

УДК 532.517.4:533.9

## МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ЯВНЫМ ВЫДЕЛЕНИЕМ КОГЕРЕНТНОЙ ГЕНЕРАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ

В. В. Боголепов, В. А. Жаров, И. И. Липатов, Ю. И. Хлопков\*

Центральный аэрогидродинамический институт, 140180 Жуковский

\* Московский физико-технический институт, 140180 Жуковский

С использованием метода моментов в пространстве волновых чисел предложен класс моделей развитого турбулентного течения несжимаемой жидкости в пограничном слое на пластине, основанных на анализе уравнений Навье — Стокса, описывающих поведение динамических когерентных структур, связанных с генерацией завихренности, а также стохастической компоненты. В явном виде приведен континуальный аналог динамических уравнений когерентной структуры. Показано, что в общем случае стохастическая компонента должна удовлетворять системе уравнений кинетического типа, которая при определенных предположениях сводится к одному уравнению. Показано также, что наличие когерентных структур приводит к обобщению понятия статистической однородности.

**Введение.** Трудность описания турбулентного движения жидкости обусловлена, в частности, тем, что спектр пульсаций является непрерывным. В настоящее время существует два способа описания турбулентного движения жидкости. В одном из них, предложенном Ж. Буссинеском [1] и Л. Прандтлем [2], между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций устанавливается линейная связь, а для коэффициента пропорциональности используется теория длины смещения. При этом непрерывность спектра связана с зависимостью длины смещения от координат (например, в пограничном слое длина смещения оказывается пропорциональной расстоянию от стенки). Следует отметить, что при этом постановка задачи, например о пограничном слое, является существенно стационарной, и, кроме того, такой вид тензора напряжений не выходит за рамки физических граничных условий.

Другой способ описания турбулентного движения предложен Ж. Смагоринским [3] (см. также [4]). В такой постановке численно решается задача турбулентного обтекания. При этом используется структура турбулентного потока, в соответствии с которой сетка численной схемы выбирается таким образом, чтобы волновое число, построенное по размеру сетки, попадало в инерционную область. Тогда все величины, имеющие размер ячейки сетки или меньше, можно осреднить исходя из известных результатов однородной и изотропной турбулентности, что приводит к эффективному (так называемому подсеточному) тензору напряжений с некоторой (по Смагоринскому, линейной) связью с тензором скоростей деформаций. Следует отметить, что для длинноволновой части постановка задачи оказывается нестационарной. В качестве исходных берутся уравнения Рейнольдса, к решению которых добавляется операция фильтрации низкочастотной части. Таким образом, эта постановка, по существу, связана с выделением длинноволнового компонента

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-01239, 00-15-96069).

движения, т. е. является асимптотикой. Однако при постановке задачи допускается непрерывность с точки зрения асимптотических методов.

Модель с линейной связью тензора напряжений не описывает ряд точно установленных в настоящее время физических эффектов [5]: обратный поток энергии по спектру, анизотропию тензора напряжений, наличие когерентных структур. Современные методы [4] позволяют получить более сложную, нелинейную связь тензора напряжений с тензором скоростей деформаций. При этом уточняется физическое содержание теории, но возникают дополнительные трудности: тензор напряжений содержит производные, которые повышают порядок исходных уравнений, что требует введения дополнительных граничных условий.

В описании коротковолновой части спектра также много неопределенного. Современные методы исследования турбулентных движений оперируют некоторыми случайными силами, спектр которых задается заранее. Однако физически такая сила связана с тепловыми флуктуациями в неоднородном потоке газа [6]. В настоящее время даже в линейном случае в пограничном слое не получено решение задачи об определении характеристик таких флуктуаций. Более того, имеется два подхода к решению этой задачи, которые можно назвать ланжевенским (стохастическим) и лиувилевским (динамическим).

Тем не менее при постановке задачи о турбулентных пульсациях флуктуации, несмотря на малость, представляют собой коротковолновую асимптотику и в некотором смысле являются граничным условием при предельном переходе к большим волновым числам.

В задаче об однородной и изотропной турбулентности длинноволновая составляющая (когерентная структура) задается искусственно. В турбулентном пограничном слое когерентная структура — это физически вполне определенный процесс генерации завихренности [7, 8], который должен описываться некоторой системой уравнений или конкретным выражением для компонент поля скорости, представляющим собой граничное условие при малых волновых числах.

