УДК 532.5, 516.13

Моделирование пульсирующего течения в трубе с локальным сужением в приложении к гемодинамике кровеносных сосудов^{*}

А.Б. Мазо¹, Е.И. Калинин¹, В.М. Молочников^{2,3}, О.А. Душина²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

²Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ Казанский научный центр РАН, Казань

³Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ), Казань

E-mail: vmolochnikov@mail.ru

Проведено численное исследование осциллирующего течения вязкой несжимаемой жидкости в жесткой круглой трубе с локальным сужением. Параметры вязкости и плотности жидкости, диаметр канала и его сужение, а также амплитудно-частотные характеристики расхода жидкости соответствуют течению крови в подколенной артерии человека при стенозе. Число Рейнольдса в области стеноза $\text{Re} \approx 5 \cdot 10^3$, безразмерная частота пульсаций $\text{Sh} = 0,43 \cdot 10^{-3}$, относительное сужение канала $\delta = d/D = 0,4$. Особенность течения состоит в том, что за один период осцилляций расход жидкости четыре раза меняет направление. Это способствует ламинарнотурбулентному переходу при внедрении струи из горловины сужения в основной поток. Установлены качественные особенности и количественные параметры пульсирующего течения, в том числе распределение по стенке канала напряжений трения.

Ключевые слова: кровеносный сосуд со стенозом, пульсирующий поток, ламинарно-турбулентный переход, прямое численное моделирование.

Введение

Движение жидкости в трубах со значительным локальным сужением встречается во многих инженерных устройствах, например, в каналах теплообменного оборудования. Для интенсификации теплоотдачи на стенках таких каналов располагают поперечные выступы (см., например, [1-3]), что приводит к локальным сужениям поперечного сечения. Обычно в трубчатых теплообменниках течение является стационарным. Пульсирующие вязкие течения в каналах переменного течения характерны для гемодинамики биологических объектов в патологических состояниях. Распространенным случаем такой патологии является атеросклероз, который представляет собой сужение кровеносных сосудов (стеноз) из-за образования множественных бляшек и накопления жировых материалов, утолщения и уплотнения стенок сосудов [4-6]. При стенозе характер

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 20-61-47068.

[©] Мазо А.Б., Калинин Е.И., Молочников В.М., Душина О.А., 2022

кровотока в сосуде существенно меняется. Эти изменения зависят от степени стеноза и параметров пульсирующего кровотока.

Последние два десятилетия наблюдается значительный рост интереса к численному моделированию гемодинамики сердечно-сосудистой системы человека, которое стало использоваться для изучения физиологии и прогнозирования течения ее заболеваний. Развитие методов расчета течения через локальные сужения, моделирующие стеноз сосудов, начиналось с наиболее простых случаев стационарного внешнего потока [7-12]. В большинстве случаев цель подобных исследований заключалась в проверке адекватности различных подходов к численному моделированию движения крови в сосудах. Так, в работе [7] было выполнено сопоставление результатов расчета течения в канале с сужением при использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) и метода моделирования крупных вихрей (LES), проверена способность различных моделей турбулентности прогнозировать поле потока и интенсивность осаждения частиц в области сужения. Задача выбора методов моделирования в приложении к гемодинамике сердечно-сосудистой системы решалась и в работе [8]. Была предпринята попытка создания эффективного варианта метода LES, не уступающего по точности методу прямого численного моделирования (DNS), а по быстродействию — методу RANS. Влияние геометрии стеноза и кривизны артерии на структуру течения за областью стеноза в стационарной постановке изучалась при помощи DNS в работе [9]. Авторами [10] на основе решения уравнений Навье-Стокса оценивались потери давления при стенозе и сдвиговые напряжения на стенке в прямой и изогнутой артериях. Влияние слабой закрутки потока на стационарное течение в модели кровеносного сосуда с асимметричным стенозом исследовалось в работе [11] экспериментально и численно. Было показано, что в расчетах модель ламинарного течения хорошо работает при Re < 300, а при более высоких значениях числа Рейнольдса предпочтительнее использование метода RANS с *k*-*ω* SST-моделью турбулентности.

Особое внимание при исследовании течения в стенозированных сосудах занимают вопросы ламинарно-турбулентного перехода. Течение в здоровых артериях является, как правило, ламинарным. Формирование атеросклеротических изменений приводит к появлению неустойчивости и турбулизации потока за стенозом, что влечет за собой увеличение сдвиговых напряжений на стенке, нарушение кровотока и в ряде случаев образование вторичных областей сужения. По этой причине важно не только уметь прогнозировать положение области перехода к турбулентности за стенозом, но и определять связь переходных процессов с гемодинамическими параметрами и геометрией стеноза. В работе [12] был предложен новый зонный подход к моделированию ламинарной, турбулентной, переходной или комбинированной областей течения после стеноза в зависимости от числа Рейнольдса и параметра сужения. Расчеты выполнялись в пакете FLUENT в стационарной постановке. Рассматривался 50 и 75 %-ый стеноз, диапазон изменения числа Рейнольдса составлял 500 – 2000. В работе [13] проводилось численное моделирование стационарного течения в модели кровеносного сосуда с односторонним 70 %-ым стенозом с использованием метода крупных вихрей LES и динамической модели Германо-Лилли для подсеточной турбулентности. Было установлено, что непосредственно за стенозом формируется зона струйного течения и рециркуляционная область. Потеря устойчивости слоя смешения на границе этих областей инициирует переход к турбулентности, однако вниз по потоку от сужения течение реламинаризируется.

Цель исследований, предпринятых авторами [14], заключалась в определении влияния реологических свойств жидкости на критическое число Рейнольдса перехода к турбулентности при стационарном течении через асимметричное локальное сужение в круглой трубе. На основе метода DNS, выполненного при Re = 500 – 1000, было показано, что для псевдопластичной жидкости ламинарно-турбулентный переход происходит при более высоких значения числа Рейнольдса, чем в ньютоновской жидкости. При этом сам процесс перехода, эволюция возмущений и структура течения в турбулентном режиме потока остаются схожими для обеих реологий.

