3. Sivashinsky G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. Pt I. Derivation of basic equations/Acta Astrounautica.— 1977.— 4.— P. 1177—1206.
4. Минаев С. С. Набор стационарных решений, описывающих ячеистое пламя в случае гидродинамической неустойчивости // ФГВ.— 1992.— 28, № 1.— С. 35—39.
5. Renardy M. // Physica 28D.— 1987.— P. 155—167.
6. Thual O., Frish U., Henon M. Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flame fronts/J. Physique.— 1985.— 46.— P. 1485—1494.
7. Michelson D. M., Sivashinsky G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames, Pt II. Numerical experiments // Acta Astrounautica.— 1977.— 4.— P. 1207—1221.
8. Groff E. G. The cellular nature of confined spherical propane-air flames/Combust. Flame.— 1982.— 48, № 1.— P. 51—52.

630090, г. Новосибирск,
Институт теплофизики
СО РАН

Поступила в редакцию 26/IV 1993

УДК 536.46

К. О. Сабденов, С. Н. Постников

К ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ

(сообщение III)

Изложена заключительная часть теории ламинарного пламени, опирающаяся на представление о минимуме производства энтропии в слабонеравновесных системах. Внесена поправка в формулу Зельдовича—Франк-Каменецкого—Ландау для скорости ламинарного пламени при больших числах Льюиса. Если вычисленное в работе значение скорости пламени соответствует устойчивому режиму распространения фронта, то рассматриваемая задача становится аналогичной задаче Колмогорова—Петровского—Пискунова. При достаточно больших порядках реакции ширина температурно-диффузионного пограничного слоя растет по логарифмическому закону.

Слабонеравновесные системы характеризуются тем, что производство энтропии dS/dt в них минимально [1]. Для ламинарного пламени это означает, что физически наблюдаемая скорость пламени должна быть наименьшей, если установлено, что процесс слабонеравновесный. Это легко видеть из следующих рассуждений. Производство энтропии в единице объема (стационарное пламя)

$$\frac{dS_V}{dt} = v\frac{dS_V}{dx} = v\left(\frac{\partial S_V}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dx} = v\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dx}.$$

Используя уравнение состояния идеального газа, имеем

$$v\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dx} = j\frac{Rc_p}{p}\frac{dT}{dx},$$

где $j = \rho v$ — поток, постоянный во всем пространстве. Тогда полное производство энтропии $\dot{S} = dS/dt$ в неограниченном объеме с единичной площадью находится из выражения

$$\dot{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} j\frac{Rc_p}{p}\frac{dT}{dx}dx = j\frac{Rc_p}{p}(T_b - T_0) = j\frac{a_0RQ}{p}.$$

Здесь Q — тепловой эффект химических реакций; a_0 — начальная концентрация реагента; R — универсальная газовая постоянная; p — давление. Названные величины в теории ламинарного горения являются внешними параметрами, а поток j определяется самим процессом горения при заданных внешних параметрах. Тогда производство энтропии минимально, если минимален поток j. Требование минимальности $\dot{S}$ вполне законно, так как уравнения ламинарного пламени (1) и (2) сформулированы в рамках слабо неравновесной термодинамики (используются законы Фурье и Фика).

Рассмотрим задачу:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \frac{d\Theta}{d\xi} + L\,(1 - b)^n e^{-\frac{1}{\beta\Theta}} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{Le}\,\frac{d^2 b}{d\xi^2} + \frac{db}{d\xi} + L\,(1 - b)^n e^{-\frac{1}{\beta\Theta}} = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\xi \to +\infty: \quad \Theta = b = 0, \tag{3}$$

$$\xi \to -\infty: \quad \Theta = b = 1, \tag{4}$$

$$S - \min. \tag{5}$$

Здесь

$$b = \frac{a_0 - a}{a_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_b - T_0}, \quad \xi = \frac{vc_p}{\lambda}\int_0^x \rho\,dz,$$
$$\beta = \frac{R\,(T_b - T_0)}{E} \ll 1, \quad \mathrm{Le} = \frac{c_p\rho D}{\lambda}, \quad L = \frac{\lambda}{c_p\rho}\,\frac{k_0}{v^2}a_0^{n-1}. \tag{6}$$

Обозначения в основном общепринятые. Дополнительно предполагаются зависимости кинетических коэффициентов от температуры $\lambda \sim T$, $D \sim T^2$ и привлекаются соотношения $\rho v = \mathrm{const}$, $\rho T = \mathrm{const}$.