Таким образом, по мнению авторов данной работы, для корректного решения задачи о турбулентных пульсациях необходимо знать длинноволновую (когерентную структуру) и коротковолновую составляющие турбулентных пульсаций. Решение в промежутке между большими и малыми волновыми числами должно удовлетворять этим граничным условиям. Используя современный метод анализа подобных систем (например, метод рекурсивной ренормгруппы [4]), при наличии этих двух граничных условий можно попытаться решить задачу полностью. Однако ни длинноволновая, ни тем более коротковолновая асимптотики в настоящее время неизвестны. Поэтому если и возможна некоторая постановка задачи, то, скорее всего, она должна быть эклектической.

В данной работе предпринята попытка определить когерентную составляющую в турбулентном пограничном слое на пластине с помощью метода моментов [9].

**1. Формулировка задачи.** Рассматривается возможность построения некоторой совокупности моделей описания турбулентного поля течения в пограничном слое в маломодовом [10] приближении (в простейшем случае одномодовом). Одной из особенностей турбулентного пограничного слоя является наличие малого параметра  $\varepsilon$ , равного по порядку величины корню квадратному из безразмерного инкремента волн Толлмина — Шлихтинга (при этом число Рейнольдса, которое велико по определению, ограничено соотношением  $\varepsilon^2 R \gg 1$ ). Как показывают вычисления [11], все моды уравнения Орра — Зоммерфельда устойчивы на профиле скорости турбулентного пограничного слоя. Члены третьего порядка по амплитуде могут изменить эту ситуацию за счет добавления в уравнения для пульсаций генерационного члена, пропорционального интегральной интенсивности пульсаций. Однако обнаруженный в эксперименте берстинг (периодический динамический процесс генерации завихренности вблизи стенки), выявленные в вычислениях низшие моды

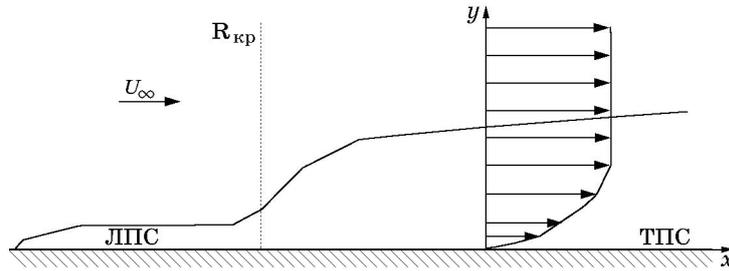


Рис. 1. Пространственная конфигурация поля течения в пограничном слое (ЛПС — ламинарный пограничный слой; ТПС — турбулентный пограничный слой)

поля турбулентных пульсаций, допускающие трехволновой резонанс, а также физические соображения (наличие механизма передачи энергии от среднего потока к турбулентным пульсациям) свидетельствуют о том, что, скорее всего, генерация пульсаций энергии осуществляется за счет когерентной структуры, которая сама является нестационарным вихревым образованием.

В связи с вышесказанным рассматривается вариант описания пограничного слоя, содержащий наряду со стохастическими флуктуациями нестационарные динамические когерентные структуры. Используется метод моментов в пространстве волновых чисел [9]. Для решения полученных таким образом уравнений применяется метод многих масштабов.

Поле скоростей разлагается на две составляющие: среднюю по времени и флуктуирующую. Уравнения для когерентной составляющей отделяются от уравнений для случайных пульсаций в явной форме за счет трехволнового резонанса волн Толлмина — Шлихтинга дискретного спектра, т. е. в итоге имеет место тройное разложение [8] поля скоростей турбулентного течения. При этом для некогерентной составляющей в общем случае получается система кинетических уравнений, которая при определенных предположениях может быть сведена к одному уравнению.

Следуя [10], рассмотрим развитый турбулентный пограничный слой (рис. 1). Исходные уравнения, которым по предположению удовлетворяет нестационарное поле течения (уравнения Навье — Стокса), можно разложить на уравнения для среднего поля  $U, V$  (в данной работе в приближении пограничного слоя) и поля пульсаций:

$$u = U + \varepsilon u', \quad v = \varepsilon^2 V + \varepsilon v', \quad w = \varepsilon w'.$$

Уравнения для пульсаций приводятся к системе, включающей уравнение Орра — Зоммерфельда для вертикальной компоненты скорости и уравнение Сквайра для вертикальной компоненты завихренности [12]. Поскольку разложение по собственным функциям линейных частей указанных уравнений обладает полнотой [13], решение задачи можно представить в виде рядов по собственным функциям.

