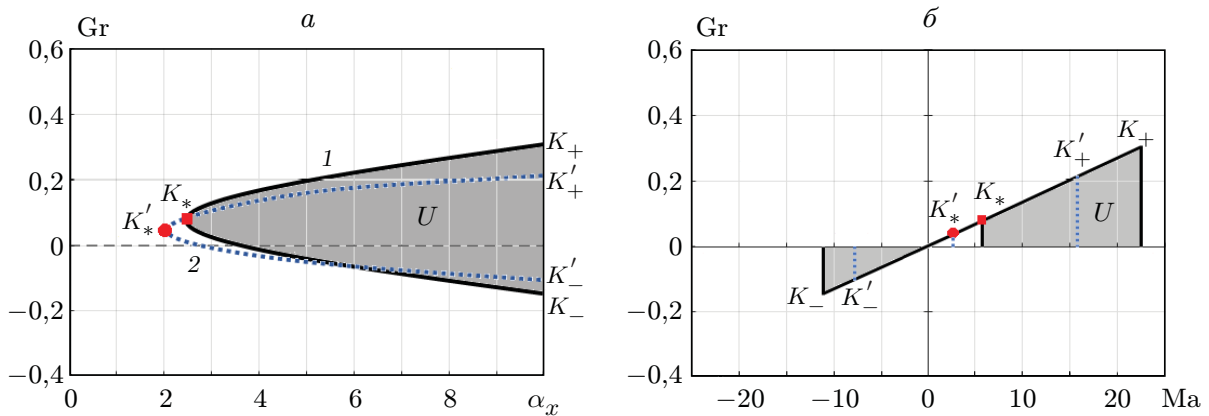


Рис. 6. Нейтральные кривые $Gr(\alpha_x)$ (а) и области неустойчивости на плоскости (Ma, Gr) (б) для системы сред этанол — воздух с $l = 3$ мм:

1 — линейный нагрев верхней стенки ($T_2(x, h) = A_{20} + T_{20}$), 2 — теплоизоляция верхней стенки ($T_{2y}(x, h) + \alpha_C C_y(x, h) = 0$)

3.2. Пороговые характеристики устойчивости и главные возмущения. Двухфазное течение, описываемое решением (3), является неустойчивым, если существует хотя бы одно собственное значение λ с положительной мнимой частью. Критические характеристики устойчивости определяются из условия $\lambda_i = 0$. При этом собственное число с максимальной мнимой частью и соответствующий собственный вектор являются главными. Вещественная часть λ_r определяет частоту осцилляций; если $\lambda_r = 0$, то возмущения являются монотонными. Фазовая скорость бегущих волн определяется по формуле $\omega_p = \lambda_r / \alpha_x$. Порог устойчивости определяется как набор параметров (7), при которых мнимая часть главного собственного значения пересекает ось абсцисс. Поскольку изучаются изменения характеристик конвективных режимов, индуцируемые сменой граничных условий для функции температуры, в качестве основных критериев подобия выбраны параметры Gr и Ma . Числа Грасгофа и Марангони соответствуют двум механизмам неустойчивости: конвективному и термокапиллярному. Таким образом, решение рассматриваемой спектральной задачи сводится к построению нейтральных кривых $Gr(\alpha_x)$, определению областей неустойчивости в плоскости параметров (Ma, Gr) и исследованию их эволюции в зависимости от граничного теплового режима на верхней стенке канала.

В результате численного решения спектральной задачи (8) построены нейтральные кривые (рис. 6, а). Области неустойчивости находятся справа от кривых 1, 2. Заштрихованная область U , ограниченная сплошной кривой $K_- K_* K_+$ (кривая 1) в рассматриваемом диапазоне значений волнового числа, соответствует значениям α_x и значениям температурного градиента A на межфазной поверхности, при которых течение в канале, на обеих стенках которого приложена линейная тепловая нагрузка, становится неустойчивым. Точка K_* , имеющая координаты $(\alpha_{x*}, Gr_*) = (2,48, 0,08)$, определяет критические характеристики устойчивости. Значение α_{x*} соответствует минимальному волновому числу для возмущения, приводящего к потере устойчивости, значение Gr_* — пороговое значение числа Грасгофа для этого возмущения. На рис. 6, а видно, что даже при малых Gr существуют возмущения, вызывающие неустойчивость основного течения.