Для решения поставленной задачи разобьем все пространство $\xi \in\,]-\infty;\, +\infty[$ на две части в точке $\xi = 0$. В области $\xi > 0$ ищем решение

$$\Theta_1 = \gamma_1 e^{\xi} + u_1(\xi), \tag{7}$$

$$b_1 = \gamma_2 e^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}\xi} + w_1(\xi), \tag{8}$$

где $u_1(\xi)$, $w_1(\xi)$ — новые неизвестные функции, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$u_1(0) = w_1(0) = u_1\big|_{\xi\to+\infty} = w_1\big|_{\xi\to+\infty} = 0.$$

Обобщенное преобразование Франк-Каменецкого дает

$$e^{-\frac{1}{\beta\Theta_1}} \approx e^{-\frac{e^{\xi}}{\beta\gamma_1}}\, e^{\frac{e^{2\xi}u_1}{\beta\gamma_1^2}}.$$

Обозначив далее

$$V(\xi) = \frac{e^{2\xi}}{\beta\gamma_1^2}\,u_1(\xi), \tag{9}$$

$$F(\xi) = \frac{e^{2\xi}}{\beta\gamma_1^2}\,w_1(\xi), \tag{10}$$

перепишем (1) и (2):

$$\beta\gamma_1^2 e^{-2\xi}\frac{d^2V}{d\xi^2} - 3\beta\gamma_1^2 e^{-2\xi}\frac{dV}{d\xi} + 2\beta\gamma_1^2 e^{-2\xi}V + B(\xi, V, F)\cdot e^{-\frac{e^{\xi}}{\beta\gamma_1}} = 0,$$

$$\mathrm{Le}\,\beta\gamma_1^2 e^{-2\xi}\frac{d^2F}{d\xi^2} - \beta\gamma_1^2\,(4\mathrm{Le} - 1)\,e^{-2\xi}\frac{dF}{d\xi} +$$
$$+ 2\beta\gamma_1^2\,(2\,\mathrm{Le} - 1)\,e^{-2\xi}F + B(\xi, V, F)\cdot e^{-\frac{e^{\xi}}{\beta\gamma_1}} = 0,$$

$$B(\xi, V, F) = L\,(1 - \gamma_2 e^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}\xi} - \beta\gamma_1^2 e^{-2\xi}F)^n e^{V}.$$

С переходом к новой независимой переменной

$$p = e^{\frac{e^{\xi} - 1}{\beta\gamma_1}}, \quad e^{\xi} = 1 + \beta\gamma_1 \ln p \tag{11}$$

последние уравнения примут вид

$$p^2 \frac{d^2V}{dp^2} + p \frac{dV}{dp} \left(1 - \beta \frac{2\gamma_1}{1 + \beta\gamma_1 \ln p}\right) + \frac{2\beta^2\gamma_1^2 V}{(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^2} + \beta \frac{B}{p} = 0,$$

$$\mathrm{Le}\, p^2 \frac{d^2F}{dp^2} + \mathrm{Le}\, p \frac{dV}{dp} \left[1 + \frac{\beta\gamma_1}{1 + \beta\gamma_1 \ln p} \left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 3\right)\right] +$$

$$+ 2\beta^2\gamma_1^2 \frac{(2\,\mathrm{Le} - 1)\, F}{(1 + \beta\gamma_1 \ln p)_2} + \beta \frac{B}{p} = 0,$$

$$B = Le^{-\frac{1}{\beta\gamma_1}} \left[1 - \frac{\gamma_2}{(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{\frac{1}{\mathrm{Le}}}} - \beta \frac{\gamma_1^2 F}{(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^2}\right]^n e^V.$$

Предполагая, что $\gamma_1 = 1 - \beta C$ (C — некоторая константа, в общем случае функция порядка реакции n), во всех слагаемых за исключением второго члена в выражении для $B\,(p,\ V,\ F)$ положим $\gamma_1 = 1$. В выражениях, стоящих при производных, можно пренебречь членами с β:

$$(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{-1} \approx 1.$$

Аналогично в выражениях для $B\,(p,\ V,\ F)$ положим

$$\beta \frac{\gamma_2^2 F}{(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^2} \approx \beta F.$$

Очевидно, сказанное нельзя распространить в общем случае на

$$\gamma_2\,(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}},$$

так как при $\mathrm{Le} \to 0$ малая величина $\beta\gamma_1 \ln p$ с слабой логарифмической зависимостью будет компенсироваться большой степенью Le^{-1}.

