ПМТФ, № 5, 1965

О ВЛИЯНИИ СТЕНОК НА НЕРЕГРЕВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

А. Г. Куликовский, С. А. Регирер

(Москва)

Механизм перегревной неустойчивости магнитогидродинамических течений состоит в следующем. Если электропроводность среды зависит от температуры, то небольшое местное увеличение температуры может при определенных условиях привести к увеличению выделения джоулева тепла, дальнейшему росту температуры и вызвать, таким образом, неустойчивость.

Перегревная неустойчивость изучалась ранее [1, 2] в предположении однородности невозмущенной температуры и без учета влияния границ области. Было обнаружено, что инкремент нарастания возмущений увеличивается с ростом длины волны. Очевидно, однако, что отвод тепла через границы области, занятой проводящей средой, может повлиять на развитие возмущений, в первую очередь — длинноволновых. В связи с этим ниже изучается простейшая задача об устойчивости распределения температуры при электрическом разряде в газе между двумя плоскостями.

Рассмотрим поток несжимаемой среды с постоянной скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x U$ (ее можно считать равной нулю в соответствующей системе координат) между двумя плоскими электродами $y = \pm L$, на которых поддерживаются постоянные температуры и электрические потенциалы. Пусть в потоке установилось такое распределение температуры, что все джоулево тепло отводится через стенки и температура не меняется в направлении течения. Такое предположение можно принять, если длина электродов много больше некоторой величины, определяемой шириной канала, теплопроводностью и скоростью потока. Воздействием магнитного поля на рассматриваемые возмущения электрического тока будем пренебрегать, так что неустойчивость будет носить чисто «тепловой» характер и не будет связана с возмущениями поля скоростей. Такой характер неустойчивости сохраняется и при наличии однородного магнитного поля, когда рассматриваются возмущения с волновым вектором $\mathbf{k}$, перпендикулярным направлению поля. Действительно, в этом случае

$$\operatorname{rot}(\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{j} - \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

и магнитные силы приводят только к перераспределению давления в среде.

Температура невозмущенного потока T_0 определяется из уравнения

$$\varkappa \frac{d^2T_0}{dy^2} = -\frac{j^2}{\sigma(T_0)}, \qquad T_0(\pm L) = T_w \qquad \left(j = j_y = 2\varphi_e \left(\int\limits_{-L}^{L} \frac{dy}{\sigma}\right)^{-1}\right) \tag{1}$$

Здесь $\varkappa$ — постоянный коэффициент теплопроводности, σ_0 — электропроводность, j — невозмущенная плотность тока, $2\varphi_e$ — разность потенциалов на электродах.

Обращаясь к уравнениям Максвелла и закону Ома и сделав простые оценки, можно показать, что если величина $L^2\sigma / \omega c^2$ (где ω — характерная частота задачи) много меньше единицы, то возмущения электрического поля $\mathbf{E} = \nabla\varphi$ обладают потенциалом. Уравнение для φ получается из равенства $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ и закона Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Второе уравнение задачи (относительно температуры) вытекает из уравнения энергии.

Введем следующие безразмерные величины (штрихи в дальнейшем будут опущены):

$$t' = \frac{t}{\rho c_v L^2}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad f = \varphi \frac{jL}{\varkappa T^*}, \quad T' = \frac{T}{T^*}$$

$$T_0' = \frac{T_0}{T^*}, \quad \alpha^2 = \frac{j^2 L^2}{\varkappa T^* \sigma^*}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma^*}, \quad \alpha_0^2 = \frac{4\varphi_e^2 \sigma^*}{\varkappa T^*}$$

Здесь $\sigma^* = \sigma(T^*)$ — некоторое характерное значение проводимости, а T^* — соответствующая температура. Тогда уравнение (1) и линеаризованные уравнения для возмущений температуры T и потенциала φ принимают вид

$$\frac{d^2 T_0}{dy^2} = -\frac{\alpha^2}{\sigma}, \quad T_0(\pm 1) = T_w, \quad \alpha^2 = \alpha_0^2 \left(\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sigma} \right)^{-2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \triangle T + 2 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha^2 \frac{T}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT}, \qquad T(\pm 1) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha^2 \frac{T}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}\right) = 0, \qquad f(\pm 1) = 0 \tag{4}$$

В уравнениях (2) — (4) для простоты принято

$$\sigma = \sigma[T_0(y)], \qquad d\sigma / dT = (d\sigma / dT)_{T=T_0(y)}$$

Заметим, что два последних члена (3) представляют собой возмущение джоулева тепловыделения, а выражение в круглых скобках в (4) — компоненты возмущенной плотности тока j_x и j_y соответственно.