**2. Уравнения для амплитуд в одномодовом приближении.** Разложим вертикальные компоненты скорости и завихренности по собственным функциям уравнения Орра — Зоммерфельда и Сквайра соответственно:

$$\hat{v}_{\mathbf{k}}(y) = \sum_{n=0}^N A_{\mathbf{k}}^{(n)} \varphi_{\mathbf{k}}^{(n)}(y) + \int_{-\infty}^{\infty} A_{\mathbf{k}}^{(\mu)} \varphi_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(y) d\mu, \quad \hat{\eta}_{\mathbf{k}}(y) = \sum_{n=0}^N B_{\mathbf{k}}^{(n)} \psi_{\mathbf{k}}^{(n)}(y) + \int_{-\infty}^{\infty} B_{\mathbf{k}}^{(\mu)} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mu)}(y) d\mu.$$

Здесь  $\hat{v}_{\mathbf{k}}, \hat{\eta}_{\mathbf{k}}$  — фурье-образы вертикальной компоненты скорости и завихренности, сумма берется по модам (собственным функциям операторов Орра — Зоммерфельда и Сквайра)

дискретного спектра, а интеграл — по модам непрерывного. В одномодовом приближении получим (для упрощения выкладок рассматривается только одна неустойчивая мода дискретного спектра, так как моды более высокого порядка имеют большие декременты)

$$\begin{aligned}\hat{v}_{\mathbf{k}}(y) &= A_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}(y) + \dots, & \hat{\eta}_{\mathbf{k}}(y) &= B_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(y) + \dots, \\ \hat{u}_{\mathbf{k}}(y) &= \frac{i}{k^2} \left( \alpha \frac{d\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}(y)}{dy} A_{\mathbf{k}} - \beta \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(y) B_{\mathbf{k}} \right) + \dots, \\ \hat{w}_{\mathbf{k}}(y) &= \frac{i}{k^2} \left( \beta \frac{d\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}(y)}{dy} A_{\mathbf{k}} + \alpha \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(y) B_{\mathbf{k}} \right) + \dots\end{aligned}$$

Тогда после подстановки частот волн Толлмина — Шлихтинга

$$A_{\mathbf{k}} = \bar{A}_{\mathbf{k}} \exp(-i \operatorname{Re}[\omega_{OS}^{(0)}]t), \quad B_{\mathbf{k}} = \bar{B}_{\mathbf{k}} \exp(-i \operatorname{Re}[\omega_{OS}^{(0)}]t)$$

уравнения для амплитуд  $\bar{A}_{\mathbf{k}}$ ,  $\bar{B}_{\mathbf{k}}$  примут вид

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_{\mathbf{k}} + \varepsilon^2 \operatorname{Im}[\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})] \bar{A}_{\mathbf{k}} &= \varepsilon \int \bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{A}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 + \varepsilon \int \bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(2)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{B}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 + \\ &+ \varepsilon \int \bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(3)} \bar{B}_{\mathbf{k}_1} \bar{B}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 - \varepsilon^2 h_{\mathbf{k}}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k}} - \varepsilon^2 h_{\mathbf{k}}^{(2)} \bar{B}_{\mathbf{k}}; \quad (2.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}_{\mathbf{k}} &= \varepsilon \int \bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{A}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 + \varepsilon \int \bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(2)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{B}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 + \varepsilon \int \bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(3)} \bar{B}_{\mathbf{k}_1} \bar{B}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 - \\ &- \varepsilon^2 g_{\mathbf{k}}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k}} - \varepsilon^2 g_{\mathbf{k}}^{(2)} \bar{B}_{\mathbf{k}} - i\beta N_S \left( \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}, \frac{d\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}}{dy} \right) \bar{A}_{\mathbf{k}} + i(\operatorname{Re}[\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})] - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k})) \bar{B}_{\mathbf{k}}; \quad (2.2)\end{aligned}$$

$$\bar{H}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(i)} = H_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(i)} \exp[i \operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}) - \omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_1) - \omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_2))t],$$

$$\bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(i)} = G_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(i)} \exp[i \operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}) - \omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_1) - \omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_2))t].$$