Учитывая сказанное выше и отбрасывая члены, пропорциональные β^2, получим

$$p^3 \frac{d^2V}{dp^2} + p^2 \frac{dV}{dp} + \beta B\,(p,\ V,\ F) = 0, \tag{12}$$

$$\mathrm{Le}\, p^3 \frac{d^2F}{dp^2} + \mathrm{Le}\, p^2 \frac{dF}{dp} \left(1 + \frac{\beta}{\mathrm{Le}}\right) + \beta B\,(p,\ V,\ F) = 0, \tag{13}$$

$$B\,(p,\ V,\ F) = Le^{\frac{1}{\beta\gamma_1}} \left[1 - \frac{\gamma_2}{(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{\frac{1}{\mathrm{Le}}}} - \beta F\right]^n e^V. \tag{14}$$

Так как из (12) и (13) вытекает равенство

$$p \frac{d^2V}{dp^2} + \frac{dV}{dp} = \mathrm{Le}\, p \frac{d^2F}{dp^2} + \mathrm{Le} \frac{dF}{dp} \left(1 + \frac{\beta}{\mathrm{Le}}\right),$$

интегрируя его, приходим к необходимому в дальнейшем соотношению

$$p \frac{dV}{dp} = \mathrm{Le}\, p \frac{dF}{dp} + \beta F. \tag{15}$$

Таким образом, (12) и (15) представляют собой третье уравнение пограничного слоя. Если $\mathrm{Le} \gg \beta$, то (15) переходит в равенство

$$p \frac{dV}{dp} - \mathrm{Le}\, p \frac{dF}{dp} \quad \text{или} \quad V = \mathrm{Le}\, F.$$

Тогда

$$\beta F = \beta \frac{V}{\mathrm{Le}} \ll 1, \quad (1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{\frac{1}{\mathrm{Le}}} \approx 1.$$

Очевидно, последнее приближение тем лучше, чем больше Le. В этом случае для решения задачи достаточно рассмотреть только первое уравнение пограничного слоя

$$p^3 \frac{d^2V}{dp^2} + p^2 \frac{dV}{dp} + \delta e^V = 0, \tag{16}$$

$$\delta = L\beta (1 - \gamma_2)^n e^{-1/\beta\gamma_1}.$$

Если Le $\sim \beta$,

$$(1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{\frac{1}{\mathrm{Le}}} = \left[(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\beta \frac{\gamma_1 \ln p}{\mathrm{Le}}} \approx e^{\beta \frac{\gamma_1 \ln p}{\mathrm{Le}}} = p^{\frac{\beta\gamma_1}{\mathrm{Le}}},$$

где $x = \beta\gamma_1 \ln p$, и использовано определение функции экспоненты. При Le $\to 0$ из (15) находим

$$\beta F = p \frac{dV}{dp}.$$

В это же время

$$\gamma_2 (1 + \beta\gamma_1 \ln p)^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}} = 0.$$

Тогда из (12) находим

$$p^3 \frac{d^2V}{dp^2} + p^2 \frac{dV}{dp} + \delta \left(1 - p \frac{dV}{dp}\right)^n e^V = 0,$$

$\delta = L\beta e^{-\frac{1}{\beta\gamma_1}}$. Это — второе уравнение пограничного слоя.

Перейдем к рассмотрению задачи в области $\xi < 0$. Здесь распределения температуры и выгорания будем искать в виде

$$\Theta = 1 - \beta u_2 (\xi), \quad b = 1 - \beta w_2 (\xi). \tag{17}$$

Положив

$$e^{-1/\beta\Theta_2} \approx e^{-1/\beta} e^{-u_2} \tag{18}$$

для $u_2 (\xi)$ и $w_2 (\xi)$, получаем

$$\frac{d^2u_2}{d\xi^2} + \frac{du_2}{d\xi} - \Omega w_2^n e^{-u_2} = 0, \tag{19}$$

$$\mathrm{Le} \frac{d^2w_2}{d\xi^2} + \frac{dw_2}{d\xi} - \Omega w_2^n e^{-u_2} = 0, \tag{20}$$

$$\Omega = L\beta^{n-1} e^{-1/\beta}. \tag{21}$$

Найдем скорости пламени при достаточно больших Le. В этом случае, как уже сказано, справедливо уравнение (16), которое имеет общее решение

$$V = \ln \left(\frac{pC_1}{4 \operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{\frac{C_1\delta}{2}} \ln \frac{2}{\sqrt{p}} + C_2 \right)} \right).$$