Система (2), определяющая стационарный профиль температуры в канале, всегда разрешима в квадратурах. Аналогичные нелинейные задачи (но без интегрального множителя в правой части) возникают в теории теплового пробоя диэлектриков [3], теории теплового взрыва [4] и при исследовании куэттовского течения с переменной вязкостью [5]. Пользуясь известными методами, изложенными, например в [5], можно показать, что для параметра α_0^2 справедливо неравенство вида $m(T_m) \leqslant \alpha_0^2 \leqslant M(T_m)$, где $T_m = T_0(0)$ — максимальная температура, а вид функций $m(T_m)$, $M(T_m)$ определяется зависимостью $\sigma(T)$. В частности, при достаточно быстром возрастании σ с увеличением T функция $M(T_m) \to 0$ при $T_m \to \infty$ и, следовательно, α_0^2 ограничены сверху и также убывают до нуля при $T_m \to \infty$. Это означает также, что решение задачи (2) существует лишь при значениях α_0^2, меньших некоторого критического. Наибольшие возможные значения α_0^2 для некоторых зависимостей $\sigma(T)$ найдены в работах [3,6].

Рассмотрим далее частные решения системы (3), (4), имеющие вид

$$T = \theta(y) e^{ikx - \lambda t}, \qquad f = \psi(y) e^{ikx - \lambda t}$$

Тогда для функций θ, f будем иметь

$$\theta'' + \left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT} - k^2 + \lambda\right)\theta + 2\psi' = 0 \tag{5}$$

$$(\sigma\psi')' - k^2 \sigma\psi + \alpha^2 \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \theta\right)' = 0 \tag{6}$$

$$\theta(\pm 1) = 0, \qquad \psi(\pm 1) = 0 \tag{7}$$

При исследовании устойчивости функцию $T_0(y)$ можно считать заданной, а соответствующую зависимость $\sigma(T_0)$ определять из уравнения (2).

Выражая коэффициенты в (5), (6) через T_0, найдем

$$\theta'' + \left(\lambda - k^2 + \frac{T_0'''}{T_0'}\right)\theta + 2\psi' = 0 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\psi'}{T_0''}\right)' + \left(\frac{T_0'''\theta}{T_0'T_0''}\right)' - k^2\frac{\psi}{T_0''} = 0 \tag{9}$$

Задача состоит в том, чтобы при заданных $T_0(y)$ и k найти такие значения λ, при которых существует нетривиальное решение уравнений (8), (9), удовлетворяющее граничным условиям (7). При этом наибольший интерес представляет λ с наименьшей вещественной частью.

Если система (8), (9) при некотором λ обладает решением $\theta(y)$, $\psi(y)$, то $\theta(-y)$, $-\psi(-y)$ также является решением, соответствующим тому же λ. Поэтому, когда данному λ соответствует одно собственное решение, то

$$\text{либо}\quad \theta(-y) = \theta(y), \qquad \psi(-y) = -\psi(y) \tag{10}$$

$$\text{либо}\quad \theta(-y) = -\theta(y), \qquad \psi(-y) = \psi(y) \tag{11}$$

Если же собственных решений несколько, то они всегда могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялось одно из равенств (10), (11).

Поставленную задачу будем рассматривать в двух предельных случаях — для очень больших и очень малых длин волн.

Большим длинам волн [1] соответствуют малые значения k. Пренебрегая в (8), (9) членами, содержащими k^2, и интегрируя (9) с учетом граничных условий (7), найдем

$$\psi = -\frac{T_0'''}{T_0'}\theta + \frac{T_0''}{T_0'(1) - T_0'(-1)}\int_{-1}^{1}\frac{T_0'''}{T_0'}\theta\, dy \tag{12}$$

Интеграл в правой части (12) с точностью до множителя определяет плотность возмущенного тока j_y.

Из уравнения (8), принимая во внимание формулу (12), получим

$$\theta'' + \left(\lambda - \frac{T_0'''}{T_0'}\right)\theta + \frac{2T_0''}{T_0'(1) - T_0'(-1)}\int_{-1}^{1}\frac{T_0'''}{T_0'}\theta\, dy = 0 \tag{13}$$

или

$$\theta'' + \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\right)\theta + \frac{2\alpha^2}{\sigma}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\theta\, dy\right)\left(\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma}\right)^{-1} = 0, \qquad \theta(\pm 1) = 0 \tag{14}$$

Эта краевая задача в общем случае будет не самосопряженной.

