ПМТФ, № 1, 1967

# ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко*

*(Новосибирск)*

Эффект трансформации волн в слабонеоднородной среде заключается в следующем. Пусть в среде возможны два типа связанных колебаний $h_1$, $h_2$, описываемых, скажем, уравнениями

$$\frac{d^2h_1}{dx^2} + k_1^2(x)\,h_1 = \alpha(x)\,h_2, \qquad \frac{d^2h_2}{dx^2} + k_2^2(x)\,h_2 = \alpha(x)\,h_1 \tag{1}$$

Здесь $x$ — параметр неоднородности. В однородном случае можно перейти к нормальным колебаниям $H_{1,2}$

$$\frac{d^2H_{1,2}}{dx^2} + q_{1,2}^2 H_{1,2} = 0$$

где волновые вектора $q_{1,2}$ нормальных колебаний определяются из уравнений

$$q_{1,2}^2 = {}^1/_2\,(k_1^2 + k_2^2) \pm \sqrt{{}^1/_4\,(k_1^2 - k_2^2)^2 + \alpha^2} \tag{2}$$

В слабонеоднородном случае, когда $k_{1,2}$, $\alpha$ — «медленные» функции координаты

$$\frac{d}{dx}(\ln q_{1,2}) \ll q_{1,2} \tag{3}$$

приближенными решениями (1) будут «квазинормальные» колебания

$$H_{1,2}^{\pm} \approx \frac{1}{\sqrt{q_{1,2}}}\exp\left\{\pm i\int^{x} q_{1,2}(x')\,dx'\right\} \tag{4}$$

где $q_{1,2}$ по-прежнему определены уравнением (2).

В определенных областях и, в частности, в окрестностях точек, где $q_1 = q_2$, решения типа (4) становятся несправедливыми. При прохождении такого рода резонансных областей амплитуды квазинормальных колебаний скачкообразно меняются по сравнению с начальными (явление Стокса), и происходит как бы перераспределение энергии между квазинормальными колебаниями. Термин «трансформация волн» будет использован именно для описанного явления, а точки резонансов, в которых $q_1 = q_2$, будут называться точками трансформации. Явление трансформации волн в слабонеоднородной среде достаточно хорошо изучено в связи с различными астрофизическими вопросами [1-3] и вопросами нагрева плазмы [4-6]. Формальной основой для вычисления коэффициентов трансформации может служить для системы (1) развитый Штукельбергом метод [7] сшивки асимптотических решений (4) при переходе через окрестность точки трансформации.

При прохождении волн через достаточно большие объемы плазмы число точек трансформации может быть большим. Естественно считать их распределение хаотическим и заданным в виде некоторой случайной функции координаты. Возникает вопрос об описании кинетики волн в среде со случайно расположенными точками трансформации. Формально задача аналогична системе связанных осцилляторов, проходящих через резонансы в случайные моменты времени. Ниже развивается метод решения подобного рода задач.

Начнем с рассмотрения единичного акта трансформации. Пусть для некоторых значений $x$ слева от области трансформации решение уравнения (1) представлено в виде

$$H = A_1 H_1^+ + A_2 H_2^+$$

Справа от области трансформации решение имеет вид

$$H = A_1^* H_1^+ + A_2^* H_2^+$$

Здесь связь между $(A_1^*, A_2^*)$ и $(A_1, A_2)$ определяется уравнением [8]

$$\begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ie^{i\varphi}\cos a & \sin a \\ \sin a & ie^{-i\varphi}\cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\sin a = e^{-\delta}, \quad \delta = \frac{1}{2}\left| \oint (q_1 - q_2)\, dx \right|$$

Здесь интеграл в $\delta$ берется по контуру, охватывающему две комплексно сопряженные точки трансформации; $\varphi$ — известная фаза, которая в дальнейшем окажется не существенной. Каждый акт трансформации можно рассматривать как «столкновение» волн, а матрицу перехода от $(A_1, A_2)$ к $(A_1^*, A_2^*)$ — как оператор столкновения.

Матрица перехода между последовательными столкновениями имеет вид

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} ie^{i\varphi + iS_1}\cos a & e^{iS_2}\sin a \\ e^{iS_1}\sin a & ie^{-i\varphi + iS_2}\cos a \end{pmatrix}, \quad S_1 = \int q_1(x')\, dx', \quad S_2 = \int q_2(x')\, dx' \tag{6}$$

Здесь интегралы в $S_{1,2}$ берутся между двумя ближайшими точками трансформации. Для того чтобы избежать возможности перекрытия областей трасформации, ограничимся случаем достаточно редких столкновений и потребуем

$$lq_{1,2} \gg 1 \tag{7}$$

где $l$ — среднее расстояние между точками трансформации. Неравенство (7) приводит, в частности, к тому, что фазовые набеги $S_1$, $S_2$ в (6) велики, и можно пренебречь фазой $\varphi$.