Граничные условия для него $V < +\infty$ при $p \to +\infty$ (оно является следствием условия (5) и этот вопрос еще будет обсуждаться ниже) и $V = 0$ при $p = 1$ дают следующие значения констант интегрирования

$$C_1 = \frac{2}{\delta}, \quad C_2 = \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{2\delta}} - \ln 2.$$

Таким образом, распределение температуры в области $\xi > 0$ находится из выражения

$$\Theta_1 (\xi) = \gamma_1 e^{-\xi} + \beta\gamma_1^2 e^{-2\xi} \ln \frac{p}{2\delta \operatorname{ch}^2 \left(\frac{1}{2} \ln p - \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \right)}, \tag{22}$$

а выгорания —

$$b_1(\xi) = \gamma_2 e^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}\xi} + \beta\gamma_1^2 \frac{e^{-2\xi}}{\mathrm{Le}} \ln \frac{p}{2\delta \operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}\ln p - \operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{2\delta}}\right)}. \tag{23}$$

Значения γ_1, γ_2, δ подлежат определению.

Заметим, что функции V и F представляют собой малые отклонения от единицы вблизи точки $\xi = 0$. Очевидно, равенство

$$V = \mathrm{Le}\, F \tag{24}$$

устанавливает подобие между этими отклонениями температуры и выгорания. Но, с другой стороны, функции u_2 и w_2 тоже являются малыми отклонениями от единицы. Поэтому для них аналогично должно выполняться такое же соотношение подобия. Из (19) и (20) видно, что это будет иметь место, если первые производные — малые более высокого порядка по β относительно вторых производных, так как (24) получено отбрасыванием членов более высокого порядка по степеням β. Но это возможно, если Ω — большое число (за счет малости β).

Сделаем следующие преобразования:

$$\delta = L\beta(1-\gamma_2)^n e^{-1/\beta\gamma_1} \approx L\beta(1-\gamma_2)^n e^{-1/\beta} e^{-C} = \Omega\beta^2\left(1-\frac{\gamma_2}{\beta}\right)^n e^{-C},$$

тогда

$$\Omega = \frac{\delta e^C}{\beta^2}\left(\frac{\beta}{1-\gamma_2}\right)^n. \tag{25}$$

Отбросив в (19) и (20) первые производные, получим

$$u_2 = \mathrm{Le}\, w_2, \tag{26}$$

$$\frac{d^2u_2}{d\xi^2} = \frac{\Omega}{\mathrm{Le}^n} u_2^n e^{-u_2}.$$

Однократное интегрирование дает

$$\left(\frac{du_2}{d\xi}\right)^2 = \frac{2\Omega}{\mathrm{Le}^n} e^{-u_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_2^{n+k}}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}. \tag{27}$$

Константа интегрирования положена равной нулю, согласно граничному условию

$$\left.\frac{du_2}{d\xi}\right|_{u_2=0} = 0.$$

Полагая при $\xi = 0$ $u_2 = C(n)$— некоторая функция порядка реакции n и приравнивая значения Θ_1 и Θ_2 при $\xi = 0$ и их производных до второго порядка включительно (при этом отбрасываем члены более высокого порядка по степеням β), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\gamma_1 = 1 - \beta C(n),$$

$$1 - 2\delta = \beta^2 \frac{2\Omega}{\mathrm{Le}^n} e^{-C(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(n)^{n+k}}{(n+1)\dots(n+k)},$$

$$\frac{\delta}{\beta} = \beta \frac{\Omega}{\mathrm{Le}^n} C(n)^n e^{-C(n)}.$$

Легко убедиться, что третье равенство выполняется автоматически. Учитывая (24),

$$1 - \gamma_2 = \beta \frac{C(n)}{\mathrm{Le}},$$

$$\beta \frac{\Omega}{\mathrm{Le}^n} C(n)^n e^{-C(n)} = \beta \frac{C(n)^n e^{-C(n)}}{\mathrm{Le}^n} \frac{\delta e^{C(n)}}{\beta^2} \frac{\mathrm{Le}^n}{C(n)^n} = \frac{\delta}{\beta},$$

