Переходя в (2.1) к τ, получим

$$s = \frac{(4k+1)(m+2)+m}{(4k+1)(m+1)} \frac{\eta_0}{A} \frac{n+1}{n-1} \sqrt{\tau}.$$

Поступила 13 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Неуважаев В. Е.** К теории турбулентного перемешивания.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 5.
2. **Анучина Н. Н., Кучеренко Ю. А. и др.** Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей.— МЖГ, 1978, № 6.
3. **Беленький С. З., Фрадкин Е. С.** Теория турбулентного перемешивания.— Труды ФИАН им. Лебедева, 1965, т. 29, с. 207.
4. **Андронов В. А., Бахрах С. М. и др.** Турбулентное перемешивание на контактной поверхности, ускоряемой ударными волнами.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, вып. 2(8).
5. **Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.** К теории турбулентного перемешивания границы раздела в поле тяжести.— ПМТФ, 1976, № 4.
6. **Колмогоров А. Н.** К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6.

УДК 533.6.011.55.011.6

К ТЕОРИИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА ПРОИЗВОЛЬНОГО УДЛИНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА

М. М. Кузнецов

(*Москва*)

Рассмотрим пространственное обтекание равномерным гиперзвуковым потоком наветренной стороны тонкого крыла, форма поверхности которого зависит от времени, под углом атаки $\alpha = \text{const}$. Будем считать, что течение в ударном слое сопровождается физико-химическими превращениями и имеет релаксационный характер. Примем, что толщина ударного слоя пропорциональна малому параметру ε, равному характерному значению отношения плотностей на фронте головной ударной волны, и воспользуемся для решения задачи методом тонкого ударного слоя [1].

1. Проанализируем сначала случай обтекания крыла малого удлинения, имеющего следующие характерные размеры: $b = O(\sqrt{\varepsilon})$, $c = O(\varepsilon)$, $L = 1$. Тогда, используя известные асимптотические представления параметров потока в виде рядов по ε и полную систему уравнений движения газа с физико-химическими превращениями [2], получим

$$dw/dt = 0,\ dv/dt = -(1/\rho_0)\partial p/\partial y; \tag{1.1}$$

$$d\rho_0/dt + \rho_0(\partial v/\partial y + \partial w/\partial z) = 0; \tag{1.2}$$

$$dq_n/dt = Q_n(p_0, T_0, q_m),\ m = 1, \ldots, N; \tag{1.3}$$

$$dh_0/dt = 0,\ \rho_0 = p_0\mu(q_m)/RT_0,\ d/dt = \partial/\partial t + \partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z, \tag{1.4}$$

где ρ_0, T_0, h_0, q_m — основные значения плотности, температуры, статической энтальпии и релаксационных параметров, пронормированные на соответствующие значения за скачком уплотнения; p_0 — основное («ньютоновское») значение давления, остальные обозначения те же, что и в [2, 3].

Граничные условия для системы уравнений (1.1)—(1.4) имеют вид на фронте ударной волны при $y = \Phi(x, z, t)$

$$w = -\Phi_z,\ v = \Phi_t + \Phi_x - \Phi_z^2 - 1,\ p = 2\Phi_x + 2\Phi_t - \Phi_z^2 - 1,\ \rho_0 = T_0 = h_0 = q_m = 1; \tag{1.5}$$

на поверхности тела при $y = F(x, z, t)$

$$v = F_x + F_t + wF_z. \tag{1.6}$$

Из уравнений (1.1), (1.2) следует

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_0^{-1} w_y\right) = 0. \tag{1.7}$$

Аналогичный результат для стационарных течений совершенного газа получен в [4].