Известен ряд исследований пульсирующего течения в области локального сужения, выполненных применительно к осциллирующему потоку при нулевой средней за период скорости течения. В работе [15] предпринималась попытка получения аналитического решения задачи течения в осесимметричном канале с локальным сужением при числах Рейнольдса Re = 10, 100, 500, 1000. Было установлено влияние амплитуды пульсаций и геометрии сужения на распределение осевой и радиальной компонент скорости, давления и напряжение сдвига на стенке. В работе [16] было выполнено моделирование осциллирующего потока в рамках физиологических условий кровотока в артериях для широкого диапазона изменения числа Уомерсли Wo ~ Re^{0,5}. Цель работы заключалась в создании эффективной двумерной вычислительной модели с использованием метода погруженных границ. Основное внимание уделялось анализу закономерностей эволюции профилей скорости в сечениях перед сужением, в его центре и после сужения в зависимости от числа Wo и фазы колебаний расхода.

В подавляющем большинстве публикаций приводятся результаты исследований пульсирующего потока при отличной от нуля средней за период скорости, полученные в отсутствие реверсивного течения. В экспериментальной работе [17] для одновременной регистрации профилей скорости пульсирующего потока в трех сечениях за локальным симметричным и асимметричным сужением в трубе использовался метод фотохромного индикатора с расщепленным лучом. Число Рейнольдса среднего потока составляло 575. Здесь же на основе наблюдения за эволюцией профилей скорости представлено описание процесса ламинарно-турбулентного перехода за сужением, пространственного и временного изменения напряжения сдвига на стенке, в том числе в области присоединения потока. Экспериментальные данные о структуре течения за сужением канала, моделирующим стеноз с уменьшением плошали его сечения на 25, 50 и 75 %. были получены с использованием двухкомпонентного лазерного доплеровского измерителя скорости LDV в работе [18]. Гармонические пульсации потока создавались программируемым насосом, управляемым генератором сигналов. Число Уомерсли в экспериментах составляло 7,5, а мгновенное значение числа Рейнольдса изменялось от 200 до 1000. Автором были получены и описаны различные типы возмущений, возникаюших за сужением, и их эволюция за период вынужденных колебаний потока. Было предложено использовать информацию о нарушениях нормального кровотока за стенозом в качестве средства раннего выявления сердечно-сосудистых заболеваний. В работе [19] проводилось численное исследование нестационарного трехмерного течения в модели пространственно изогнутой стенозированной сонной артерии. Изменение средней по сечению сосуда скорости потока было получено на основе клинических измерений кровотока у здоровых добровольцев. Данные этих измерений показали отсутствие реверса расхода за период сердечных сокращений. В результате расчетов было выявлено отличие структуры закрученного потока в здоровой артерии и в артерии со стенозом, а также проанализирована эволюция пространственного положения областей наибольших и наименьших значений сдвиговых напряжений на стенке артерии за стенозом при изменении степени перекрытия артерии.

Экспериментальное и численное (DNS) исследование ламинарно-турбулентного перехода в пульсирующем течении через плоское 50 %-ое сужение при Re = 600 и 1200 выполнялось в работе [20]. Эксперимент использовался главным образом для валидации численной процедуры. Авторами были показаны развитие двух- и трехмерной неустойчивости сдвигового слоя за сужением и эволюция вихревых структур ниже точки присоединения потока. Было проанализировано распространение турбулентного фронта

и динамики сдвигового слоя в различных фазах изменения расхода, а также показаны положения области генерации кинетической энергии турбулентности в зависимости от числа Рейнольдса и проанализированы механизмы турбулизации потока.

В работе [21] для моделирования пульсирующего кровотока в стенозированных коронарных артериях использовалась форма осциллограммы расхода, близкая к физиологическим закономерностям ее изменения за период сердечных сокращений. Здесь исследовалось влияние степени асимметрии стеноза, а также различных условий работы сердца на структуру потока и гемодинамические параметры, включая падение давления и напряжение трения на стенке за сужением. Идентификация положения области ламинарно-турбулентного перехода за сужением выполнялась по уровню средневзвешенной по площади сосуда турбулентной кинетической энергии потока после стеноза. Было показано существование высокого риска образования вторичного стеноза на расстоянии примерно 10 диаметров артерии за стенозом из-за наличия зон рециркуляции и низких напряжений сдвига на стенке.

В работе [22] пульсирующее течение в прямоугольном канале с односторонним полукруглым сужением исследовалось численно методами DNS и LES. В расчетах число Рейнольдса, вычисленное по максимальной среднеобъемной скорости потока, варьировалось в диапазоне от 750 до 2000, а безразмерная частота пульсаций (число Струхаля Sh) составляла 0,024. В исследовании [23] перед сужением задавался физиологический пульсирующий ламинарный профиль скорости, полученный из аналитического решения уравнения Навье-Стокса. Особенностью этого решения являлось наличие возвратного течения в узкой пристеночной области на части периода пульсаций, при этом скорость на оси канала не принимала отрицательных значений. Было показано, что течение за сужением определяется эволюцией двух сдвиговых слоев, один из которых формируется за кромкой сужения, второй — при отрыве потока на противоположной стенке за сужением. Турбулизация потока наблюдалась при Re >1000 ниже области присоединения потока за сужением. Было получено, что с повторным присоединением связаны большая амплитуда колебания давления на стенке и напряжения сдвига стенки. Также была определена характерная частота колебаний скорости, связанная с периодическим образованием вихревых структур в сдвиговых слоях, и описано влияние этой частоты на динамику потока.