Здесь  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ ;  $\varepsilon = d/L$ ;  $d$  — длина потери импульса;  $L$  — характерный продольный размер; величины  $H_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(i)}$  и  $G_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(i)}$  симметричны при перестановке  $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_2$ ;  $N_S(f, g) =$

$$\int_0^\infty f(y)g(y) dy.$$

**3. Уравнения для амплитуд с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ .** Предполагая, что декремент низшей моды уравнения Сквайра велик, т. е. что эта мода непрерывно “подстраивается” к моде Толлмина — Шлихтинга, амплитуду вертикальной компоненты завихренности можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{B}_{\mathbf{k}} &= \frac{\beta N_S(\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}/dy) \bar{A}_{\mathbf{k}}}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k})} - \frac{\varepsilon}{i(\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}))} \times \\ &\times \left( \int \bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{A}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 + \int \bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(2)} \frac{\beta_2 N_S(\psi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_2)) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}_2)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{A}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 + \right. \\ &\left. + \int \bar{G}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{(3)} \frac{\beta_1 N_S(\psi_{\mathbf{k}_1}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}_1}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_1)) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}_1)} \frac{\beta_2 N_S(\psi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_2)) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}_2)} \bar{A}_{\mathbf{k}_1} \bar{A}_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 \right) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$  или сокращенно

$$\bar{B}_k = b_k \bar{A}_k - \varepsilon \int G_{k k_1 k_2} \bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2} d\mathbf{k}_1 + O(\varepsilon^2), \quad b_k = \frac{\beta N_S(\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k})}, \quad (3.1)$$

$$G_{k k_1 k_2} = \frac{\bar{G}_{k k_1 k_2}^{(1)}}{i(\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}))} + \frac{\bar{G}_{k k_1 k_2}^{(2)}}{i(\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}))} \frac{\beta_2 N_S(\psi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_2)) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}_2)} +$$

$$+ \frac{\bar{G}_{k k_1 k_2}^{(3)}}{i(\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}))} \frac{\beta_1 N_S(\psi_{\mathbf{k}_1}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}_1}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_1)) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}_1)} \frac{\beta_2 N_S(\psi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}, d\varphi_{\mathbf{k}_2}^{(0)}/dy)}{\operatorname{Re}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}_2)) - \omega_S^{(0)}(\mathbf{k}_2)}, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1.$$

Величины  $\bar{B}_k$  из (3.1) можно подставить в уравнение (2.1) для  $\bar{A}_k$ . В итоге получим

$$-\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial t} + \varepsilon^2 \operatorname{Im}(\bar{\omega}_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) \bar{A}_k = \varepsilon \int H_{k k_1 k_2} \bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k-k_1} d\mathbf{k}_1 -$$

$$- \varepsilon^2 \int F_{k k_1 k_2} \bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2} \bar{A}_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \varepsilon^2 h_k \bar{A}_k,$$

$$\varepsilon^2 = \max_{\mathbf{k}} [\operatorname{Im}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}))] = d/L, \quad \operatorname{Im}(\bar{\omega}_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) = \operatorname{Im}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) / \max_{\mathbf{k}} [\operatorname{Im}(\omega_{OS}^{(0)}(\mathbf{k}))].$$

#### 4. Разделение пульсаций на когерентную и некогерентную составляющие.

В результате выполненных выше преобразований для амплитуд волн Толлмина — Шлихтинга получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial t} = -\varepsilon \int H_{k k_1 k_2} \bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k-k_1} d\mathbf{k}_1 + \varepsilon^2 \left( \Omega_k \bar{A}_k + \int F_{k k_1 k_2} \bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2} \bar{A}_{k-k_1-k_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right),$$

$$\Omega_k = \operatorname{Im}(\bar{\omega}_{OS}^{(0)}(\mathbf{k})) + h_k.$$

Представим  $\bar{A}_k$  в виде

$$\bar{A}_k = A_k^c + A_k', \quad \langle A_k \rangle = A_k^c, \quad \langle A_k' \rangle = 0$$

(т. е. разделим на когерентную и некогерентную составляющие), где угловые скобки означают осреднение по случайным фазам пульсаций. Выразим  $\bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2}$  и  $\bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2} \bar{A}_{k_3}$  через  $A_k^c$  и  $A_k'$ :

$$\bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2} = A_{k_1}^c A_{k_2}^c + A_{k_1}^c A_{k_2}' + A_{k_1}' A_{k_2}^c + A_{k_1}' A_{k_2}', \quad (4.1)$$

$$\bar{A}_{k_1} \bar{A}_{k_2} \bar{A}_{k_3} = A_{k_1}^c A_{k_2}^c A_{k_3}^c + A_{k_1}^c A_{k_2}' A_{k_3}^c + A_{k_1}' A_{k_2}^c A_{k_3}^c + A_{k_1}^c A_{k_2}^c A_{k_3}' +$$

$$+ A_{k_1}' A_{k_2}' A_{k_3}^c + A_{k_1}^c A_{k_2}' A_{k_3}' + A_{k_1}' A_{k_2}^c A_{k_3}' + A_{k_1}' A_{k_2}' A_{k_3}'.$$