Перейдем к новым переменным x, ψ, θ, t (для которых $d\psi/dt = d\theta/dt = 0$, $\partial(\psi, \theta)/\partial(y, z) \neq 0$) в уравнениях (1.1), (1.7), (1.3):

$$w_t + w_x = 0, \quad (\rho_0^{-1} w_y)_t + (\rho_0^{-1} w_y)_x = 0,$$

$$z_t + z_x = w, \; (q_n)_t + (q_n)_x = Q_n(p_0, T_0, q_m).$$

Интегрируя, получим

$$w = \varphi(\psi, \theta, \tau), \; \rho_0^{-1} w_y = \chi(\psi, \theta, \tau), \; \tau = x - t,$$

$$z = Z(\psi, \theta, \tau) + x\varphi(\psi, \theta, \tau), \; q_n = q_n(x - x_0),$$

$$\rho_0 = \rho_0(x - x_0), \; T_0 = T_0(x - x_0), \; x_0 = \xi(\psi, \theta, \tau).$$

Здесь φ, χ, Z, ξ — произвольные функции. Полагая без потери общности, как и в [5], $\varphi = \psi$, $Z = \theta$ и переходя к переменным x, ψ, z, t, найдем

$$\rho_0\chi(\psi, z - \psi x, \tau) = y_\psi, \; y_t + y_x + \psi y_z = v, \tag{1.8}$$

$$v_t + v_x + \psi v_z = -\rho_0^{-1}\psi_y p_\psi.$$

Интегрируя уравнения (1.8) и удовлетворяя граничным условиям (1.5), (1.6), получим общее решение краевой задачи (1.1)—(1.6) в виде

$$w = \psi, \quad y = F(x, z, t) + \int_\mu^\psi G(\psi_1, z - \psi_1 x, \tau)\,\rho_0^{-1}(x - x_0)\,d\psi_1, \tag{1.9}$$

$$v = F_t + F_x + \psi F_z + (\mu - \psi)\,\mu_z G(\mu, z - \mu x, \tau)\,\rho_0^{-1}(\mu, z - \mu x, \tau) +$$

$$+ \int_\mu^\psi \left[(\psi - \psi_1)\left(G\rho_0^{-1}\right)_{\theta_1} + G\rho_{0\zeta}^{-1}\right] d\psi_1,$$

$$p = 2\Phi_x + 2\Phi_t - \Phi_z^2 - 1 - \int_\nu^\psi (v_t + v_x + \psi v_z)\,G(\psi_1, z - \psi_1 x, \tau)\,d\psi_1.$$

Здесь $G = \chi^{-1}$; $\zeta = x - x_0$; причем на поверхности тела при $y = F(x, z, t)$ $\psi = \mu$, $\mu_t + \mu_x + \mu\mu_z = 0$; на поверхности ударной волны при $y = \Phi(x, z, t)$

$$\psi = \nu, \; \nu = -\Phi_z, \; x = x_0(\nu, z - \nu x, \tau),$$

$$(\nu_t + \nu_x + \nu\nu_z)G(\nu, z - \nu x, \tau) = 1$$

(последнее равенство следует из решения (1.10) для y и граничных условий (1.5) для v и ρ_0).

Форма головной ударной волны и функции $G(\psi, z - \psi x, \tau)$, $\xi(\psi, z - \psi x, \tau)$ находятся из следующей системы уравнений:

$$\Phi(x, z, t) = F(x, z, t) + \int_\mu^\nu G(\psi_1, z - \psi_1 x, \tau)\,\rho_0^{-1}(x - x_0)\,d\psi_1; \tag{1.10}$$

$$\nu = -\Phi_z, \; (\nu_t + \nu_x + \nu\nu_z)G(\nu, z - \nu x, \tau) = 1, \; \xi(\nu, z - \nu x, \tau) = x. \tag{1.11}$$

Для нерелаксирующих течений газа (при $\rho = \mathrm{const}$) формулы (1.9) переходят в решения, полученные в [3, 5].

Соотношения (1.9) остаются справедливыми и для неоднородного распределения релаксационных параметров в набегающем потоке, если заменить в них величину $\rho(x - x_0)$ на $\rho(\psi, x, z, t)$.