Аналогичная задача, но уже для симметричного локального сужения в плоском канале, решалась численно с помощью метода DNS в работе [24]. Условия на входе задавались аналогично [22, 23]. В расчетах число Рейнольдса варьировалось от 500 до 2000, а число Уомерсли составляло 10,5. Авторы проанализировали эволюцию полей скорости потока, профилей статистических характеристик течения, энергетические спектры пульсаций скорости в постстенотической области. Были получены распределения давления, безразмерной по времени и средней по размаху турбулентной кинетической энергии и напряжения трения на стенке за областью сужения. Также было показано, что непосредственно за областью сужения происходит турбулизация потока, а ниже точки присоединения поток вновь становится ламинарным.

Подобные рассмотренным в работах [22, 23] граничные условия на входе использовались в [25] для численного исследования течения в канале квадратного поперечного сечения с двумя последовательными односторонними сужениями. Здесь расчеты выполнялись с использованием метода LES с локальной динамической моделью Пиомелли– Лю для вихрей подсеточного масштаба. На основе анализа профилей скорости, полей давления на стенке, напряжения сдвига и турбулентных пульсаций скорости потока были показаны области перехода к турбулентности вниз по потоку от сужений. Как уже упоминалось, в большинстве публикаций стенки сосуда считаются жесткими [26–28]. Одно из немногих численных исследований пульсирующего течения в стенозированных каналах, в котором учитывается податливость его стенок, было выполнено в магистерской диссертации [29]. Расчет проводился методом LES с помощью динамической подсеточной модели Смагоринского. Для податливой стенозированной модели взаимодействие жидкость – структура (FSI) реализовывалось через деформируемую границу раздела жидкость – структура (FSI) реализовывалось через деформируемую границу раздела жидкость – структура (FSI) реализовывалось через деформируемую границу раздела жидкость на профили и поля скорости потока, размер рециркуляционной области за сужением, сдвиговые напряжения на стенке, деформацию стенки и вихревую структуру течения за сужением. Был сделан вывод, что возникновение рециркуляционных областей за сужением может вызвать накопление жировых бляшек и увеличение степени сужения сосуда, а также отрыв бляшек с дальнейшим неблагоприятным прогнозом болезни.

Еще одним примером исследования пульсирующего течения в стенозированной артерии, в котором учитывалась эластичность ее стенок, является работа [30]. В ней использовалась двухслойная модель жидкости, состоящая из центрального слоя взвеси эритроцитов и периферического слоя плазмы. Авторами изучалось влияние угла сужения, деформации стенки сосуда и степени сужения на характеристики потока.

Приведенный краткий обзор публикаций свидетельствует, что нарушение кровообращения в стенозированных сосудах связано со степенью сужения канала, числом Рейнольдса набегающего потока и характером осциллограммы расхода за период сердечных сокращений. Последние два фактора определяются типом и положением сосуда в кровеносной системе. Важную роль в распределении параметров течения в постстенотической области играют процессы ламинарно-турбулентного перехода, который может инициироваться отрывом потока за локальным сужением. Абсолютное большинство работ, в которых рассматривается пульсирующее течение в каналах с локальным сужением, моделирующих стеноз артерии, выполнено для случая отсутствия реверса расхода на части периода сердечных сокращений. Между тем, именно такой вид расхода имеет место в бедренной и подколенной артериях [31 – 33].

Настоящая статья посвящена численному исследованию осциллирующего течения вязкой несжимаемой жидкости в жесткой круглой трубе с локальным сужением. Параметры вязкости, плотности жидкости, диаметр канала и его сужение, а также амплитудно-частотные характеристики расхода жидкости соответствуют течению крови в подколенной артерии человека при стенозе.

1. Постановка задачи

Кровеносный сосуд со стенозом моделируется круглой трубой диаметром D, у которой есть участок сужения до диаметра d < D (см. рис. 1). Считаем, что стенка трубы неподвижна. Её форму, имеющую сужение, опишем функцией

$$r = R_{\rm w}(z) = \begin{cases} \frac{D}{4} \left\{ (1+\delta) + (1-\delta) \cos\left[2\pi \left(\frac{z}{D} + \frac{1}{2}\right)\right] \right\}, & -\frac{D}{2} < z < \frac{D}{2}, \\ \frac{D}{2}, & z < -\frac{D}{2}, & z > \frac{D}{2}, \end{cases}$$
(1)

где $\delta = d/D$. Полагаем, что жидкость в сосуде имеет постоянную плотность ρ и кинематическую вязкость *v*. Пульсирующее движение жидкости в канале обеспечивает переменный по времени *t* расход Q(t), причем



Рис. 1. Схема канала с локальным сужением.





меняется не только величина, но и знак расхода. Типичный для подколенной артерии человека график указанной функции [31] показан на рис. 2. Здесь полный период равен T, моменты смены направления течения совпадают с t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , максимум расхода равен Q_0 .

Следует отметить, что средний расход жидкости за период пульсаций является положительным:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} Q(t) dt > 0,$$

что обеспечивает среднее движение жидкости в направлении *z*. График расхода на рис. 2 позволяет выделить четыре интервала времени:

$$[t_0 = 0, t_{1,}], [t_1, t_2], [t_2, t_3], [t_3, t_4 = T],$$

на каждом из которых течение происходит в одном направлении; внутри интервала фаза ускорения потока (на графике показана серым) сменяется фазой торможения (черные участки кривой).