Осредним уравнение для пульсаций по ансамблю случайных фаз. Для когерентной составляющей с учетом соотношения (4.1) получим

$$\frac{\partial A_k^c}{\partial t} = -\varepsilon \int H_{k k_1 k_2} (A_{k_1}^c A_{k_2=k-k_1}^c + \langle A_{k_1}' A_{k_2}' \rangle) d\mathbf{k}_1 +$$

$$+ \varepsilon^2 \left( \Omega_k A_k^c + \int F_{k k_1 k_2} (A_{k_1}^c A_{k_2}^c A_{k_3=k-k_1-k_2}^c + \langle A_{k_1}' A_{k_2}' \rangle A_{k_3}^c + A_{k_1}^c \langle A_{k_2}' A_{k_3}' \rangle +$$

$$+ A_{k_2}^c \langle A_{k_1}' A_{k_3}' \rangle + \langle A_{k_1}' A_{k_2}' A_{k_3}' \rangle) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right). \quad (4.2)$$

Для некогерентной составляющей амплитуды  $A'_k$  получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_k}{\partial t} = & -\varepsilon \int H_{kk_1k_2} (A_{k_1}^c A'_{k_2=k-k_1} + A'_{k_1} A_{k_2}^c + A'_{k_1} A'_{k_2} - \langle A'_{k_1} A'_{k_2} \rangle) dk_1 + \\ & + \varepsilon^2 \left( \Omega_k A'_k + \int F_{kk_1k_2} (A_{k_1}^c A'_{k_2} A_{k_3=k-k_1-k_2}^c + A'_{k_1} A_{k_2}^c A_{k_3}^c + A_{k_1}^c A_{k_2}^c A'_{k_3} + \right. \\ & + (A'_{k_1} A'_{k_2} - \langle A'_{k_1} A'_{k_2} \rangle) A_{k_3}^c + A_{k_1}^c (A'_{k_2} A'_{k_3} - \langle A'_{k_2} A'_{k_3} \rangle) + A_{k_2}^c (A'_{k_1} A'_{k_3} - \langle A'_{k_1} A'_{k_3} \rangle) + \\ & \left. + A'_{k_1} A'_{k_2} A'_{k_3} - \langle A'_{k_1} A'_{k_2} A'_{k_3} \rangle) dk_1 dk_2 \right). \quad (4.3) \end{aligned}$$

**5. Моменты случайной компоненты в однородном случае.** Для среднего по ансамблю от произведения амплитуд случайных полей в однородном случае получим

$$\begin{aligned} \langle A'_{k_1} A'_{k_2} \rangle &= \Gamma_2(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \langle A'_{k_1} A'_{k_2} A'_{k_3} \rangle = \varepsilon \Gamma_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \\ \langle A'_{k_1} A'_{k_2} A'_{k_3} A'_{k_4} \rangle &= \Gamma_2(\mathbf{k}_1) \Gamma_2(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \Gamma_2(\mathbf{k}_1) \Gamma_2(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) + \\ &+ \Gamma_2(\mathbf{k}_1) \Gamma_2(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \varepsilon \Gamma_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \end{aligned}$$

и т. д. Уравнение (4.2) для когерентной составляющей примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k^c}{\partial t} = & -\varepsilon \int H_{kk_1k_2=k-k_1} A_{k_1}^c A_{k_2}^c dk_1 + \\ & + \varepsilon^2 \left( \Omega_k + \int (F_{kk_1-k_1} + F_{kkk_1} + F_{kk_1k}) \Gamma_2(\mathbf{k}_1) dk_1 \right) A_k^c + \\ & + \varepsilon^2 \int F_{kk_1k_2} A_{k_1}^c A_{k_2}^c A_{k_3=k-k_1-k_2}^c dk_1 dk_2. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Уравнения моментов второго и третьего порядков для стохастических пульсаций, подчиняющихся уравнению (4.3), запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_2(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{\partial t} = & -\varepsilon^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \int (H_{-p, k_1, -p-k_1} \Gamma_3(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1) + H_{p, k_1, p-k_1} \Gamma_3(-\mathbf{p}, \mathbf{k}_1)) dk_1 - \\ & - \varepsilon ((H_{q, q+p, p} + H_{q, -p, q+p}) \Gamma_2(\mathbf{p}) + (H_{p, q+p, q} + H_{p, -q, q+p}) \Gamma_2(\mathbf{q})) A_{q+p}^c + \\ & + \varepsilon^2 \left( 2\Omega_p \Gamma_2(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \int ((F_{ppk_1} + F_{pk_1p} + F_{pk_1-k_1}) \Gamma_2(-\mathbf{p}) \Gamma_2(\mathbf{k}_1) + \right. \\ & \left. + (F_{-q, -q, k_1} + F_{-q, k_1, -q} + F_{-q, k_1, -k_1}) \Gamma_2(\mathbf{p}) \Gamma_2(\mathbf{k}_1)) dk_1 \right) + o(\varepsilon^2); \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_3(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial t} = & -(H_{p, -q, p+q} + H_{p, p+q, -q}) \Gamma_2(\mathbf{q}) \Gamma_2(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) - \\ & - (H_{q, p+q, -p} + H_{q, -p, q+p}) \Gamma_2(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Gamma_2(\mathbf{p}) - \\ & - (H_{-p-q, -p, -q} + H_{-p-q, -q, -p}) \Gamma_2(\mathbf{p}) \Gamma_2(\mathbf{q}) + O(\varepsilon). \quad (5.3) \end{aligned}$$

