УДК 532.517

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

И. И. Вайнштейн, В. К. Юровский

(*Красноярск, Томск*)

Как известно, решения уравнения

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = F(\psi), \tag{1}$$

где завихренность F — произвольная функция от ψ, можно рассматривать как пример установившегося течения идеальной жидкости. Предполагая движение идеальной несжимаемой жидкости как предельное движение вязкой жидкости, в уравнении (1) функцию $F(\psi)$ можно заменить на постоянную [1].

Рассмотрим следующую модельную задачу со специально выбранной кусочно-постоянной завихренностью. В ограниченной области D с границей Γ требуется найти непрерывно-дифференцируемое решение уравнения

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0 \\ -\omega_1, & \text{если } \psi > 0 \end{cases} \tag{2}$$

(ω, ω_1 — неотрицательные постоянные) при краевом условии

$$\psi|_\Gamma = \varphi(s). \tag{3}$$

Если в уравнении (2) положить $\omega_1 = 0$, то получится уравнение, описывающее движение идеальной жидкости по схеме работы [2]. Течения этого типа для случая ограниченной области изучались в [3], а для случая неограниченной области — в [4—7].

Задача (2), (3) имеет тривиальное решение

$$\psi = \varphi_0 + \frac{\omega_1}{2\pi}\iint\limits_D G\,d\xi\,d\tau,$$

где φ_0 — гармоническая функция, удовлетворяющая условию (3); G — функция Грина области D задачи Дирихле для оператора Лапласа. В [3] доказано существование при определенных условиях нетривиального решения для случая $\omega_1 = 0$. Выведем условие, при котором существует нетривиальное решение задачи (2), (3). Из этого условия при $\omega_1 = 0$ получается более простая оценка, чем в [3].

Пусть $\varphi(s) \leqslant C$; B_1 — круг наибольшего радиуса такой, что $B_1 \subseteq D$ (без ограничения общности можно считать, что его центр совпадает с началом координат); B_2 — круг наименьшего радиуса с центром в начале координат такой, что $B_2 \supseteq D$. Радиус B_1 равен R_1, радиус B_2 — R_2. Имеет место следующее утверждение: при выполнении неравенства

$$\omega - \frac{\omega_1 R_2^2}{R_1^2}\,c \geqslant \frac{4Ce}{R_1^2} \tag{4}$$

задача (2), (3) имеет отличное от тривиального решение. Докажем это. Если в качестве области D взять круг B_1, в (2) положить $\omega_1 = 0$ и в (3)

$\varphi(s) = C + \omega_1 R_2^2/4$, то при выполнении условия (4) задача имеет два нетривиальных решения (находятся в явном виде). Это значит, в частности, что существует круг $B_a < B_1$ радиуса a, в котором соответствующее решение отрицательно.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$(5) \qquad \frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2} = \begin{cases} \omega, \text{ если } x, y \in B_a \\ \frac{\omega}{2}(1 - \operatorname{th}\psi_n n) - \frac{\omega_1}{2}(1 + \operatorname{th}\psi_n n), \text{ если} \\ \qquad\qquad x, y \in D \backslash \bar{B}_a; \end{cases}$$

$$(6) \qquad \psi_n|_\Gamma = \varphi(s).$$

Решение ищем в классе непрерывно-дифференцируемых в области D функций. Задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению

$$(7) \qquad \psi_n = \varphi_0 - \frac{\omega}{2\pi}\iint\limits_{B_a} G d\xi d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{D\backslash B_a} [\omega_1(1 + \operatorname{th}\psi_n n) - \omega(1 - \operatorname{th}\psi_n n)]\, G d\xi d\tau.$$

При помощи теоремы Шаудера устанавливается существование решения уравнения (7) при любом n и $x, y \in D\backslash\bar{B}_a$. Подставляя это решение в правую часть уравнения (7), определим функцию ψ_n во всей области D. Полученная функция — решение задачи (5), (6). Из свойств интеграла типа потенциала следует, что она в каждой фиксированной замкнутой области $\bar{B} \subset D$ имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера, причем константа и показатель не зависят от n.

Применяя теорему Арцелла, устанавливаем компактность последовательности ψ_n в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций. Пусть подпоследовательность ψ_{n_k} сходится к непрерывно-дифференцируемой функции ψ^*. Покажем, что функция ψ^* является нетривиальным решением задачи (2), (3).