В каждом временном интервале движение жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0,$$
(2)

здесь $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ — декартовы координаты, ось z совпадает с осью канала, а начало координат расположено в самом узком сечении (рис. 1). Граничные и начальные условия для уравнений (2) ставятся индивидуально для каждого временного интервала. При численном моделировании в первом периоде течение развивается из состояния покоя ($\mathbf{u} = 0$ при t = 0) для первого интервала. Для последующих интервалов начальными условиями при $t = t_1$, t_2 , t_3 служат расчетные поля скорости предыдущих интервалов. Для второго и последующих периодов колебаний для всех интервалов однонаправленного движения начальное условие выбирается с конца предшествующего интервала. Граничные условия ставятся в виртуальных сечениях z_- , z_+ (см. рис. 1), которые выступают в роли входной z_{in} или выходной z_{out} границы, причем в моменты переключения $t = t_0$, t_1 , t_2 , t_3 эти роли меняются на противоположные. В пределах одного интервала неизменного направления движения на входной границе z_{in} задается параболический профиль скорости $u_{in}(r)$, удовлетворяющий условиям прилипания (5) на стенке и согласованный с графиком расхода Q(t):

$$z = z_{\rm in} : u_z = u_{\rm in} (r, t) = \frac{6Q(t)}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2,$$

$$u_x = u_y \equiv 0, \ 2\pi \int_0^R u_{\rm in} (r, t) r \ dr = Q(t), \ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \ R = D/2.$$
(3)

На выходной границе задается так называемое конвективное граничное условие, обеспечивающее свободный выход жидкости из канала:

$$z = z_{\text{out}}: \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$
(4)

На стенках трубы ставятся условия прилипания:

$$r = R_{\rm w}\left(z\right): \ \mathbf{u} = 0. \tag{5}$$

Исходные данные для задачи (1)–(5) типичны для гемодинамики подколенной артерии при стенозе и заимствованы из работ [31, 34, 35]. К ним относятся диаметр сосуда $D = 6 \cdot 10^{-3}$ м, диаметр канала в месте сужения $d = 2,4 \cdot 10^{-3}$ м, максимальный расход жидкости $Q_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ м³/с (см. рис. 2), период пульсации T = 0,92 с, плотность жидкости $\rho = 1,06 \cdot 10^3$ кг/м³, кинематическая вязкость $v = 2,63 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

2. Безразмерные переменные и критерии подобия

По типичным значениям параметров, приведенных выше, вычислим максимальную среднюю скорость в узком сечении канала — $u_0 = Q_0/(\pi d^2/4) = 5,53$ м/с — и перейдем к безразмерным переменным (они помечены чертой сверху) по формулам

$$\overline{x, y, z} = \frac{x, y, z}{d}, \quad \overline{t} = \frac{t}{T}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad \overline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_0}, \quad \overline{Q} = \frac{Q}{Q_0}.$$
(6)

Определим три критерия подобия и их типичные значения для рассматриваемой задачи:

$$\operatorname{Re}_{d} = \frac{u_{0}d}{v} = 5,046 \cdot 10^{3}, \quad \operatorname{Sh} = \frac{d}{Tu_{0}} = 0,43 \cdot 10^{-3}, \quad \delta = \frac{d}{D} = 0,4.$$
 (7)

Значение числа Рейнольдса указывает на вероятность турбулентного характера течения жидкости. Число Струхаля Sh выражает меру нестационарности течения, вызванного пульсацией расхода Q(t) с периодом T. Малость Sh свидетельствует, что пульсации крови происходят со сравнительно низкой частотой, и течение, по крайней мере, в окрестности стеноза, можно рассматривать как квазистационарное в каждый момент времени t, соответствующее мгновенному значению расхода Q(t). Безразмерный параметр δ характеризует локальное сужение канала. Заметим, что δ существенно влияет на значения критериев подобия, так для трубы с неизменным диаметром D вместо (7) получим

$$u_D = \delta^2 u_0 = 0,884 \,(\text{m/c}), \text{ Re}_D = \delta \,\text{Re}_d = 2,017 \cdot 10^3, \text{ Sh}_D = \text{Sh}_d / \delta^3 = 0,738 \cdot 10^{-2}.$$

Часто при моделировании колебательных движений жидкости вместо числа Струхаля вводят другой критерий подобия — число Уомерсли $Wo = \sqrt{\text{Re}_d \text{Sh}}$ [36]. Для рассматриваемой задачи оно равно 1,473, а для сосуда без стеноза — $Wo_D = \delta^{-1}Wo = 3,682$.

В относительных переменных (6), (7) уравнения (2) принимают вид:

$$\operatorname{Sh} \frac{\overline{\partial u_i}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\overline{\partial}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\overline{\partial u_j}}{\partial x_j} = 0.$$
(8)

При этом диаметр узкого отверстия равен единице, максимальная по времени среднерасходная скорость в данном сечении и период пульсаций расхода также равны единице. Граничные условия (3)-(5) запишутся следующим образом:

$$z = z_{\text{in}} : \overline{u}_{z} = \overline{u_{\text{in}}(r, t)} = 6\delta^{2}\overline{Q}(\overline{t})(1 - 2\delta\overline{r})^{2}, \ r \in [0, 1/2\delta],$$

$$\overline{Q}(\overline{t}) \equiv \frac{Q(\overline{t}T)}{Q_{0}}, \ u_{x} = u_{y} \equiv 0,$$
(9)

$$\overline{z} = \overline{z_{\text{out}}}: \quad \tau \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$
(10)

$$\overline{r} = \overline{R_{\rm w}}\left(\overline{z}\right): \ \overline{\mathbf{u}} = 0. \tag{11}$$

В расчетах в каждый момент *t* принималась симметричная относительно оси трубы параболическая форма профиля скорости $\overline{u_{in}}(\overline{r})$, коэффициенты параболы вычислялись с помощью условий (9) и (10). Безразмерные моменты смены направления потока и фазы ускорения/замедления (рис. 2) имеют следующие значения:

> $\overline{t_0} = [0,000, 0,124]/[0,124, 0,258]$ — ускорение/замедление вправо; $\overline{t_1} = [0,258, 0,346]/[0,346, 0,498]$ — ускорение/замедление влево; $\overline{t_2} = [0,498, 0,581]/[0,581, 0,725]$ — ускорение/замедление вправо; $\overline{t_3} = [0,725, 0,801]/[0,801, 1 = t_4]$ — ускорение/замедление влево.