Теплоизоляция верхней стенки приводит к незначительной дестабилизации системы в случае длинноволновых возмущений и оказывает стабилизирующее влияние при коротковолновых возмущениях. С ростом волнового числа область неустойчивости (ограничена кривой 2) сужается, т. е. диапазон значений числа Грасгофа Gr , а следовательно, и

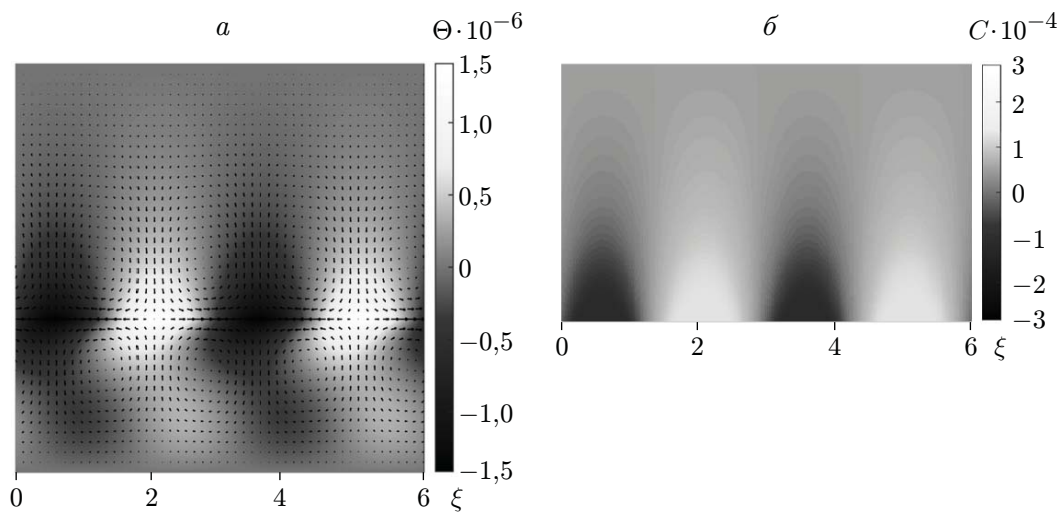


Рис. 7. Структура главных гидродинамических и температурных возмущений в двухслойной системе (а) и возмущений поля концентрации в газопаровом слое (б)

градиента A , при которых течение в канале с адиабатической верхней границей теряет устойчивость, уменьшается. В режиме 2 пороговые характеристики незначительно смещаются в длинноволновую область. Точка K'_* , определяющая критические характеристики устойчивости течения в канале с теплоизолированной верхней стенкой, имеет координаты $(\alpha'_{x*}, Gr'_*) = (2,02, 0,06)$. Стабилизирующее влияние граничного режима, описываемого условием Неймана, обусловлено однородностью поля температуры в вертикальном направлении в верхнем слое (см. рис. 2). В этом случае не возникают условия для конвективного перемешивания в газовой фазе, которое может дестабилизировать двухслойную систему при совместном действии конвективного и термокапиллярного механизмов.