2. В решении (1.9)—(1.11) величина $G(\psi, \theta, \tau)$ играет роль некоторой функции Грина. Проанализируем ее структуру. Дифференцируя последнее из равенств (1.11) по переменным x, z, t и вычисляя определитель Δ системы линейных неоднородных уравнений

$$\begin{pmatrix} \nu_x - \nu - x\nu_x & -1 \\ \nu_z & 1 - x\nu_z & 0 \\ \nu_t & -x\nu_t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\nu \\ \xi_\vartheta \\ \xi_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

найдем

$$\xi_\nu - x\xi_\vartheta = \Delta^{-1} = (\nu_t + \nu_x + \nu\nu_z)^{-1}, \text{ где } \vartheta = z - \nu x.$$

Следовательно, на характеристическом многообразии (ψ, θ, τ) будем иметь

(2.1) $$G(\psi, \theta, \tau) = \partial x_0/\partial\psi - x_0\partial x_0/\partial\theta, \quad x_0 = \xi(\psi, \theta, \tau).$$

Выбор определенной зависимости $x_0 = \xi(\psi, \theta, \tau)$ в соотношениях (2.1), (1.9)—(1.11) эквивалентен решению обратной задачи обтекания крыла (когда по форме скачка определяется форма поверхности тела [6]). Действительно, пусть

$$x_0 = f(\lambda, \tau),$$

где $\lambda = \theta/\psi$, $\lambda^{(\nu)} = z/\nu - x$, $\lambda^{(\mu)} = z/\mu - x$, $\mu = \gamma(x, \tau)z$ (или $G(\mu, \theta^{(\mu)}, \tau) = 0$ [4]), $\gamma_x + \gamma^2 = 0$, $\theta^{(\mu)} = z - \mu x$. Тогда на основании (1.2) получим

(2.2) $$\Phi(x, z, \tau) = F(x, z, \tau) + \int\limits_{\lambda^{(\mu)}}^{\lambda^{(\nu)}} G(\lambda, x, \tau)\, d\lambda,$$

$$F(x, z, \tau) = \Gamma(x, \tau) - \frac{z^2}{2}[\lambda^{(\nu)}(x, \tau) + x]^{-1},$$

$$G(\lambda, x, \tau) = f_\lambda(\lambda, \tau)[\lambda + f(\lambda, \tau)] \frac{\rho_0 [x - f(\lambda, \tau)]}{\lambda + x},$$

$$\nu = \frac{z}{\lambda^{(\nu)}(x, \tau) + x}, \quad F = -\nu - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\lambda^{(\mu)}}^{\lambda^{(\nu)}} G(\lambda, x, \tau)\, d\lambda.$$

Здесь $\lambda^{(\nu)}(x, \tau)$, $\Gamma(x, \tau)$ — произвольные функции.

В соответствии с решением (2.2) толщина ударного слоя при $x = \text{const}$ зависит только от времени, причем при $f(\lambda, \tau) = b\lambda/(1 - \lambda)$, $\mu = b^{-1}z/x$, $b = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, $\Gamma = 0$ формулы (2.2) переходят в известное решение для стационарного конического течения [6].

3. Обтекание крыла конечного размаха в рамках теории тонкого ударного слоя содержит, как известно, три характерных случая, обычно рассматриваемых отдельно [7—10]:

$$\text{а) } \mu^0 \sim \varphi^0, \text{ б) } \mu^0 \ll \varphi^0, \text{ в) } \mu^0 \gg \varphi^0,$$

где μ^0 — угол конуса Маха в сжатом слое; φ^0 — угол при вершине крыла.

Заметим, что случай «а» является, вообще говоря, самым общим, поскольку асимптотические представления параметров потока, уравнения движения и граничные условия следуют из соответствующих выражений для случая «а» при совершении предельных переходов:

$$\text{б) } \partial/\partial z \to 0, \ w \to 0; \quad \text{в) } \partial/\partial x \to 0, \ u \to 0.$$

В связи с этим естественно ожидать, что общее аналитическое решение (1.9), полученное для случая «а», непрерывно переходит в соответствующие решения для случаев «б» и «в». Покажем это.