Виртуальные границы \overline{z}_{in} , \overline{z}_{out} , устанавливаются достаточно далеко от сужения $\overline{z}_0 = 0$, чтобы профиль входной скорости $\overline{u_{in}}(\overline{r})$, удовлетворяющий условию нормировки (9), не оказывал заметного влияния на изучаемое течение в окрестности сужения канала. Грубую оценку удаления границы можно получить, требуя, чтобы объем жидкости

$$V = \int_{0}^{t_1} Q \, dt \approx \frac{Q_0}{2} t_1 \approx \frac{Q_0}{8} T,$$

протекающей через поперечное сечение канала за время $t_1 \approx T/4$, не превышал $z_+ \pi D^2/4$. В этом случае оценка запишется в виде

$$z_{\rm in} > \frac{Q_0 T}{2\pi D^2} = 0.11 \,({\rm M}), \ \overline{z_{\rm in}} = \frac{z_{\rm in}}{d} > 46.1.$$

Данная оценка была проверена и уточнена в численном эксперименте, когда проводились расчеты в канале с границами, по-разному удаленными от горловины сужения канала. Оказалось, что параметры струи перестают зависеть от положения входных границ при $\overline{z}_{in} = 50$ справа и $\overline{z}_{in} = -25$ слева от стеноза. Разница положений левой и правой границ объясняется тем, что максимум расхода влево примерно вдвое меньше расхода вправо. Эти размеры расчетной области в итоге и были приняты.

В медицинских и технических приложениях наибольший интерес вызывает силовое взаимодействие пульсирующего потока со стенками канала. Большое значение имеет касательное напряжение на стенках $\overline{\tau}_w$. Наряду с полем этой величины на поверхности трубы будем вычислять в фиксированном сечении \overline{z} распределение $\overline{\tau}_w$ по окружности \overline{s} ($\overline{y} = \overline{R}_w(\overline{z})$), его среднее значение $\langle \overline{\tau}_w \rangle > (\overline{z})$, а также $\overline{e}(\overline{z})$ — среднеквадратическое отклонение $\overline{\tau}_w(\overline{s})$ от среднего $\langle \overline{\tau}_w \rangle(\overline{z})$. В безразмерных переменных эти величины определяются следующими формулами:

$$\overline{\tau}_{w}\left(\overline{z},\overline{s}\right) = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} \right|_{\overline{r}=\overline{R}_{w}(\overline{z})}, \quad \langle \overline{\tau}_{w} \rangle(\overline{z}) = \frac{1}{|s|} \int_{s} \overline{\tau}_{w}\left(\overline{z},\overline{s}\right) d\overline{s},$$

$$\overline{e}\left(\overline{z}\right) = \left\{ \frac{1}{|\overline{s}|} \int_{s} \left[\overline{\tau}_{w}\left(\overline{z},\overline{s}\right) - \langle \overline{\tau}_{w} \rangle(\overline{z}) \right]^{2} d\overline{s} \right\}^{1/2},$$
(12)

здесь \overline{u} — касательная скорость, n — внутренняя нормаль к поверхности $\overline{r} = \overline{R}_w(\overline{z})$, \overline{s} — окружность, $\overline{z} = \text{const}$ — линия на стенке в сечении и $\overline{s} = 2\pi \overline{R}_w(\overline{z})$ — длина этой линии. Как известно, при переходе к турбулентности величина касательных напряжений $\overline{\tau}_w$ значительно возрастает, при этом вследствие пульсаций скорости растет и отклонение от среднего. Величину \overline{e} в (12) будем рассматривать как признак турбулизации потока.

3. Метод расчета

Численное моделирование и анализ результатов расчета проводились в безразмерных переменных согласно (6). В дальнейшем изложении черту над безразмерными переменными будем опускать.

Область расчета — цилиндрический канал диаметром 2,5 и длиной 75 с локальным сужением горловины до единичного диаметра — покрывалась структурированной ортогональной конечнообъемной сеткой из 1 миллиона ячеек с минимальным линейным размером 0,009 (рис. 3). Обратим внимание на отсутствие выраженного сгущения сетки к границам канала. Последнее обусловлено характером исследуемого течения: с переменным расходом и струей, бьющей из горловины стеноза. При этом максимальный градиент скорости (и, соответственно, наибольшее желательное сгущение сетки) достигается не только вблизи стенок, но и на границе струи вдали от стенок. Для подтверждения пригодности сетки дополнительно проводилось численное решение стационарной задачи в радиально-симметричной постановке с максимальным для исследуемого процесса расходом. Использовались две сетки: одна — с представленными параметрами дискретизации, а другая — измельченная вдвое по обеим координатам (r и z). Относительная погрешность коэффициента трения, полученного на этих двух сетках, не превысила 1,7 %.

Расчет проводился в лицензионном пакете Ansys Fluent версии 19.4 по модели вязкой несжимаемой жидкости методом SIMPLE. Использовалась неявная схема второго порядка точности по времени с шагом 0,001. Для пространственной аппроксимации



Рис. 3. Область расчета и сетка конечных объёмов (фрагмент).

применялся метод конечных объемов со следующими настройками: метод наименьших квадратов — для аппроксимации градиентов, схема второго порядка — для аппроксимации уравнения для давления и схема против потока второго порядка — для аппроксимации уравнений моментов. Для остальных опций использовались значения, принятые в пакете Fluent по умолчанию.

В качестве начального условия для задачи (8)-(11) применялось состояние покоя — $\mathbf{u} = 0$. Данное состояние не удовлетворяет граничным условиям, и должно пройти несколько периодов пульсаций расхода, чтобы установились устойчивые колебания. Ниже представлены результаты расчета одного периода колебаний расхода в установившемся пульсирующем течении.

4. Результаты расчета. Первая фаза ускорения потока

Полный период колебательного процесса можно разделить на четыре фазы ускорения/торможения потока (см. рис. 2). При этом каждая последующая фаза имеет примерно вдвое меньшую интенсивность, чем предыдущая. Можно ожидать, что эффекты, связанные с образованием вихрей и переходом к турбулентности, происходят в первой фазе при $t_0 < t < t_1$.