На рис. 6,б представлены области неустойчивости в пространстве параметров (Ma, Gr) . Сплошные отрезки прямых, параллельных оси Gr , проходящие через точки K_- , K_* , K_+ , являются границами области неустойчивости в рассматриваемом диапазоне волновых чисел для режима 1, соответствующими указанным точкам на рис. 6,а. С использованием координат точек пересечения этих отрезков с осью абсцисс определяются критическое и граничные значения числа Марангони. Аналогичным образом определяется область неустойчивости для случая адиабатической верхней границы. На рис. 6,б видно, что существует область чисел Грасгофа и Марангони (ограничена участками прямых $Ma = K'_*$, $Ma = K_*$, осью абсцисс и сегментом K'_*K_* сплошной прямой, проходящей через точки K_- и K_+), при которых течение в канале с распределенным нагревом обеих стенок сохраняет устойчивость, в отличие от режима, который реализуется в канале с теплоизолированной верхней стенкой. Форма областей неустойчивости свидетельствует о стабилизирующем влиянии термокапиллярных сил: с увеличением значений температурного градиента $|A|$ в системе формируются режимы с устойчивой температурной стратификацией в нижнем слое (см. рис. 2,б,з и рис. 3,б,з) за счет действия эффекта Марангони. При этом энергии возмущений, возникающих в гравитационно неустойчивом газовом слое, недостаточно для дестабилизации всей системы.

В обоих режимах реализуется колебательная неустойчивость, которая проявляется в форме ячеистой конвекции. При этом температурные возмущения приводят к образованию тепловых структур, локализованных вблизи границы раздела жидкость — газ. Структура главных возмущений представлена на рис. 7. Форма возмущений поля концентрации определяется структурой тепловых возмущений: возникают чередующиеся “пятна” с по-

вышенной и пониженной концентрацией пара над “горячими” и “холодными” областями соответственно.

Смена граничного теплового режима не приводит к изменению структуры наиболее опасных возмущений, но вызывает увеличение фазовой скорости распространения главных возмущений в потоке жидкости $\omega_p = 0,042$ мм/с и $\omega'_p = 0,087$ мм/с при линейном нагреве обеих стенок и теплоизоляции верхней границы соответственно. Формирование поперечных волн, дрейфующих в испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, подтверждается данными экспериментов [24].

Развитие неустойчивости обусловлено действием термокапиллярного эффекта (см. рис. 6,б). Если вблизи межфазной поверхности возникает малое термическое возмущение, то вдоль Γ за счет действия сил Марангони происходит растекание жидкости от “горячего” пятна в область с меньшей температурой даже при малых значениях Gr и Ma (и, следовательно, при малых градиентах A). Соответственно, на границе раздела формируются зоны притока жидкости к “холодным” областям. В силу сплошности обеих сред газ поднимается над “холодными пятнами” и опускается над “горячими”. В жидкости восходящие и нисходящие потоки образуются под “горячими” и “холодными” участками соответственно (см. рис. 7,а).

4. Область применимости точного решения. Точное решение (3) интерпретируется как решение, описывающее двухслойные течения на рабочем участке конечной длины L_h достаточно длинного канала, поскольку функции температуры и концентрации пара неограниченно возрастают с ростом x . Учитывая пространственную локализацию фазовых переходов, можно утверждать, что это решение описывает конвекцию в локальной области в двухфазной системе с испарением диффузионного типа. Протяженность рабочего участка L_h может быть определена через входные данные задачи из условия $L_h = \min(L_h^C, L_h^T)$, где L_h^C, L_h^T — значения, полученные на основе анализа изменений функций C и T соответственно. Поскольку функция концентрации пара C трактуется как массовая доля испаряющегося компонента в газовой фазе, она имеет физический смысл, только если ее значения принадлежат отрезку $[0, 1]$. При этом считается, что верхний слой заполнен сухим газом (чистым паром), если $C = 0$ ($C = 1$). Еще одно ограничение диктуется областью применимости приближения Обербека — Буссинеска: перепады температуры и концентрации в системе должны оставаться умеренными, а именно, отклонения предельных значений T и C от равновесных значений T_0 и C_0 на рабочем участке должны быть в пределах 20–25 %. Выполнение этого условия обеспечивается соответствующим выбором предельных величин температурного градиента A и средних температур стенок T_{j0} . Для решения вида (3) справедливой оценки

$$L_h^C \leq \frac{1}{4\varepsilon|A|}, \quad L_h^T = \frac{1}{|A|} \left(1,25T_0 - \max_j (|T_{j0}|) \right).$$

Для рассматриваемой системы сред этанол — воздух получаем итоговую оценку $L_h \leq 0,5$ м.