Согласно сделанному выше замечанию и формулам (10), (11), можно рассматривать только четные и нечетные решения уравнения (13). Для нечетных решений его последний член равен нулю, так что

$$\theta'' + \left(\lambda - \frac{T_0'''}{T_0'}\right)\theta = 0, \qquad \theta(\pm 1) = 0 \tag{15}$$

Эта задача — самосопряженная и все ее собственные числа λ — действительны. При $\lambda = 0$ единственным нечетным решением (15) будет $\theta = T_0'$. В силу уравнения (2) и неравенства $\sigma \geqslant 0$, имеем $T_0'(1) < 0$. Поэтому, для того чтобы $\theta(1)$ обратилось в нуль, необходимо иметь $\lambda > 0$.

Таким образом, все нечетные возмущения устойчивы и экспоненциально затухают со временем.

Для четных решений уравнений (14) провести исследование устойчивости в общем виде не удается. Ограничимся в дальнейшем двумя частными

---

[1] Можно показать, что в этом случае исследование сохраняет силу и для сжимаемой среды.

случаями зависимости проводимости от температуры, когда

$$\sigma(T) = Ae^{\beta T} \qquad (A,\ \beta = \mathrm{const}) \tag{16}$$

или

$$\sigma(T) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{1}{B - T} \qquad (B,\ \beta = \mathrm{const}) \tag{17}$$

В случае, когда $\sigma(T)$ определяется формулой (16), $T_0''' / T_0' = -\beta T_0''$, и задача (14) становится самосопряженной. Все ее собственные числа действительны, а при $\alpha_0 = 0$ — положительны. При изменении параметра α_0 переходу к неустойчивости соответствует переход одного из собственных чисел λ через нуль.

Покажем, что если при изменении параметра простое собственное число λ проходит через нуль при некотором значении параметра, то для решений уравнения (2) это значение соответствует точке бифуркации, и наоборот, точке бифуркации соответствует $\lambda = 0$. Из уравнения (2) следует, что разность двух решений $\theta = T - T_0$ удовлетворяет уравнению

$$\theta'' = -\alpha_0^2\left\{\frac{1}{\sigma(T_0+\theta)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma(T_0+\theta)}\right]^{-2} - \frac{1}{\sigma(\tau_0)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma(T_0)}\right]^{-2}\right\} \tag{18}$$

Введем параметр, однозначно характеризующий решения T_0, которые исследуются на устойчивость. В качестве такого параметра может быть выбрана максимальная температура $T_m = T_0(0)$. Если далее преобразовать уравнение (18) в интегральное, приняв в качестве новой неизвестной $\theta''(y)$, то могут быть использованы теоремы, содержащиеся в книге [7].

Наряду с уравнением (18), рассмотрим следующее:

$$\mu\theta'' - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\theta + \frac{2\alpha^2}{\sigma}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\theta\,dy\right)\left(\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma}\right)^{-1} = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0 \tag{19}$$

Здесь σ и $d\sigma / dT$ зависят от $T_0(y)$. Уравнение (19) при $\mu = 1$ есть результат линеаризации (18) и совпадает с (14), если в последнем положить $\lambda = 0$. Если при изменении T_m простое собственное значение μ задачи (19) переходит через единицу в точке $T_m = T_m^*$, то на основании теорем 2.1 гл. IV и 4.7 гл. II работы [7] можно заключить, что $T_m = T_m^*$ является точкой бифуркации решений уравнения (18). Переходы μ через единицу (в задаче (19)) и λ через нуль (в задаче (14)) происходят одновременно. Чтобы показать это, предположим, что T_m мало отличается от T_m^*, так что (14) и (19) можно записать в виде

$$L\theta = \Delta L\theta - \lambda\theta, \qquad L\theta = \Delta L\theta - (\mu - 1)\,\theta'' \tag{20}$$

где L — оператор, соответствующий $T_m = T_m^*$, ΔL — «возмущение» оператора, вызванное изменением T_m. Уравнения (20) разрешимы, если их правые части ортогональны к собственным функциям оператора, сопряженного с L, и в данном случае совпадающего с L. Поэтому при T_m, близких к T_m^*, имеем

$$\lambda\int_{-1}^{1}\theta^2 dy = (1 - \mu)\int_{-1}^{1}\theta'^2 dy \tag{21}$$

Из равенства (21) следует, что переход к неустойчивости (переход λ через нуль) связан с бифуркацией решений уравнения (2). Как показывает исследование уравнения (2), точкой бифуркации его решений при условии (16) является единственная [3] точка максимума функции $\alpha_0(T_m)$, которая существует при $\beta > 0$ и отсутствует при $\beta \leqslant 0$. Если $\beta > 0$, то при $\alpha_0 < \alpha_0(T_m^*)$ имеются два решения задачи (2), а при $\alpha_0 > \alpha_0(T_m^*)$