На начальной фазе ускорения из области сужения канала истекает симметричная струя, которая внедряется в основной поток и формирует обратные течения ближе к стенкам канала (рис. 4, 5). В момент времени t = 0,06 структура струйного течения становится существенно несимметричной, эпюра скорости на фронте внедрения искажается, образуются вихревые сгустки (см. t = 0,07 на рис. 4, 5). Рост длины струи при этом не прекращается и к моменту t = 0,106 достигает $\approx 20 d$.

Картина течения вблизи фронта внедрения струи приобретает признаки турбулентности, о чем свидетельствует и распределение напряжения трения τ_w на стенке (см. рис. 6).

О локальном переходе к турбулентности свидетельствуют и графики $\langle \tau_w \rangle(z)$ среднего по окружности $r = R_w(z)$ касательного напряжения на стенке трубы и его дисперсии e(z), представленные на рис. 7. Видно, что максимумы этих функций расположены



Рис. 4. Осевая струя за стенозом и вторичные вихри в фазе первого ускорения.

Теплофизика и аэромеханика, 2022, том 29, № 2



Рис. 5. Трехмерные эпюры продольной компоненты скорости при первом ускорении в поперечных сечениях канала.

в окрестности фронта внедрения струи и в фазе первого ускорения продвигаются вместе с ним. Как уже отмечалось, среднеквадратическое отклонение e от среднего $< \tau_{\rm w} >$ в сечении z следует рассматривать как меру пульсаций касательной скорости.



Рис. 6. Трение на боковых стенках в фазе первого ускорения.





Рис. 7. Напряжение трения на стенке на линии окружности $r = R_w(z)$ в фазе первого ускорения. $a - \langle \tau_w \rangle$, среднее по окружности, b — отклонение e(z) (см. (12)); t = 0,053 (1), 0,07 (2), 0,114 (3).



Рис. 8. Поле скорости в первой фазе торможения.

5. Первая фаза торможения потока

С началом фазы замедления $t \in [0,114, 0,258]$ рост струи не прекращается, и она достигает максимальной длины 25*d* (рис. 8) в момент t = 0,185, когда расход *Q* падает почти на 30 % максимального значения Q_0 (рис. 9).

Наблюдаемая область турбулентности в первой фазе торможения распространяется на всю длину канала справа от сужения (рис. 10, t = 0,185), хотя и несколько теряет в интенсивности по сравнению с моментом максимального расхода (рис. 11).

Интересен момент полной остановки потока, когда Q = 0 (рис. 8 - 11, t = 0,256). Вихревое разнонаправленное движение в канале продолжается, и характерные скорости этого движения составляют до 30 % наблюдаемого максимума за весь период *T*. Поступательный поток в центре канала компенсируется периферийными возвратными



течениями вдоль стенок. Данный эффект распространяется и на область канала, примыкающую к стенозу слева (рис. 8, t = 0.256).

Рис. 9. Продольная компонента скорости на оси канала в первой фазе торможения. t = 0.185 (1), 0.256 (2).

Теплофизика и аэромеханика, 2022, том 29, № 2



Рис. 10. Напряжение трения на боковых стенках в фазе первого торможения.

6. Вторая и последующие фазы ускорения/торможения

Вторая фаза пульсирующего потока $t \in [0,258, 0,498]$ соответствует течению в обратную сторону (справа налево) со вдвое меньшим, по сравнению с первой фазой, расходом. Поэтому все эффекты, описанные выше для первого интервала, наблюдаются и в этом случае, но с меньшей интенсивностью.

Характерной особенностью данного течения является наличие инерционных потоков с противоположной основному потоку направленностью, сохранившихся от предшествующего интервала, а также наличие турбулентных пульсаций в области вниз по потоку. Полностью влево поток разворачивается лишь в момент приближения к максимальному расходу текущей фазы (см. рис. 12, t = 0,361).

Третий ($t \in [0,488, 0,769]$) и четвертый ($t \in [0,725, 1]$) интервалы периодического процесса имеют сравнительно малые значения расхода. Однако в целом характер течения сохраняется: симметричная круглая струя истекает из горловины сужения и теряет устойчивость при внедрении в основной поток. Но при этом интенсивность вихреобразования весьма низка и не приводит к существенному росту пульсаций скорости и касательных напряжений на стенках.

7. Трение в горловине сужения канала

Выше было показано, как вихри, образующиеся при внедрении струи в основной поток, приводят к турбулентным пульсациям и повышают касательное напряжение трения на стенках. Еще одним фактором, приводящим к общему увеличению гидродинами-



Puc. 11. Напряжение трения на стенке на линии окружности $r = R_w(z)$ в фазе первого торможения. $a - \langle \tau_w \rangle$, b — отклонение e(z); t = 0,185(1), 0,256(2).





Рис. 12. Мгновенные эпюры продольной компоненты скорости $u_z(x)$ в плоскости y = 0и различных сечениях z = const в фазе второго ускорения. $a - t = 0,343, b - t = 0,406; \overline{z} = 10 (1), -3 (2), -10 (3), -15 (4).$

ческого сопротивления канала с сужением, является повышение трения на стенке канала в области вверх по потоку от горловины сужения. Чтобы подсчитать силу вязкого трения в момент *t*, нужно проинтегрировать мгновенное касательное напряжение на стенке канала по площади горловины сужения:

$$F(t) = \int_{0}^{2\pi} \int_{z_{1}}^{z_{R}} \tau_{w} (R_{w}, z, \varphi, t) \sqrt{1 + |R'_{w}(z)|^{2}} R_{w}(z) d\varphi dz,$$
(13)

где образующая цилиндрической горловины $R_w(z)$ задана функцией (1). Будем различать сопротивление стеноза при движении жидкости слева направо (сила F_L , пределы интегрирования в формуле (13) таковы: $z_L = -D/2$, $z_R = 0$) и справа налево (сила F_R , $z_L = 0$, $z_R = -D/2$). Графики изменения этих сил во времени (время на этих совмещенных графиках отсчитывается от начала каждого интервала движения) приведены на рис. 13*a*. Можно видеть, что при течении слева направо возникает значительный рост силы трения F_L левее сужения, а при течении справа налево — рост силы F_R правее сужения. При этом наблюдается нелинейный рост силы трения с увеличением расхода жидкости. В частности, сравнивая первое и второе пиковые значения расхода на рис. 2 и соответствующие им пиковые значения трения на рис. 13*a*, можно видеть, что первый максимум расхода



Рис. 13. Силы трения $F_{\rm L}$ (1) и $F_{\rm R}$ (2) и их сумма (3) в горловине сужения канала (*a*) и полная сила сопротивления $F_{\rm P}$ (*b*).