Следует отметить, что решение (3) применимо только в условиях слабого испарения, т. е. в случае, если масса жидкости, испарившейся в единицу времени на рабочем участке длиной L_h , пренебрежимо мала по сравнению с расходом в жидкой фазе. В качестве соответствующего безразмерного критерия \mathcal{E} , малость которого означает выполнение этого

условия, можно использовать отношение $\mathcal{E} = R_l / |M^{\max}| L_h$, где $R_l = \int_{-l}^0 \rho_1 u_1^{\max}(y) dy$ — рас-

ход жидкости в нижнем слое; u_1^{\max} — максимальное значение скорости жидкости; M^{\max} — максимальное значение массового расхода испарившейся жидкости на рабочем участке

длиной L_h . С учетом полученной выше оценки L_h для рассматриваемой системы сред $\mathcal{E} \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$. Существует также другой способ определения критерия \mathcal{E} с использованием других безразмерных параметров: $\mathcal{E} = \text{Re}_l/E$. Здесь $\text{Re}_l = u_1^{\text{max}} l / \nu_1$ — число Рейнольдса в жидкости, характеризующее расход в жидкой фазе; E — параметр испарения, характеризующий относительную интенсивность диффузионных процессов, вызванных присутствием испаряемого компонента, и теплопроводности (вычисляется по формуле (7)). Для рассматриваемых конфигураций имеем $\mathcal{E} \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$. Таким образом, обе формулы для \mathcal{E} дают близкие значения этого критерия.

Заключение. На основе приближения Обербека — Буссинеска изучена задача о термокапиллярной конвекции в двухслойной системе жидкость — газопаровая смесь с учетом процессов испарения на поверхности раздела, а также эффектов термодиффузии. Исследования проведены на основе частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 3, представляющего собой обобщение решения Остроумова — Бириха. Анализ режимов течений, возникающих при различных типах температурных условий на верхней стенке плоского канала, выполнен для системы этанол — воздух для набора рабочих параметров, соответствующих условиям физического эксперимента. Исследованы изменения характеристик течений в системе и массовой скорости испарения, вызванные вариациями внешнего теплового напора. Установлено, что смена граничного теплового режима на верхней стенке канала приводит к изменению полей температуры в системе и концентрации пара в газовом слое. Проведено сравнение значений скорости испарения в системах со слоем жидкого теплоносителя различной толщины, полученных с использованием точного решения и измеренных в экспериментах. Используемое двумерное точное решение качественно предсказывает изменение скорости испарения, обусловленное вариациями поверхностного температурного градиента и толщины жидкого слоя. Решения, построенные в рамках постановок задач, учитывающих однородный характер испарения на межфазной поверхности, для обоих типов граничных тепловых режимов дают одинаковые значения скорости испарения. На основе сравнительного анализа показано, что решение задачи с условиями Дирихле для функции температуры на обеих внешних границах канала с учетом неоднородности испарения вдоль границы раздела достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Вследствие двумерности задачи решение дает заниженные по сравнению с экспериментальными значения средней скорости испарения. В рамках линейной теории исследована устойчивость точного решения. Независимо от типа граничного теплового режима на верхней стенке канала в системе реализуется колебательная неустойчивость в форме ячеистой конвекции. Теплоизоляция верхней стенки не приводит к изменению структуры наиболее опасных возмущений, вызывает незначительную дестабилизацию системы в случае длинноволновых возмущений и оказывает стабилизирующее влияние при коротковолновых возмущениях. Определены пороговые характеристики устойчивости и рассчитаны фазовые скорости распространения главных возмущений в потоке жидкости. В случае адиабатической верхней границы не возникает условий для конвективного перемешивания в газовой фазе, которое может дестабилизировать двухслойную систему при совместном действии конвективного и термокапиллярного механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, № 2. С. 219–260.
2. Kuo J. S., Chiu D. T. Controlling mass transport in microfluidic devices // Annual Rev. Anal. Chem. 2011. V. 4. P. 275–296.