В строгом смысле выражения для корреляций требуют некоторого обобщения, так как в уравнениях для стохастической компоненты член, пропорциональный амплитуде когерентных пульсаций, в простейшем случае может содержать несколько  $\delta$ -функций, соответствующих дискретному набору волновых векторов, находящихся в трехволновом резонансе. Однако, считая, что эти волновые векторы расположены вблизи начала координат пространства волновых чисел, в некотором приближении предполагая, что для стохастической компоненты различие волновых векторов несущественно, можно рассматривать их

как точные. При этом, как и в работе [10], для стохастической компоненты получим уравнения кинетического типа.

С учетом того что система уравнений содержит малый параметр, следуя [9], разложим искомые величины в ряды по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 A_{\mathbf{k}}^c &= A_{\mathbf{k}}^{c(0)} + \varepsilon A_{\mathbf{k}}^{c(1)} + \varepsilon^2 A_{\mathbf{k}}^{c(2)} + o(\varepsilon^2), & \Gamma_2(\mathbf{k}) &= \Gamma_2^{(0)}(\mathbf{k}) + \varepsilon \Gamma_2^{(1)}(\mathbf{k}) + O(\varepsilon^2), \\
 \Gamma_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) &= \Gamma_3^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) + \varepsilon \Gamma_3^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) + O(\varepsilon^2), & \Gamma_4(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \Gamma_4^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + O(\varepsilon), \\
 & \dots\dots\dots & & \\
 \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

После подстановки разложений (5.4) в уравнения (5.1)–(5.3) получаем, что амплитуды когерентной структуры не зависят от  $t_0$ , а функция  $\Gamma_2[\mathbf{k}]$  не зависит от  $t_0, t_1$ . Исключение секулярных членов приводит к следующим уравнениям:

— динамическому уравнению для когерентной части

$$\frac{\partial A_{\mathbf{k}}^{c(0)}}{\partial t_1} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} R dt_0
 \tag{5.5}$$

( $R$  — правая часть уравнения для амплитуд  $A_{\mathbf{k}}^{c(0)}$ );

— уравнению кинетического типа для некогерентной части

$$\frac{\partial \Gamma_2^{(0)}(\mathbf{p})}{\partial t_2} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} R_1 dt_0 dt_1$$

( $R_1$  — правая часть уравнения для  $\Gamma_2^{(0)}(\mathbf{p})$ ).

Следует отметить, что в уравнении для некогерентной составляющей необходимо учесть среднюю часть от нестационарной системы уравнений, описывающей когерентную составляющую в масштабе  $t_1$ .

**6. Некоторые возможные решения системы уравнений для когерентной составляющей и стохастических пульсаций.** Для трехволнового резонанса в простейшем случае имеем

$$A_{\mathbf{k}}^c = b\delta(\mathbf{k}) + (a_1\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1^{(0)}) + a_2\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2^{(0)}) + a_3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3^{(0)}) + \text{к.с.})$$

(к.с. — сумма комплексно-сопряженных членов;  $\mathbf{k}_1^{(0)}, \mathbf{k}_2^{(0)}, \mathbf{k}_3^{(0)}$  — одна из возможных совокупностей векторов, удовлетворяющих уравнениям трехволнового резонанса (см., например, [9])).

Численное исследование дает следующую картину трехволнового резонанса одной из наименее затухающих мод волн Толлмина — Шлихтинга для профиля скорости в турбулентном пограничном слое [11] (рис. 2). (На рис. 2  $\alpha, \beta$  — соответственно продольная и поперечная составляющие волнового вектора.)