решения не существует. Отсюда следует [7], что индексы соответствующих неподвижных точек векторных полей, соответствующих уравнению (2), в банаховом пространстве функций θ'' имеют противоположный знак, и поэтому при изменении T_m величина μ переходит через единицу в точке $T = T_m^*$, а λ, согласно предыдущему, переходит через нуль. Так как при α_0, близких к нулю, распределение температуры $T_0(y)$ заведомо устойчиво, то из изложенного следует, что оно будет устойчиво при $T_m < T_m^*$ и неустойчиво при $T_m > T_m^*$. Если же $\beta < 0$, так что $\alpha_0(T_m)$ — монотонная функция, то распределение температуры $T_0(y)$ будет устойчиво при любых T_m. Таким образом, при $\beta < 0$ решение уравнения (2) всегда устойчиво, а при $\beta > 0$ — только при $T_m < T_m^*$. При $T_m > T_m^*$ распределение температуры неустойчиво по отношению к симметричным возмущениям с большой длиной волны.

Рассмотрим теперь ту же задачу при гиперболическом законе изменения проводимости (17). Из уравнения (2) следует

$$\frac{T_0'''}{T_0'} = \beta^2, \qquad T_0 = B - \frac{B - T_w}{\operatorname{ch}\beta} \operatorname{ch}\beta y \tag{22}$$

Подставляя эти выражения в (13), получим

$$\theta'' + (\lambda - \beta^2)\,\theta + J\,\frac{\beta^3 \operatorname{ch}\beta y}{\operatorname{sh}\beta} = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0 \quad \left(J = \int_{-1}^{1} \theta\, dy = 1\right) \tag{23}$$

Поскольку интерес представляют только четные по y решения (23), причем такие, что интеграл в третьем члене отличен от нуля, поэтому можно нормировать θ, потребовав дополнительно, чтобы $J = 1$.

Решение задачи (23), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\theta = \frac{\beta^3 \operatorname{cth}\beta}{a^2 + \beta^2}\left(\frac{\cos ay}{\cos a} - \frac{\operatorname{ch}\beta y}{\operatorname{ch}\beta}\right) \qquad (a^2 = \lambda - \beta^2) \tag{24}$$

Условие $J = 1$ для a или λ дает уравнение

$$\frac{2\beta^3 \operatorname{cth}\beta}{a^2 + \beta^2}\left(\frac{\operatorname{tg} a}{a} - \frac{\operatorname{th}\beta}{\beta}\right) = 1 \tag{25}$$

Отсюда после простого преобразования

$$\frac{\operatorname{tg} a}{a} = \frac{3\beta^2 + a^2}{2\beta^3} \operatorname{th}\beta \tag{26}$$

Последнее уравнение имеет лишние корни $a = \pm i\beta$, так как переход от (25) и (26) содержит умножение на $a^2 + \beta^2$.

При $\beta \to 0$ все корни a_n уравнения (26), не стремящиеся к нулю, действительны и лежат в окрестности чисел $a_{n0} = \pi(n - 1/2)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), обращающих $\operatorname{tg} a$ в бесконечность. Разлагая левую часть (26) в ряд по a, нетрудно убедиться, что это уравнение не имеет, кроме $a = \pm i\beta$, других корней, стремящихся к нулю при $\beta \to 0$. Проследим теперь за изменением корней (26) при изменении β. Вследствие непрерывной зависимости (26) от β в конечной точке комплексной плоскости a при изменении β не может возникнуть новый корень. Легко видеть также, что новые корни не могут приходить и из бесконечности. Поэтому достаточно исследовать поведение корней a_n при увеличении β от нуля. Корни a_n при $n > 1$ вещественны и лежат в интервалах $[a_{n0} - 1/2\pi, a_{n0}]$, и соответствующие им значения λ — положительны. Корень a_1 принадлежит отрезку $[0, a_{10}]$ только при $\beta < \beta^*$, где β^* — корень уравнения $3 \operatorname{th}\beta = 2\beta$. При $\beta = \beta^*$ корень a_1 обращается в нуль, а при $\beta > \beta^*$ появляется пара [1]

[1] Следует иметь в виду, что при вещественных a обе части (27) четны по a, и потому, кроме корня a_1, существует еще корень $a_0 = -a_1$, также обращающийся в нуль при $\beta = \beta^*$. Остальным отрицательным корням соответствуют заведомо $\lambda > 0$.