Пунктиром обозначены границы режимов течения:

а — вправо с ускорением, *b* — вправо с замедлением, *с* — влево с ускорением, *d* — влево с замедлением.

вдвое превосходит расход на момент второго пикового значения, а соответствующая сила трения $F_{\rm L}$ превышает значение $F_{\rm R}$ в момент второго максимума в три раза.

Отметим также наличие локального роста силы трения со стороны, противоположной потоку, в момент сразу после разворота основного течения (особенно заметно по синей кривой в момент t = 0,256 на рис. 13*a*). По-видимому, это связано с преодолением инерционной составляющей потока с предыдущей фазы ускорения/торможения, направленной в противоположную сторону. Для сравнения на рис. 13*b* приводится график полной силы гидродинамического воздействия жидкости на канал:

$$F_p = \int_{S_{\text{out}}} p\,ds - \int_{S_{\text{in}}} p\,ds$$

Видно, что сила $F_{\rm p}$, обусловленная давлением, на два порядка превосходит силу трения $F_{\rm L} + F_{\rm R}$.

Выводы

Поток, проходя через горловину сужения в канале, образует струю, которая на начальном этапе ускорения потока развивается симметрично. При этом, поскольку скорость струи значительно превышает скорость течения окружающей жидкости, часть жидкости из струи разворачивается назад, образуя медленные возвратные течения, идуцие вдоль стенок канала. По мере продвижения и ускорения струя теряет устойчивость. На фронте внедрения струи начинается процесс турбулентного вихреобразования. В зависимости от фазы периодического процесса получены следующие максимальные линейные размеры струи: на первой фазе ускорения — 25*d*, на второй фазе — 15*d*, на третьей и четвертой фазах — 8*d*.

С уменьшением расхода жидкости Q скорость течения в конце струи превышает скорость в ее начале, в конце фазы торможения струя отрывается от области сужения канала и продолжает движение по инерции вместе с образованными ею турбулентными вихрями, постепенно теряя энергию. В начальный момент переключения направления потока набегающая жидкость обтекает инерционный остаток струи на периферии, в пристенном слое. Таким образом, в одном сечении z = const жидкость в центре канала двигается по направлению струи, а вблизи стенок — по направлению потока.

Сужение канала приводит к значительному (до двух порядков) скачку силы трения на стенке канала в области непосредственно до центра сужения. Еще один локальный максимум в значении трения (примерно на один порядок больше, чем в области невозмущенного течения) наблюдается около конца струи, где часть потока разворачивается и образует возвратные течения, а оставшаяся часть потока участвует в процессе турбулентного вихреобразования. Повышенные значения силы трения и её пульсаций сохраняются и далее вниз по потоку, характеризуя наличие турбулентного перехода.

Список литературы

- 1. Терехов В.И., Богатко Т.В., Дьяченко А.Ю., Смульский Я.И., Ярыгина Н.И. Теплообмен в дозвуковых отрывных потоках. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. 247 с.
- Elbadawy I., Sabry A., Shedid M.H., Basher A. Heat transfer characteristics in wake region of a single finned obstacle // Intern. J. of Thermal Sci. 2018. Vol. 128. P. 149–159.
- Kant K., Qayoum A. Numerical investigations of fluid flow and heat transfer in a ribbed heated duct with variable aspect ratios // Recent Trends in Fluid Mechanics. 2016. Vol. 3, No. 1. P. 23–37.
- 4. Deshpande M.D., Ballal V., Shankapal S.R., Prabhu M.D.V., Srinath M.G. Subject-specific blood flow simulation in the human carotid artery bifurcation // Current Sci. 2009. Vol. 97, No. 9. P. 1303–1312.