где использовано равенство (25). Тогда одна из неизвестных величин, например $C(n)$, остается не определенной. Обозначив далее

$$s = L\beta^{n+1}e^{-1/\beta}/\mathrm{Le}^n,$$

из второго уравнения системы находим

$$s^{-1} = 2e^{-C(n)}C(n)^n\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C(n)^k}{(n+1)\ldots(n+k)}\right],$$

откуда для квадрата потока имеем

$$j^2 = \frac{\lambda\rho}{c_p}k_0 a_0^{n-1}2e^{-C}C^n\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k}{(n+1)\ldots(n+k)}\right]\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{Le}^n}e^{-1/\beta}. \tag{28}$$

Если n — натуральное число, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^{n+k}}{(n+1)\ldots(n+k)} = n!\left(e^C - \sum_{k=0}^{n}\frac{C^k}{k!}\right) = n!\left(e^C - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^k}{k!}\right) - C^n.$$

С учетом последнего формула (28) принимает вид

$$j^2 = 2n!\left(1 - e^{-C}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^k}{k!}\right)\frac{\lambda\rho}{c_p}k_0 a_0^{n-1}\frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{Le}^n}e^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Встает вопрос: как определить $C(n)$? Однозначного ответа, видимо, нет. Здесь предлагается следующий вариант (на наш взгляд, более реальный). Проинтегрируем (27):

$$\int\frac{du_2}{\left[e^{-u_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_2^{n+k}}{(n+1)\ldots(n+k)}\right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\frac{\Omega}{\mathrm{Le}^n}}(\xi + C_3). \tag{29}$$

Если $n \geqslant 1$, то ввиду инвариантности задачи (1)—(5) относительно замены $\xi \to \xi + \tau$, где τ — некоторый постоянный параметр, положим $C_3 = 0$. Полагая далее в (29) $\xi = 0$, находим

$$\int\frac{dC}{\left[e^{-C}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^{n+k}}{(n+1)\ldots(n+k)}\right]^{\frac{1}{2}}} = 0. \tag{30}$$

Это трансцендентное уравнение будет определять $C(n)$ при $n \geqslant 1$. Логично считать, что оно задает $C(n)$ и для $n < 1$. Не умаляя общности, дальнейшие рассуждения будем проводить для натуральных n. Для таких n (30) примет вид

$$\int\frac{dC}{\left(1 - e^{-C}\sum_{k=0}^{n}\frac{C^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int\left[1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(e^{-C}\sum_{k=0}^{n}\frac{C^k}{k!}\right)^l\right]^{\frac{1}{2}}dC. \tag{31}$$

Результаты численного решения (31) для небольших n показывают, что с точностью до отбрасываемых под интегралом малых членов вида

$$\left(e^{-C}\sum_{k=0}^{n}\frac{C^k}{k!}\right)^N,$$

где N — некоторое достаточно большое число, справедливо $C(n) = n$. Теперь можно выписать окончательное выражение для квадрата потока:

$$j^2 = 2e^{-n}n^n \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)\dots(n+k)}\right] \frac{\lambda\rho}{c_p} k_0 a_0^{n-1} \frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{Le}^n} e^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{32}$$

а для натуральных n имеем эквивалентное, но более простое соотношение

$$j^2 = 2n! \left(1 - e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}\right) \frac{\lambda\rho}{c_p} k_0 a_0^{n-1} \frac{\beta^{n+1}}{\mathrm{Le}^n} e^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Эта формула (как и (32)) отлична от формулы Зельдовича — Франк-Каменецкого — Ландау [2]. Причины различия будут раскрыты ниже.

Если $n < 1$, то реакция заканчивается на некотором конечном расстоянии ξ_* от точки $\xi = 0$. Его можно найти приближенно следующим образом. Так как $u_2(\xi) \to 0$ при $\xi \to -\xi_*$ и $u_2(0) = C(n) \to 0$ при $n \to 0$, то удержим в правой части (27) только первый член суммы. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{du_2}{d\xi}\right)^2 = \frac{2\Omega}{\mathrm{Le}^n} \frac{u_2^{n+1}}{1+n}$$

и учитывая $u_2(\xi = -\xi_*) = 0$, находим

$$u_2 = \left[\frac{1-n}{2} \left(\frac{2\Omega}{(1+n)\,\mathrm{Le}^n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{1-n}} (\xi + \xi_*)^{\frac{2}{1-n}}. \tag{32'}$$