Векторы выбираются таким образом, чтобы выполнялось равенство  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ , их концы должны лежать на резонансной кривой, определяемой вектором  $\mathbf{k}$ . В этом случае уравнения (5.5) для амплитуд когерентной составляющей можно представить в виде

$$\frac{da_1}{dt} = \varepsilon [a_2 a_3 (H_{\mathbf{k}_1^{(0)} \mathbf{k}_2^{(0)} \mathbf{k}_3^{(0)}} + H_{\mathbf{k}_1^{(0)} \mathbf{k}_3^{(0)} \mathbf{k}_2^{(0)}})] + \varepsilon^2 (Q_1),$$

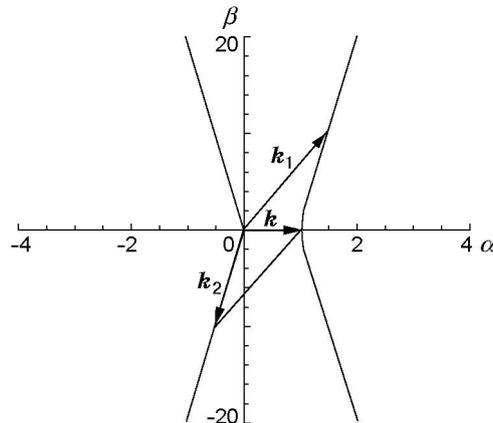


Рис. 2. Трехволновой резонанс на профиле турбулентного пограничного слоя для одной из наименее затухающих мод волн Толлмина — Шлихтинга

$$\frac{da_2}{dt} = \varepsilon [a_1 a_3^* (H_{\mathbf{k}_2^{(0)} \mathbf{k}_1^{(0)} - \mathbf{k}_3^{(0)}} + H_{\mathbf{k}_2^{(0)} - \mathbf{k}_3^{(0)} \mathbf{k}_1^{(0)}})] + \varepsilon^2 (Q_2),$$

$$\frac{da_3}{dt} = \varepsilon [a_1 a_2^* (H_{\mathbf{k}_3^{(0)} \mathbf{k}_1^{(0)} - \mathbf{k}_2^{(0)}} + H_{\mathbf{k}_3^{(0)} - \mathbf{k}_2^{(0)} \mathbf{k}_1^{(0)}})] + \varepsilon^2 (Q_3),$$

где  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — совокупность линейных и кубических по амплитуде членов; знак “\*” обозначает комплексное сопряжение.

**7. Континуальный аналог уравнений для амплитуд трехволнового резонанса.** Следует отметить, что бесконечное множество пар волновых векторов удовлетворяют условию трехволнового резонанса одновременно, поэтому рассмотрим все эти пары. Решение  $A_{\mathbf{k}}^c$  можно искать в виде бесконечной суммы  $\delta$ -функций аналогично тому, как это сделано в п. 6. Это позволяет получить уравнения для амплитуд пар волновых векторов, которые являются непрерывными функциями точки на резонансной кривой. В итоге получим интегродифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \varepsilon \int_L \alpha_2(l) \alpha_3(l) h_1(l) dl + \dots,$$

$$\frac{\partial \alpha_2(l)}{\partial t} = \varepsilon \alpha_1 \alpha_3^*(l) h_2(l) + \dots, \quad \frac{\partial \alpha_3(l)}{\partial t} = \varepsilon \alpha_1 \alpha_2^*(l) h_3(l) + \dots,$$

где  $l$  — параметр вдоль резонансной кривой  $L$ ;  $h_i(l)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — некоторые комбинации матричных элементов;  $\alpha_i(l)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — амплитуды волн, находящихся в состоянии трехволнового резонанса.

**8. Корреляционная функция.** В общем случае корреляционные функции необходимо искать также в виде сумм  $\delta$ -функций (это следует из того, что правые и левые части уравнений для корреляционных функций должны иметь соответствующие элементы). Тогда при наличии когерентной структуры имеем

$$\langle A'_{\mathbf{k}_1} A'_{\mathbf{k}_2} \rangle = \sum_i \Gamma_2^{(i)}(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_i^{(0)}),$$

$$\langle A'_{\mathbf{k}_1} A'_{\mathbf{k}_2} A'_{\mathbf{k}_3} \rangle = \varepsilon \sum_i \Gamma_3^{(i)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_i^{(0)}),$$

$$\langle A'_{\mathbf{k}_1} A'_{\mathbf{k}_2} A'_{\mathbf{k}_3} A'_{\mathbf{k}_4} \rangle = \sum_{i,j} \Gamma_2^{(i)}(\mathbf{k}_1) \Gamma_2^{(j)}(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_i^{(0)}) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_j^{(0)}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j} \Gamma_2^{(i)}(\mathbf{k}_1) \Gamma_2^{(j)}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_i^{(0)}) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_j^{(0)}) + \\
& + \sum_{i,j} \Gamma_2^{(i)}(\mathbf{k}_1) \Gamma_2^{(j)}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_i^{(0)}) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_j^{(0)}) + \\
& \qquad \qquad \qquad + \varepsilon \sum_i \Gamma_4^{(i)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_i^{(0)}).
\end{aligned}$$