- Shaik E. Numerical simulations of blood flow In arteries using fluid-structure interactions: thesis. Wichita State University, 2007. 155 p.
- 6. Ku D.N. Blood flow in arteries // Annual Review of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 29, No. 1. P. 399-434.
- Elcner J., Lizal F., Jedelsky J., Tuhovcak J., Jicha M. Laminar-turbulent transition in a constricted tube: comparison of Reynolds-averaged Navier–Stokes turbulence models and large eddy simulation with experiments // Advances in Mechanical Engng. 2019. Vol. 11, No. 5. 17 p.
- Bahramian F., Mohammadi H. Modeling blood flow in an eccentric stenosed artery using large eddy simulation and parallel computing // J. Mechanics in Medicine and Biology. 2015. Vol. 15, No. 5. P. 1550086-1–1550086-12.
- 9. Zhu C., Seo J.H., Mittal R. Computational modelling and analysis of haemodynamics in a simple model of aortic stenosis // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 851. P. 23–49.
- Pokhrel P.R., Kafle J., Kattel P., Gaire H.P. Analysis of blood flow through artery with mild stenosis // J. Institute of Sci. and Technology. 2020. Vol. 25, No. 2. P. 33–38.
- 11. Гатаулин Я.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Федорова Е.А., Юхнев А.Д. Расчетно-экспериментальное исследование слабозакрученного течения жидкости в модели кровеносного сосуда со стенозом // Научнотехнические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2015. № 4. С. 36–47.
- Tabe R., Ghalichi F., Hossainpour S., Ghasemzadeh K. Laminar-to-turbulence and relaminarization zones detection by simulation of low Reynolds number turbulent blood flow in large stenosed arteries // Bio-Medical Materials and Engng. 2016. Vol. 27. P. 119–129.
- 13. Гатаулин Я.А., Смирнов Е.М. Численное исследование структуры и локальной турбулизации течения в кровеносном сосуде с односторонним стенозом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физикоматематические науки. 2021. Т. 14, № 1. С. 72–84.
- 14. Khan M.O., Valen-Sendstad K., Steinman D.A. Direct numerical simulation of laminar-turbulent transition in a non-axisymmetric stenosis model for newtonian vs. shear-thinning non-newtonian rheologies // Flow, Turbulence and Combustion. 2019. Vol. 102, No. 1. P. 43–72.
- Okuyade W.I.A., Abbey T.M. Oscillatory blood flow in convergent and divergent channels. Part 1. Effects of pulse amplitude and local constriction height // J. Advances in Mathematics and Computer Sci. 2016. P. 1–17.
- 16. Kolke D.K., Arun M., Maniyeri R. Numerical analysis of pulsating flow in a smooth constriction using immersed boundary method // Recent Asian Research on Thermal and Fluid Sci. Singapore, Springer: 2020. P. 237–249.
- Ojha M., Cobbold R.S.C., Jonston K.W., Hummel R.L. Pulsatile flow through constricted tubes: an experimental investigation using photochromic tracer methods // J. Fluid Mechanics. 1989. Vol. 203. P. 173–197.
- Ahmed S.A. An experimental investigation of pulsatile flow through a smooth constriction // Experimental Thermal and Fluid Sci. 1998. Vol. 17, No. 4. P. 309–318.
- 19. Гатаулин Я.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Юхиев А.Д. Структура нестационарного течения в пространственно-извитой модели общей сонной артерии со стенозом: численное исследование // Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 1. С. 69–78.
- 20. Beratlis N., Balaras E., Kiger K. Direct numerical simulations of transitional pulsatile flow through a constriction // J. Fluid Mechanics. 2007. Vol. 587. P. 425–451.
- 21. Freidoonimehr N., Arjomandi M., Sedaghatizadeh N., Chin R., Zander A. Transitional turbulent flow in a stenosed coronary artery with a physiological pulsatile flow // Intern. J. for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2020. Vol. 36, No. 7. 25 p.
- Mittal R., Simmons S.P., Najjar F. Numerical study of pulsatile flow in a constricted channel // J. Fluid Mechanics. 2003. Vol. 485. P. 337–378.
- Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // The J. of Physiology 1955. Vol. 127, No. 3. P. 553–563.
- Khair A., Wang B.C., Kuhn D.C.S. Study of laminar-turbulent flow transition under pulsatile conditions in a constricted channel // Intern. J. Computational Fluid Dynamics. 2015. Vol. 29, No. 9–10. P. 447–463.
- Molla M., Paul M.C. Large eddy simulation of pulsatile flow through a channel with double constriction // Fluids. 2017. Vol. 2, No. 1. P. 1–19.
- Deshpande M., Giddens D., Mabon F. Steady laminar flow through modelled vascular stenosis // J. of Biomechanics. 1976. No. 9. P. 165–174.
- Pralhad R., Schultz D. Two-layered blood flow through stenosed tubes for different diseases // Biorheology. 1988. Vol. 25. P. 715–726.
- 28. Liu G., Wang X., Ai B., Liu L. Numerical study of pulsating flow through a tapered arterywith stenosis // Chinese J. of Phys. 2004. Vol. 42, No. 4. P. 401–409.
- **29.** Gu X. On the prediction of pulsatile flows in constricted elastic vessels // A thesis submitted in fulfilment of the requirements for the degree of Master of Engineering School of Mechanical and Manufacturing Engng Faculty of Engineering. UNSV Australia, 2015. 131 p.
- 30. Haghighi A.R., Kabdool A.A., Asl M.S., Kiyasatfar M. Numerical investigation of pulsatile blood flow in stenosed artery // Intern. J. Applied and Computational Mathematics. 2016. Vol. 2, No. 4. P. 649–662.

- Klein W.M., Bartels L.W., Bax L., Graaf Y., Mali W. Magnetic resonance imaging measurement of blood volume flow in peripheral arteries in healthy subjects // J. Vascular Surgery. 2003. Vol. 38, No. 5. P. 1060–1066.
- 32. Mohajer K., Zhang H., Gurell D., Ersoy H., Ho B., Kent K.C., Prince M.R. Superficial femoral artery occlusive disease severity correlates with MR cine phase-contrast flow measurements // J. MRI. 2006. Vol. 23. P. 355–360.
- 33. Hoedt M., How T., Poyck P., Wittens C. Why patencies of femoropopliteal bypass grafts with distal end-to-end anastomosis are comparable with end-to-side anastomosis // Annals of Thoracic and Cardiovascular Surgery. 2015. Vol. 21, No. 2. P. 157–164.
- 34. Sandgren T., Sonesson B., Ahlgren Å.R., Länne T. The diameter of the common femoral artery in healthy human: Influence of sex, age, and body size // J. of Vascular Surgery. 1999. Vol. 29, No. 3. P. 503–510.
- 35. Radegran G., Saltin B. Human femoral artery diameter in relation to knee extensor muscle mass, peak blood flow, and oxygen uptake // American J. Physiology-Heart and Circulatory Physiology. 2000. Vol. 278, No. 1. P. H162–H167.
- 36. Tada S., Oshima S., Yamane R. Classification of pulsating flow patterns in curved pipes // J. Biomechanical Engng. 1996. Vol. 118. P. 311–318.

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2021 г., после доработки — 22 ноября 2021 г., принята к публикации 14 декабря 2021 г.