Поскольку $u_2(0) = n$, то из (32') находим

$$n^{\frac{1-n}{2}} = \frac{1-n}{\sqrt{2}\,\beta} \xi_* \sqrt{\frac{s}{1+n}} \quad \text{или} \quad \xi_* = \beta \frac{n^{\frac{1-n}{2}}}{1-n} \sqrt{\frac{2(1+n)}{s}}. \tag{33}$$

Аналогично из выражения для s^{-1} следует $s^{-1} \approx 2C^n = 2n^n$. Подставив его в (33), окончательно имеем соотношение

$$\xi_* = \beta \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{1-n}.$$

Качественно оно правильно отражает поведение ξ_* от β и n.

Сделаем следующие замечания:

1. Произвольную константу интегрирования (27) формально можно определить следующим образом. Так как при нулевом порядке реакции $u_2 \equiv 0$, то и $C(0) = 0$. При $n = 0$ из (31) находим

$$\int \frac{dC}{\sqrt{1 - e^{-C}}} = 2 \operatorname{arch} e^{\frac{1}{2}C} = C_3.$$

Чтобы последнее равенство выполнялось при $C(0) = 0$, произвольную константу C_3 (которую пока считаем неопределенной) необходимо положить равной нулю.

2. Покажем, что условие $V|_{\eta\to\infty} < +\infty$ определяет минимальное значение j. При неопределенном C_1 после требования равенства значений Θ_1 и Θ_2 и их производных приходим к системе

$$\gamma_1 = 1 - \beta C,$$

$$\frac{C_1\delta}{2}\left(1 - \frac{4}{C_1}\right) = \beta^2 \frac{2\Omega}{\mathrm{Le}^n} e^{-C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^{n+k}}{(n+1)\dots(n+k)},$$

$$\frac{\delta}{\beta} = \beta \frac{\Omega}{\mathrm{Le}^n} C^n e^{-C}.$$

Второе уравнение дает

$$C_1 = 4\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k}{(n+1)\dots(n+k)}\right] = 4\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)\dots(n+k)}\right].$$

При $\xi \to +\infty$

$$\Theta_1(\xi) = \gamma_1 e^{-\xi} + \gamma_1 e^{-\xi}(1 - \sqrt{q}) + 0(e^{-2\xi}),$$

$$q = 2se^{-n}n^n \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)...(n+k)}\right].$$

Возможные значения q лежат в промежутке $]0; 1[$. Выражение

$$j^2 = 2e^{-n}n^n \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)...(n+k)}\right] \frac{\lambda\rho}{c_p} \frac{k_0 a_0^{n-1}}{q\mathrm{Le}^n} \beta^{n+1} e^{\frac{1}{\beta}}$$

показывает, что минимальному значению j отвечает $q = 1$.

3. При математически строгом подходе комплекс $\beta F = \beta V/\mathrm{Le}$ в (14) отбрасывать нельзя, так как $1 - \gamma_2 = \beta C/\mathrm{Le}$ — величина одного порядка с βF. Поэтому изложенный выше прием нуждается в обосновании. Учитывая, что $C = n$, вместо (16) необходимо рассматривать уравнение

$$p^3 \frac{d^2V}{dp^2} + p^2 \frac{dV}{dp} + \delta \left(1 - \frac{V}{n}\right)^n e^V = 0. \tag{34}$$

Так как $\delta < 1$ и $\delta \to 0$ при $n \to \infty$ (последнее следует из решения (16), но как будет показано ниже, это следует и из рассмотрения (34)), то и $V \to 0$ при $n \to \infty$. Записав

$$\left(1 - \frac{V}{n}\right)^n e^V = 1 - \frac{V^2}{2n} + ...,$$

решение (34) можно искать в виде разложения по степеням δ, так как

$$V|_{p\to\infty} < +\infty, \quad V|_{p=1} = 0.$$

Из (34) находим

$$V = \delta \frac{p-1}{p} - \frac{\delta^3}{36n} \frac{(p-1)(11p^2 - 7p + 2)}{p^3} + O(\delta^4).$$

Использование равенства $V = \delta(p-1)/p$ уже дает удовлетворительный результат:

$$j^2 \sim 2n!\, K(n) \left[1 - \frac{1}{8\pi n K(n)}\right],$$

$$K(n) = 1 - e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}.$$

Для первого порядка реакции отличие последней формулы от (33) составляет $\sim 6\ \%$.