Перейдем в решении (1.9) к переменным χ, ω, τ_1:

(3.1) $$N = \psi = \nu(\chi, \omega, \tau_1), \quad \omega = z - (x - \chi)\nu(\chi, \omega, \tau_1),$$

$$\tau_1 = t - (x - \chi), \quad d\psi = \frac{\nu_{\tau_1} + \nu_\chi + \nu\nu_\omega}{1 + (x - \chi)\,\nu_\omega}\, d\chi;$$

(3.2) $$x - \chi = \frac{z - \omega}{\nu}, \quad d\psi = \frac{\nu_{\tau_1} + \nu_\chi + \nu\nu_\omega}{\nu\left[1 - (\nu_\chi + \nu_{\tau_1})\dfrac{z - \omega}{\nu^2}\right]}\, d\omega.$$

Здесь χ, ω — соответственно продольная и боковая координаты входа линии тока в ударный слой [4].

Переходя в общем решении к переменным интегрирования (3.1), (3.2), соответственно получим *

(3.3) $$y = F(x, z, t) + \int_{\chi_b}^{\chi} \rho_0^{-1}(x - x_0)\, J(x, x_0, \omega)\, dx_0,$$

$$p = p_s - \int_{\chi_b}^{\chi} (D_N v)\, J(x, x_0, \omega)\, dx_0;$$

(3.4) $$\Phi(x, z, t) = F(x, z, t) + \int_{\chi_b}^{\chi} \rho_0^{-1}(x - x_0)\, J(x, x_0, \omega)\, dx_0,$$

$$J(x, x_0, \omega) = 1 + (x - x_0)\, N_\omega(x_0, \omega, \tau_1)$$

или

(3.5) $$y = \Phi(x, z, t) - \int_{z}^{\omega} \rho_0^{-1}\left(\frac{z - z_0}{N}\right) I(x, \chi, z_0)\, dz_0,$$

$$p = p_s - \int_{z}^{\omega} (D_N v)\, I(x, \chi, z_0)\, dz_0;$$

(3.6) $$\Phi(x, z, t) = F(x, z, t) - \int_{z}^{\omega_b} \rho_0^{-1}\left(\frac{z - z_0}{N}\right) I(x, \chi, z_0)\, N^{-1} dz_0,$$

$$I(x, \chi, z_0) = \left[1 - (N_\chi + N_{\tau_1})\frac{z - z_0}{N^2}\right]^{-1};$$

причем

(3.7) $$z - \omega = (x - \chi) N(\chi, \omega, \tau_1), \quad \tau_1 = t - (x - \chi),$$

$$N(\chi, \omega, \tau_1) = -\Phi_z(\chi, z = \omega, \tau_1), \quad N_\omega = -\Phi_{zz}(\chi, z = \omega, \tau_1).$$

Здесь $(D_N v) = v_t + v_x + N v_z$; $v = y_t + y_x + N y_z$; p_s — величина давления на фронте ударной волны; выбор величин χ_b, ω_b зависит в общем случае от условий обтекания передней кромки крыла $z_0 = z_0(x)$ и толщины вихревого подслоя [10], где $p_z = O(1)$. Например, для скачка, присоединенного только в вершине крыла [7], будем иметь $\chi_b = 0$, $\omega_b = 0$; для скачка, присоединенного вдоль гладкой передней кромки,

$$z - \omega_b = (1/2)\left[\gamma - \beta + \sqrt{(\gamma + \beta)^2 - 4}\right](x - \chi_b) \quad [11],$$

$$\gamma = z_\chi(\chi_b), \quad \beta = F_z(\chi_b, \omega_b, \tau).$$

Решение систем уравнений (3.5), (3.7) или (3.6), (3.7) позволяет найти неизвестную форму ударной волны $y = \Phi(x, z, t)$. Эти уравнения более удобны для численного интегрирования прямой задачи, нежели уравнения (1.10), (1.11).