3. **Kabov O. A., Kuznetsov V. V., Kabova Y. O.** Evaporation, dynamics and interface deformations in thin liquid films sheared by gas in a microchannel // Encyclopedia of two-phase heat transfer and flow II: Special topics and applications. V. 1. Special topics in boiling in microchannels, micro-evaporator cooling systems. Singapore: World Sci. Publ. Co, 2015. P. 57–108.
4. **Ларра М.** Thermal convection: patterns, evolution and stability. Chichester: Wiley, 2010.
5. **Андреев В. К., Бекежанова В. Б.** Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20.
6. **Nepomnyashchy A.** Interfacial convection in multilayer systems / A. Nepomnyashchy, I. Simanovskii, J. C. Legros. N. Y.: Springer-Verlag, 2011.
7. **Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.** Application of a partially invariant exact solution of the thermosolutal convection equations for studying the instability of an evaporative flow in a channel heated from above // Symmetry. 2023. V. 15. 1447.
8. **Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K.** Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile // J. Fluid Mech. 1964. V. 18, N 4. P. 513–528.
9. **Nguyen T. H., Prud'homme M.** Bifurcation of convection flows in a rectangular cavity subjected to uniform heat fluxes // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2001. V. 28, N 1. P. 23–30.
10. **Whitehead J. A.** Convection driven by temperature and composition flux with the same diffusivity // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2017. V. 111, N 4. P. 229–248.
11. **Tsitverblit N.** Mechanism of finite-amplitude double-component convection due to different boundary conditions // Phys. Lett. A. 2004. V. 329. P. 445–450.
12. **Palymskiy I. B., Fomin P. A., Li Y.-R., Wu Ch.-M.** Rayleigh — Benard convection in a gas-vapor medium at the temperature close to the critical temperature // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1382. 012200.
13. **Nepomnyashchy A. A., Simanovskii I. B.** Dynamics of non-isothermal ultra-thin two-layer films // Microgravity Sci. Technol. 2008. V. 20. P. 149–154.
14. **Шлиомис М. И., Якушин В. И.** Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Учен. зап. Перм. гос. ун-та. Сер. Гидродинамика. 1972. № 4. С. 129–140.
15. **Андреев В. К.** Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск, 2010. (Препр. / Ин-т вычисл. моделирования СО РАН; № 1-10).
16. **Lyulin Y., Kabov O. A.** Thermal effect in the evaporation process from the interface of the horizontal liquid layer under a shear gas flow // Interfacial Phenomena Heat Transfer. 2023. V. 11, N 1. P. 55–64.
17. **Люлин Ю. В., Кабов О. А., Кузнецов Г. В. и др.** Влияние протяженности межфазной поверхности на интенсивность испарения горизонтального слоя жидкости под действием потока газа // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 1. С. 121–125.
18. **Стабников В. Н.** Этиловый спирт / В. Н. Стабников, И. М. Ройтер, Т. Б. Процюк. М.: Пищевая пром-сть, 1976.
19. **De Groot S. R.** Non-equilibrium thermodynamics / S. R. De Groot, P. Mazur. L.: Dover, 1984.
20. **Гибхарт Б.** Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен: В 2 кн. Кн. 1. / Б. Гибхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. М.: Мир, 1991.
21. **Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.** Modeling of stratified two-phase flows with non-uniform evaporation based on the exact solution of convection equations // Math. Methods Appl. Sci. 2024. V. 47. P. 847–872.
22. **Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Люлин Ю. В.** Теоретическое и экспериментальное исследование течений с испарением на термокапиллярной границе раздела: особенности моделирования, анализ характеристик // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 3. С. 97–99.

23. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
24. **Kabov O. A., Zaitsev D. V., Cheverda V. V., Bar-Cohen A.** Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels // Experiment. Thermal Fluid Sci. 2011. V. 35, N 5. P. 825–831.

*Поступила в редакцию 22/II 2024 г.,
после доработки — 9/IV 2024 г.
Принята к публикации 27/IV 2024 г.*