4. Примем за ширину пограничного слоя $\Delta\xi$ удвоенную величину ξ^*, следующую из равенства

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln p^* - \mathrm{arch}\frac{1}{\sqrt{2\delta}}\right) = 1.$$

Это дает $\Delta\xi = 2\beta\, \mathrm{arch}\left(\frac{n!}{n^n} e^{-n} K(n)\right)$ и при достаточно больших n

$$\Delta\xi = \beta\, \mathrm{arch}(2\pi n K^2) \approx \beta \ln(4\pi n K^2)$$

зависимость $K(n)$ очень слабая. Поэтому имеет место логарифмический закон роста ширины пограничного слоя от порядка реакции.

5. Если в (16) перейти к новой переменной $y = 2/\sqrt{p}$, получим

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dV}{dy} + \delta e^V = 0. \tag{35}$$

Это — уравнение стационарной теории теплового взрыва для цилиндрического сосуда радиуса 2. И если постулировать эквивалентность условия термодинамической устойчивости ламинарного пламени с условием существования решения (35) в рамках стационарного теплового взрыва, то требование ограниченности V при $p \to \infty$ представляется само собой разумеющимся. Отсюда следует интересный вывод: термодинамической устойчивости ламинарного пламени соответствует минимальная ее скорость из континиума возможных скоростей, т. е. приходим к выводу, сформулированному в задаче Колмогорова — Петровского — Пискунова [2].

6. Причины отличия формулы (33) (или (32)) от формулы Зельдовича — Франк-Каменецкого — Ландау заключаются в противоречивости метода вычисления скорости пламени Зельдовича — Франк-Каменецкого. Действительно, весь фронт пламени условно делится на три зоны: прогрева, где функция тепловыделения пренебрежимо мала; «сильного» пограничного слоя, где вклад последней значителен, но в ней экспоненциальный множитель преобладает над степенным и «слабого» пограничного слоя, где в функции тепловыделения вклад степенного множителя преобладает над экспоненциальным.

Ясно, что уравнения третьей зоны (в общем случае) нельзя распространять на вторую. Очевидно, также что $C(n) = u_2(0)$— конечная величина при любом β. К математическому содержанию метода Зельдовича — Франк-Каменецкого приходим, если поступимся этим.

В упомянутом методе неявно предполагается, что в зоне сильного пограничного слоя справедливо (26) (из-за узости зоны «сильного» пограничного слоя в некотором приближении это верно) и значение

$$\beta u_2(\xi = \tilde{\xi}) = \beta C \to 0$$

при $\beta \to 0$ и одновременно $C \to \infty$ (что предполагает зависимость C от β). Тогда условие равенства первых производных (при $\beta \to 0$) в точке ξ приводит к соотношению

$$1 = \beta^2 \frac{2\Omega}{\mathrm{Le}^n} \int_0^C u_2^n e^{-u_2} du_2 = \beta^2 \frac{2\Omega}{\mathrm{Le}^n} \Gamma(n+1),$$

откуда, разрешая относительно j^2, получаем формулу Зельдовича — Франк-Каменецкого — Ландау (для $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$j^2 = 2n! \frac{\lambda\rho}{c_p} k_0 a_0^{n-1} \frac{\beta^n + 1}{\mathrm{Le}^n} e^{-\frac{1}{\beta}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пригожин И. Р.** От существующего к возникающему.— М.: Наука, 1985.— 328 с.
2. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.— 478 с.

634010, г. Томск,
Государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 27/IV 1992,
после доработки — 3/VII 1992

УДК 536.46:533.6+534.222.2

П. К. Третьяков

ПСЕВДОСКАЧКОВЫЙ РЕЖИМ ГОРЕНИЯ

Приводятся результаты анализа горения топлив в канале постоянного сечения со сверхзвуковой скоростью потока. С использованием экспериментальных данных о давлении на стенке канала и одномерной методики, учитывающей особенности горения в псевдоскачке, рассчитаны скорости тепловыделения. Показано, что средняя по длине зоны горения скорость тепловыделения,отнесенная к максимально возможной, зависит от отношения длины зоны горения к длине псевдоскачка в изотермическом случае при торможении потока до числа Маха М = 1,0 и не