Предположим теперь, что в некоторой начальной точке $x_0$ задан вектор $\boldsymbol{A}_0$ с компонентами $(A_1^{(0)}, A_2^{(0)})$ и на отрезке пути до $x$ волна испытывает $n$ столкновений (проходит $n$ точек трансформации). Тогда в точках $x$ вектор $\boldsymbol{A}_n$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{A}_n(x) = \boldsymbol{M}_n \boldsymbol{M}_{n-1} \cdots \boldsymbol{M}_1 \mathbf{A}_0(x_0)$$

Здесь $\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{M}_k(x_{k-1}, x_k)$ и определяется формулой (6), в которой точкой трансформации будет $x_k$, все параметры зависят от номера $k$, а интегралы в $S_{1,2}^{(k)}$ вычисляются на дуге между $x_{k-1}$ и $x_k$. Задача заключается в определении среднего значения $\langle \boldsymbol{A}(x) \rangle$, усредненного по всем возможным вариантам размещения точек трансформации на $(x_0, x)$. Будем считать распределение последних пуассоновским, а величину $a$ пока постоянной (ограничение на $a$ будет снято ниже). Это означает, что вероятность появления точки трансформации в элементе $dx$ равна $l^{-1}dx$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dU}{dx} = iq_1 U - i\sum_k \delta(x - x_k)\left(aV - \frac{\pi}{2}U\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = iq_2 V - i\sum_k \delta(x - x_k)\left(aU - \frac{\pi}{2}V\right) \tag{8}$$

где $x_k$ точки трансформации. Нетрудно убедиться, что матрица перехода решений системы (8) между двумя последовательными точками трансформации тождественна с (6), если положить

$$U = \sqrt{q_1} H_1, \qquad V = \sqrt{q_2} H_2 \tag{9}$$

Из (9) следует, что квадраты амплитуд $U$, $V$ совпадают с действиями соответственно $H_1$- и $H_2$-колебаний, и задачу об усреднении решений системы (1) можно заменить эквивалентной задачей об усреднении решений системы (8).

Введем функцию распределения $f(x, U_1, U_2, V_1, V_2)$, где

$$U_1 = \mathrm{Re}U, \qquad U_2 = \mathrm{Im}\, U, \qquad V_1 = \mathrm{Re}V, \qquad V_2 = \mathrm{Im}\, V$$

$$\int f\, dU_1\, dU_2\, dV_1\, dV_2 = 1$$

Кинетическое уравнение для $f$ можно получить обычным образом (см., например, [9])

$$\frac{\partial f}{\partial x} - q_1 U_2 \frac{\partial f}{\partial U_1} + q_1 U_1 \frac{\partial f}{\partial U_2} - q_2 V_2 \frac{\partial f}{\partial V_1} + q_2 V_1 \frac{\partial f}{\partial V_2} = S^* \{f\} \tag{10}$$

где столкновительный член имеет вид

$$S^* \{f\} = \frac{1}{l} [f(x, U_1^*, U_2^*, V_1^*, V_2^*) - f], \qquad f = f(x, U_1, U_2, V_1, V_2) \tag{11}$$

Координаты $U_{1,2}^*$, $V_{1,2}^*$ определяются из условия, что в результате столкновения они принимают значения $U_{1,2}$, $V_{1,2}$. Уравнения (10), (11) имеют вид обычного уравнения Колмогорова — Феллера для разрывного случайного процесса. Из системы (8), или из (5) и (9), имеем

$$\begin{aligned} U_1^* &= U_2 \cos a + V_1 \sin a, \qquad & U_2^* &= -U_1 \cos a + V_2 \sin a \\ V_1^* &= U_1 \sin a + V_2 \cos a, \qquad & V_2^* &= U_2 \sin a - V_1 \cos a \end{aligned} \tag{12}$$

Преобразования (12) так же, как и (5), (6), сохраняют инвариантной величину

$$I = |U|^2 + |V|^2 = q_1 |H_1|^2 + q_2 |H_2|^2 \tag{13}$$

имеющую смысл полного действия системы двух колебаний. Действие столкновений заключается в перераспределении адиабатических инвариантов каждого из колебаний.

Уравнения (10), (11) позволяют вычислить любой момент функции распределения $f$. Физический интерес представляет вычисление средних значений адиабатических инвариантов каждого из типов колебаний, т. е., согласно (13), средних $\langle |U|^2 \rangle$, $\langle |V|^2 \rangle$. Умножая (10) последовательно на $U_1^2, U_2^2, U_1 U_2, V_1^2 \ldots$ и интегрируя по всему фазовому пространству, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\langle I_1 \rangle}{dx} &= -\frac{\sin^2 a}{l} \langle I_1 \rangle + \frac{\sin^2 a}{l} \langle I_2 \rangle + \frac{\sin 2a}{l} \langle I_{21} \rangle \\ \frac{d\langle I_2 \rangle}{dx} &= \frac{\sin^2 a}{l} \langle I_1 \rangle - \frac{\sin^2 a}{l} \langle I_2 \rangle - \frac{\sin 2a}{l} \langle I_{21} \rangle \\ \frac{d\langle I_{12} \rangle}{dx} &= (q_2 - q_1) \langle I_{21} \rangle \\ \frac{d\langle I_{21} \rangle}{dx} &= -(q_2 - q_1) \langle I_{12} \rangle - \frac{\sin 2a}{2l} \langle I_1 \rangle + \frac{\sin 2a}{2l} \langle I_2 \rangle - 2\frac{\sin^2 a}{l} \langle I_{21} \rangle \end{aligned} \tag{14}$$