4. Решение прямой задачи обтекания крыла для случая «б» следует из системы уравнений (3.4), (3.5) при $\partial/\partial\omega \to 0$ и предельных соотноше-

* Формулы, аналогичные (3.3), (3.4), для стационарного случая были получены А. И. Голубинским и В. Н. Голубкиным.

ниях «б». В этом случае для параметров потока удается получить аналитические выражения в виде

$$v = F_x + F_t + \rho_0^{-1}(x - \chi_0) - \rho_0^{-1}(x - \chi), \tag{4.1}$$

$$p = p_b + (\chi_0 - \chi)\rho_{0x}^{-1}(x - \chi_0) + \rho_0^{-1}(x - \chi_0) - \rho_0^{-1}(x - \chi),$$

$$p_b = 2F_x + 2F_t + (x - \chi_0)(F_{tt} + 2F_{xt} + F_{xx}) + \left[(x - \chi_0)\rho_0^{-1}(x - \chi_0)\right]_x.$$

Здесь p_b — давление на поверхности крыла; $\chi_0(z)$ — уравнение проекции передней кромки крыла на плоскость xOz; вид функции $\rho_0(x - x_0)$ зависит от вида функций $q_m(x - x_0)$, удовлетворяющих выбранной системе релаксационных уравнений (1.3), причем

$$y = F(x, z_0, t) + \int_{\chi_0}^{\chi} \rho_0^{-1}(x - \xi)\, d\xi, \quad z = z_0 = \mathrm{const},$$

$$\Phi(x, z_0, t) = F(x, z_0, t) + \int_{\chi_0}^{\chi} \rho_0^{-1}(x - \xi)\, d\xi.$$

Формулы (4.1) при $\rho = \mathrm{const}$ совпадают с результатом [3].

Аналогично предыдущему, решение прямой задачи для случая «в» следует из системы уравнений (3.6) при $\partial/\partial\chi \to 0$ и предельных соотношениях «в»:

$$v = D_N(z_0)\Phi - \int_z^{z_0} D_N(z_0)\left(\frac{\rho_0^{-1}I}{N}\right) d\omega - N(z_0)\Phi_z^{-1}, \tag{4.2}$$

$$p = p_s - \int_z^{z_0} \left[D_N^2(\omega)\, y\right] I(\omega, z, \tau_1) N^{-1}(\omega, \tau_1)\, d\omega,$$

$$I(\omega, z, \tau_1) = \left[1 - N_{\tau_1} N^{-2}(z - \omega)\right]^{-1};$$

$$p_b = p_s - \int_z^{0} \left[D_N^2(\omega)\Phi - D_N(\omega)\int_z^{\omega} D_N(\omega)\left(\frac{\rho_0^{-1}I}{N}\right) d\omega_1 - D_N(\omega)\frac{N(\omega)}{\Phi_z}\right] d\omega. \tag{4.3}$$

Здесь $D_N(z_0)$, $\tau_1(z_0)$ — сокращенные (по числу аргументов) обозначения следующих величин:

$$D_N(z_0) = \frac{\partial}{\partial t} + N[z_0, \tau_1(z_0)]\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.4}$$

$$\tau_1(z_0) = t - (z - z_0) N^{-1}[z_0, \tau_1(z_0)],$$

$$y = \Phi(z, t) - \int_z^{z_0} \frac{\rho_0^{-1}[z_0 - \tau_1(z_0)]}{N[z_0, \tau_1(z_0)]} I(z_0, z, t)\, dz_0,$$

z_0 — координата входа линии тока на ударной волне.

Заметим, что в рассматриваемом предельном случае течение не зависит от x или χ и поэтому в принципе не следует из соотношений (3.4). Однако в силу наличия особенности у решения (4.4) в вихревом подслое формулы (4.2)—(4.4) справедливы лишь на части ударного слоя, где $p_z = O(\varepsilon)$. Для замыкания системы уравнений (4.2)—(4.4) необходимо аналогично [10] найти внутреннее решение в вихревом подслое и срастить его с внешним решением (4.2)—(4.4):

$$N[z_0 \to 0, \tau_1(z_0)] \to w(y_1 \to \infty), \quad y_1 = y/\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.5}$$

Соотношения (4.3), (4.5) образуют замкнутую систему уравнений для нахождения формы ударной волны $y = \Phi(x, z, t)$.