Следовательно, двухточечный пространственный коррелятор примет вид

$$\begin{aligned}
\langle A'(\mathbf{r}_1) A'(\mathbf{r}_2) \rangle & = \left\langle \iint A'(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} d\mathbf{k}_1 A'(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} d\mathbf{k}_2 \right\rangle = \\
& = \iint \langle A'(\mathbf{k}_1) A'(\mathbf{k}_2) \rangle e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = \\
& = \iint \sum_i \Gamma^{(i)}(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_i^{(0)}) e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = \\
& = \int \left( \sum_i \Gamma^{(i)}(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_i^{(0)} \mathbf{r}_2} \right) e^{i\mathbf{k}_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} d\mathbf{k}_1.
\end{aligned}$$

Это выражение является естественным обобщением пространственной однородности в присутствии когерентных структур. Как и следовало ожидать, в случае малых  $\mathbf{k}_i^{(0)}$  выражение сводится к обычному однородному коррелятору. Однако при больших значениях  $\mathbf{r}_2$  аргументы выражения  $e^{i\mathbf{k}_i^{(0)} \mathbf{r}_2}$  не малы. Поэтому в общем случае коррелятор либо является периодической функцией в пространстве, либо отличен от нуля в конечной области пространства.

Таким образом, наличие внутреннего резонанса в турбулентном пограничном слое даже при возбуждении бесконечного числа степеней свободы позволяет выделить из поля пульсаций некоторую часть, которую можно рассматривать как динамическую когерентную составляющую. Следует отметить, что в силу множественности трехволнового резонанса, т. е. возможности одновременно вступать в резонанс бесконечной совокупности троек волн с волновыми векторами, удовлетворяющими условию трехволнового резонанса, эта структура в общем случае обладает непрерывным спектром. Видимо, поэтому ее нельзя выделить из поля пульсаций.

Наличие когерентной структуры приводит к естественному обобщению понятия статистической однородности, в результате чего двухточечный коррелятор поля пульсаций становится периодической функцией пространственных координат. При этом необходимо отметить, что в рамках моментного метода для стохастической составляющей получаются уравнения более общие, чем кинетическое уравнение в приближении трехволнового резонанса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Boussinesq J.** Essai sur la thé des caux courantes // Mem. Présentés Divers Savants Acad. Sci. 1877. V. 23. P. 46.
2. **Prandtl L.** Uber die ausgebildete Turbulenz // Z. angew. Math. Mech. 1925. Bd 5. S. 136–139.
3. **Smagorinsky J.** General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Rev. 1963. V. 91. P. 99–164.

4. **Ye Zhou, Vahala G.** Reformulation of reursive-renormalization-group-based subgrid modeling of turbulence // *Phys. Rev. E*. 1993. V. 47, N 4. P. 2503–2519.
5. **Branko Kosovic.** Subgrid-scale modeling for the large-eddy simulation of high Reynolds-number boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 336. P. 151–182.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. **Cantwell B. J.** Organized motion in turbulent flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1981. V. 13. P. 457–515.
8. **Hussain A. K. M. F.** Coherent structure — reality and myth // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26, N 10. P. 2816–2863.
9. **Davidson R. C.** *Method in nonlinear plasma theory*. N. Y.; L.: Acad. Press, 1972. (Pure and applied physics; V. 37).
10. **Жаров В. А.** О волновой структуре развитого турбулентного пограничного слоя // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1986. Т. 17, № 5. С. 28–38.
11. **Додонов И. Г., Жаров В. А., Хлопков Ю. И.** Локализованные когерентные структуры в пограничном слое // *ПМТФ*. 2000. Т. 41, № 6. С. 60–67.
12. **Benney D. J., Bergeron R. F.** A new class of nonlinear waves in parallel flows // *Stud. Appl. Math.* 1969. V. 48, N 3. P. 181–204.
13. **Solwen H., Grosh C. E.** The continuous spectrum of Orr — Sommerfeld equation. Pt 2. Eigenfunction expansion // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 104, pt 1. P. 445–465.

*Поступила в редакцию 11/XII 2001 г.*

---