$$I_1 = U_1^2 + U_2^2, \qquad I_2 = V_1^2 + V_2^2, \qquad I_{12} = U_1 V_1 + U_2 V_2 = \mathrm{Re}\, U\overline{V}$$

$$I_{21} = U_1 V_2 - U_2 V_1 = -\mathrm{Im} U\overline{V}$$

Из (14) и (13) находим стационарное решение

$$\langle I_1\rangle = \langle I_2\rangle = {}^1/_2 I, \qquad \langle I_{12}\rangle = \langle I_{21}\rangle = 0 \tag{15}$$

Результат (15), в частности, означает, что если на границе плазмы было возбуждено только колебание с заданным значением $I$, то по прохождении достаточно широкого слоя второе колебание значительно «нагревается».

Перейдем теперь к описанию процесса приближения к равновесию. Решение системы (14) отыскиваем в виде $\sim e^{\varkappa x}$. Уравнение для $\varkappa$

$$\varkappa^3 + 4\frac{\sin^2 a}{l}\varkappa^2 + \left[4\frac{\sin^2 a}{l^2} + (q_1 - q_2)^2\right]\varkappa + 2(q_1 - q_2)^2\frac{\sin^2 a}{l} = 0 \tag{16}$$

Из трех корней уравнения (16) — один отрицательный и два комплексно сопряженных с отрицательной действительной частью.

Длина релаксации определяется корнем $\varkappa_0$, для которого $|\,\mathrm{Re}\,\varkappa_0\,|$ — минимально. Выпишем значения $\varkappa_0$ для некоторых предельных случаев

$$\begin{aligned} &\varkappa_0 \approx -{}^1/l_0, \qquad l_0\,|\,q_1 - q_2\,| \gg 1, \qquad l_0 = l/4\sin^2 a \\ &\varkappa_0 \approx -{}^1/_2(q_1 - q_2)^2 l_0; \qquad l_0\,|\,q_1 - q_2\,| \ll 1 \end{aligned} \tag{17}$$

Второй случай ввиду условия редких столкновений (7) может осуществляться лишь при достаточно малых значениях $(q_1 - q_2)$.

Если теперь параметр столкновения $a$ считать случайным с функцией распределения $w(a)$

$$\int w(a)\,da = 1$$

то в уравнении (10) столкновительный член $S^*\{f\}$ заменяется на

$$\langle\langle S^*\{f\}\rangle\rangle = \int w(a)\,S^*\{f(a)\}\,da$$

Соответственно в уравнении (16) следует заменить $\sin^2 a$ на

$$\langle\langle \sin^2 a\rangle\rangle = \int w(a)\sin^2 a\,da$$

В заключение сделаем два замечания. Первое связано с тем, что рассматривались только точки трансформации $q_1 = q_2$. Существуют и другие особенности решений (4),— например, в точках, где $q_{1,2} = 0$. Как показано в [10], последние приводят к общему росту в среднем адиабатического инварианта $I$ всей системы. Рассмотрение, проведенное выше, естественно предполагает, что эффекты, связанные с трансформацией типа (5), будут основными. Второе замечание связано с возможностью простого обобщения изложенного метода для произвольного числа связанных колебаний.

Поступило 24 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В. В., Злотник Е. А. О переходе плазменных волн в электромагнитные в неоднородной изотропной плазме. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1962, 5.
2. Железняков В. В. Радиоизлучение солнца и планет. Изд-во «Наука», 1964.
3. Денисов Н. Г. К теории распространения радиоволн в ионосфере. Тр. ФТИ ГГУ. Сер. физ., 1957, т. 35.
4. Моисеев С. С., Смилянский В. Р. К вопросу о трансформации волн в магнитной гидродинамике. Магнитная гидродинамика, 1965, № 2.
5. Моисеев С. С. Об одной возможности аномальной трансформации волн в плазме. ПМТФ, 1966, № 3.
6. Stix T. H. Radiation and absorption via mode conversion in an inhomogeneous collision-free plasma. Phys. Rev. Letters, 1965, vol. 15, p. 878.
7. Stueckelberg A. C. Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen. Helv. Phys. Acta, 1932, vol. 5, p. 369.
8. Заславский Г. М., Моисеев С. С. Связанные осцилляторы в адиабатическом приближении. Докл. АН СССР, 1964, т. 161, № 2.
9. Leibowitz M. A. Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, r. 852.
10. Заславский Г. М. О кинетическом уравнении для осциллятора в случайном внешнем поле. ПМТФ, 1966, No. 6.