В стационарном случае и равновесном состоянии вихревого подслоя на плоской поверхности ($F = 0$) соотношения (4.3)—(4.5) приобретают более простой вид

$$p_b(z) = p_s(z) - \left[1 - N^{-2}(z)\right] N_z x(z) + N(z)\,\rho_{0z}^{-1} + \int_0^z N^{-1}(\omega)\,x(\omega)\,\rho_{0zz}^{-1} d\omega, \tag{4.6}$$

$$\left[N(z) + N^{-1}(z) + \int_0^z N^{-1}(\omega)\,\rho_{0z}^{-1} d\omega\right] = A(\ln N_b)_z.$$

Здесь $p_b(z) = -\frac{1}{2}(N_b^2 + 1)\,\rho_{ef}$; $\rho_{ef} = \rho_e/\rho_f$; $\sqrt{\varepsilon} \gg \Omega$* ($\Omega$ — параметр, введенный в [7], $\Omega \to 0$, $\varepsilon \to 0$); ρ_e, ρ_f — соответственно равновесное и замороженное значение плотности; $A = \text{const}$ (величина A определяется из граничных условий на кромке крыла [10]); $x(\omega) = \int_0^\omega N(z_0)\,dz_0$; индекс b относится к поверхности пластины. Соотношения (4.6) совпадают при $\rho = \text{const}$ с полученными ранее в [10]:

$$p_b = p_s - (1 - N^{-2})\,N_z \int_0^z N(\omega)\,d\omega, \tag{4.7}$$

$$N(z) + N^{-1}(z) = A(\ln N_b)_z, \quad p_b(z) = -\frac{1}{2}(N_b^2 + 1), \quad p_s = -1 - N^2.$$

Решение системы уравнений (4.7) сводится к решению одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с особой точкой (типа «седла») [10]. Поэтому получение окончательных выражений для параметров нестационарного релаксирующего потока, обтекающего перпендикулярно установленное крыло, оказывается значительно более трудоемким, чем в случае «б».

Автор благодарит В. Я. Нейланда за внимание к работе.

Поступила 28 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черный Г. Г.** Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Лунев В. В.** Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975.
3. **Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. Л.** Нестационарное обтекание тонкого крыла конечного размаха гиперзвуковым потоком газа.— ДАН СССР, 1978, т. 240, № 5.
4. **Голубинский А. И., Голубкин В. Н.** К теории пространственного обтекания тела гиперзвуковым потоком.— ДАН СССР, 1981, т. 258, № 1.
5. **Голубинский А. И., Голубкин В. Н.** О пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа.— ДАН СССР, 1977, т. 234, № 5.
6. **Голубинский А. И.** Обтекание гиперзвуковым потоком треугольных крыльев определенного класса, установленных под углом атаки с присоединенным скачком уплотнения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5.
7. **Меситтер А. Ф.** Подъемная сила тонких треугольных крыльев по ньютоновской теории.— Ракетн. техника и космонавтика, 1963, № 4.
8. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения. М.: Наука, 1970.
9. **Гонор А. Л.** Обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком.— Изв. АН СССР. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
10. **Коул Ж., Брайнерд Ж.** Обтекание тонких крыльев гиперзвуковыми потоками при больших углах атаки.— В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1964.
11. **Голубкин В. Н.** К теории крыла малого удлинения в гиперзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.

---

* Случаи $\sqrt{\varepsilon} \sim \Omega$, $\sqrt{\varepsilon} \ll \Omega$ требуют отдельного рассмотрения, но случаю «в» соответствует только $\sqrt{\varepsilon} \gg \Omega$, $\varepsilon \to 0$, $\Omega \to 0$.