Пусть в некоторой точке $x_0, y_0 \in D\backslash\bar{B}_a$ $\psi^*(x_0, y_0) > 0$. Тогда она будет больше нуля и в некоторой круговой окрестности. Рассматривая теперь уравнение (5) в этой окрестности и переходя в нем к пределу при $n_k \to \infty$, получим $\partial^2\psi^*/\partial x^2 + \partial^2\psi^*/\partial y^2 = -\omega_1$. Аналогично показывается что в точках, где $\psi^* < 0$, $\partial^2\psi^*/\partial x^2 + \partial^2\psi^*/\partial y^2 = \omega$. Далее, при $x,y \in B_a$ $\partial^2\psi^*/\partial x^2 + \partial^2\psi^*/\partial y^2 = \omega$. Покажем, что при $x, y \in B_a$ $\psi^* < 0$. Из свойств функции Грина следует

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} G d\xi d\tau \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_2} G_{B_2} d\xi d\tau \leqslant \frac{R_2^2}{4};$$

$$\iint\limits_{B_a} G d\xi d\tau \geqslant \iint\limits_{B_a} G_{B_1} d\xi d\tau \; (x, y \in B_1),$$

где G_{B_1}, G_{B_2} — функции Грина для областей B_1 и B_2 соответственно. Из (7), (8) получаем

$$\psi_n < V = C + \frac{\omega_1 R_2^2}{4} - \frac{\omega}{2\pi}\iint\limits_{B_a} G_{B_1} d\xi d\tau.$$

Из определения области B_a следует, что функция V отрицательна в области B_a. Тогда ψ_n, а значит, и ψ^* отрицательны в B_a. То, что ψ^*

удовлетворяет уравнению при переходе через границу области B_a, следует из ее гладкости.

Полагая в (4) $\omega_1 = 0$, получим условие $\omega \geqslant 4Ce/R_1^2$, при котором существует отличное от тривиального решение задачи, описывающее течение по схеме М. А. Лаврентьева для случая ограниченной области.

Поступила 14 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бэтчелор Д.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. **Лаврентьев М. А.** Вариационные методы в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. **Гольдштик М. А.** Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости.— «Докл. АН СССР», 1962, т. 147, № 6.
4. **Шабат А. Б.** О двух задачах на склеивание.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 195, № 6.
5. **Шабат А. Б.** Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне трещины.— ПМТФ, 1962, № 4.
6. **Антонцев С. Н., Лелюх В. Д.** Некоторые задачи сопряжения вихревых и потенциальных течений.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, вып. 1, 1969.
7. **Плотников П. И.** О разрешимости одного класса задач на склеивание потенциального и вихревого течений.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, вып. 3, 1969.

УДК 536.25

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ ПРОСЛОЙКАХ

Г. Б. Петражицкий, Н. М. Станкевич

(*Москва*)

Изучение конвективных течений вязкой сжимаемой жидкости в сферических прослойках представляет значительный интерес для различных технических приложений. В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал [1—4], который позволил получить средние характеристики теплообмена, установить тип потока и классифицировать режимы течения в зависимости от значения числа Грасгофа и отношения диаметров сфер. В [3] представлены также температурные профили для широкого диапазона изменения числа Прандтля. Все экспериментальные работы посвящены изучению конвекции при условии более нагретой внутренней сферической поверхности.

Теоретический анализ задачи проведен в работах [5, 6]. В [5] исследовалась стационарная осесимметричная естественная конвекция несжимаемой жидкости, заключенной между изотермическими концентрическими сферами для низких чисел Рэлея ($\mathrm{Ra} < 10^4$). Решения основных уравнений найдены путем разложения температуры T и функций тока ψ в ряд по степеням числа Рэлея и оценке первых трех членов в каждом из этих рядов. Для одного частного случая приводятся конфигурации линий тока, распределение скорости и температуры, данные о потоках тепла на поверхности сфер.

В результате использования теории подобия в [6] получен закон теплопередачи при естественной конвекции в цилиндрических и сферических прослойках с учетом кривизны области. В настоящее время наряду с экспериментальными и аналитическими методами исследования все большее значение приобретает численный эксперимент, позволяющий изучить достаточно полные физические