мнимых корней $a = \pm i\chi_1$. Если положить $a = i\chi$ и записать уравнение (26) в форме $F(\chi, \beta) = 0$, то $F(\beta, \beta) = 0$, $F_\chi'(\beta, \beta) > 0$, $F_{\chi\chi}''(\beta, \beta) > 0$.

Следовательно, корень уравнения $F(\chi, \beta) = 0$, близкий к β и приближенно определяемый формулой

$$\chi_1 \approx \beta + \varepsilon = \beta - \frac{2F_\chi'(\beta, \beta)}{F_{\chi\chi}''(\beta, \beta)} \tag{27}$$

всегда меньше β. Поскольку для $\beta = \beta^*$ он равен нулю, то очевидно, что $\chi_1 < \beta$ при любых $\beta > \beta^*$, причем $\chi_1 \to \beta$ с увеличением β. Для $\beta \gg 1$, вычисляя приближенно правую часть (27), найдем $\chi_1 \approx \beta - 2\beta^2 / 3 \operatorname{ch} \beta$.

Мнимым корням $\pm i\chi_1$ также соответствуют положительные значения λ

$$\lambda = \beta^2 + a^2 = \beta^2 - \chi_1^2 \approx 4\beta^3 / 3 \operatorname{ch}^2 \beta \tag{28}$$

Этим доказывается, что для гиперболической зависимости (17) система устойчива к возмущениям с очень большой длиной волны.

Полученные результаты и упоминавшиеся выше аналогии с другими физическими явлениями позволяют предполагать, что в рассматриваемой системе неустойчивость к длинноволновым возмущениям появляется в том случае, когда проводимость растет с увеличением температуры настолько быстро, что $\alpha_0(T_m) \to 0$ при $T_m \to \infty$, т. е. когда решение стационарной задачи неединственно при $\alpha_0 < \alpha^*$ и не существует при $\alpha_0 > \alpha^*$.

Анализ устойчивости в случае коротковолновых возмущений значительно более сложен. Относительно просто исследуется только случай, когда k настолько велико, что в уравнении (9) можно пренебречь первым членом по сравнению с последним. Если имеют место формулы (17), (22), то, исключая ψ из (8), (9), найдем (29)

$$\left(1 + 2\frac{\beta^2}{k^2}\right)\theta'' - 2\frac{\beta^2}{k^2}\theta' \operatorname{tg} \beta y + \left(\lambda - k^2 + \beta^2 - \frac{2\beta^4}{k^2 \operatorname{ch}^2 \beta y}\right)\theta = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0$$

Введем новую переменную $\vartheta = \theta(\operatorname{ch} \beta y)^{2+k^2/\beta^2}$; тогда из (29) получим

$$\vartheta'' + \left(\chi - \frac{\delta}{\operatorname{ch}^2 \beta y}\right)\vartheta = 0, \qquad \vartheta(\pm 1) = 0, \quad \delta = \frac{\beta^4}{k^2}\left(\frac{\beta^2}{k^2} + 1\right)\left(1 + \frac{2\beta^2}{k^2}\right)^{-2}$$

$$\chi = \left[\lambda - k^2 + \beta^2 - \frac{\beta^6}{k^4}\left(1 + 2\frac{\beta^2}{k^2}\right)^{-1}\right]\left(1 + 2\frac{\beta^2}{k^2}\right)^{-1} \tag{30}$$

Решение уравнения (30) может быть представлено через элементарные функции и затем исследовано, однако здесь в этом нет необходимости, так как при $k \gg 1$, $\beta \sim 1$ имеем $\delta \approx \beta^4 / k^2 \ll 1$, $\chi \approx \lambda - k^2$. Следовательно, наименьшее собственное значение λ положительно и по порядку величины равно k^2. Таким образом, распределение температуры в этом случае устойчиво относительно не только длинноволновых возмущений, что было показано выше, но и коротковолновых с $k \gg 1$.

Поступила 25 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Wright J. K. A temperature instability in magnetohydrodynamic flow. Proc. Phys. Soc., 1963, vol. 81, No 3, p. 498—505.
2. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. Вопросы теории плазмы. Госатомиздат, 1963, вып. 2, стр. 132—176.
3. Франц В. Пробой диэлектриков. Изд. иностран. лит., 1961.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике, Изд. АН СССР, 1947.
5. Joseph D. D. Variable viscosity effects on the flow and stability of flow in channels and pipes. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No 11, pt. 1, p. 1761—1771.
6. Witalis E. A. Voltage limit of a thermally ionized one-dimensional gas discharge. J. Appl. Phys., 1964, vol. 35, No 12, p. 3617.
7. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.