мени разрушения шара, когда последний интенсивно расширяется вплоть до разрушения под действием переменного внутреннего давления или начального поля скоростей, имеют удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Поступила 20 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Al-Hassani S. T. S., Johnson W.** The dynamics of the fragmentation process for spherical shells containing explosives.— Intern. J. Mech. Sci., 1969, vol. 11, p. 811.
2. **Вульфсон С. З.** Упруго-вязкопластический полый шар под действием внутреннего давления.— ПМ, 1972, т. 8, вып. 9.
3. **Wojewodzki W.** Dynamiczne symetryczne wyboczenie lepkoplastycznych powlok obrotowych.— Rozpr. inž., 1978, vol. 26, N 2.
4. **Цыпкин В. И., Иванов А. Г. и др.** Влияние масштаба, геометрии и заполняющей среды на прочность стальных сосудов при внутреннем импульсном нагружении.— Атомная энергия, 1976, т. 41, вып. 5.
5. **Иванов А. Г., Минеев В. И.** О масштабных эффектах при разрушении.— ФГВ, 1979, т. 15, № 5.
6. **Ильюшин А. А.** Деформация вязкопластического тела.— Учен. зап. МГУ. Механика, 1940, вып. 39.
7. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
8. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
9. **Фадеенко Ю. И.** Временные критерии разрушения взрывом.— ПМТФ, 1977, № 6.
10. **Фадеенко Ю. И.** Временные критерии разрушения в динамике твердого тела.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
11. **Иванов А. Г.** Особенности взрывной деформации и разрушения труб.— ПП, 1976, № 11.
12. **Санасарян Н. С.** Вязкопластическая деформация труб при взрыве ВВ в зависимости от свойств окружающей среды.— ФГВ, 1971, т. 7, № 4.
13. **Кузнецов В. М.** О разрушении металлических колец в пластическом состоянии.— ФГВ, 1973, т. 9, № 4.
14. **Сериков С. В.** Нестационарное расширение до разрушения сжимаемого кольца в схеме идеальной пластичности.— ФГВ, 1980, т. 16, № 4.
15. **Глазков В. М., Кудрявцева Л. А., Сухин В. И.** О соотношении между статическими механическими характеристиками и импульсным напряжением в металлических стержнях.— ПМТФ, 1977, № 5.

УДК 539.3

О ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. И. Кондауров

(Москва)

В работе рассматривается полная система уравнений нелинейной термоупругости в виде системы законов сохранения энергии, импульса и совместности деформации в произвольных криволинейных движущихся координатах. Использование уравнений в такой форме представляет ряд преимуществ, связанных как с исследованием важнейших свойств среды, так и с построением консервативных численных методов.

В адиабатическом приближении изучаются характеристические свойства, проводится симметризация, формулируются достаточные условия гиперболичности уравнений динамики произвольного нелинейного термоупругого тела.

Рассматривается замкнутая система соотношений на сильных разрывах. Выясняются условия разрешимости задачи об определении величин за фронтом ударной волны при известном состоянии перед фронтом и заданной скорости волны.

1. Кинематика. Будем рассматривать конечные деформации нелинейной термоупругой анизотропной среды. Пусть $\mathbf{X} = X^i \mathbf{э}_i$ — радиус-вектор материальной частицы тела в начальной, отсчетной конфигурации, $\mathbf{x} = x^i \mathbf{э}_i$ — в текущей, актуальной конфигурации, $\mathbf{э}_i$ — ортонормированный базис эйлеровой, пространственной системы координат, t — время, $v^i = (\partial x^i/\partial t)\big|_{X^m}$ — скорость частицы, $F^i_{\cdot j} = \partial x^i/\partial X^j$ — градиент деформации (дисторсия). Предполагая взаимную однозначность отображения

$$x^i = x^i(X^m,\ t),\ i,\ m = 1,\ 2,\ 3,$$

получим связь между градиентом деформации и скоростью частицы

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \nabla\mathbf{v},\ \frac{\partial F^i_j}{\partial t}\bigg|_{x^m} + v^k\frac{\partial F^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial v^i}{\partial x^k}F^k_j, \tag{1.1}$$

хорошо известную в механике сплошной среды [1, 2].

Уравнение (1.1) может быть представлено в виде дифференциального закона сохранения. В переменных $(x^i,\ t)$ дивергентная форма (1.1) записывается в виде

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\Delta}F^i_j\right)}{\partial t}\Bigg|_{x^m} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{1}{\Delta}\left(v^kF^i_j - v^iF^k_j\right)\right\} = 0,\ \Delta = \det\mathbf{F}. \tag{1.2}$$

Эквивалентность (1.1), (1.2) можно показать, если воспользоваться формулами

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}\bigg|_{X^m} = \Delta\frac{\partial v^k}{\partial x^k},\ \frac{\partial\Delta}{\partial x^k} = \Delta F_a^{-1b}\frac{\partial F^a_b}{\partial x^k},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{\Delta}F^k_j\right) = 0. \tag{1.3}$$

Для доказательства первых двух формул (1.3) заметим, что $\Delta = e_{ijm}\times$ $\times F^i_1F^j_2F^m_3$, где e_{ijm} — единичный антисимметричный тензор, и $\partial\Delta/\partial F^a_b=$ $=\Delta F_a^{-1b}$. Справедливость третьего соотношения (1.3) следует из того, что

$$\partial F^k_j/\partial x^k = F_k^{-1m}\left(\partial F^k_m/\partial x^a\right)F^a_j.$$

Если теперь использовать закон сохранения массы $\rho\Delta = \rho_0$, где ρ_0, ρ — плотность среды в отсчетной и актуальной конфигурациях, то для случая $\rho_0 = \text{const}$ (1.2) может быть записано в виде

$$\partial\left(\rho F^i_j\right)/\partial t + \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho v^kF^i_j - \rho v^iF^k_j\} = 0. \tag{1.4}$$

Непосредственным следствием соотношений $\rho\Delta = \rho_0$ и $\dot{\Delta} = \Delta\partial v^k/\partial x^k$ является уравнение неразрывности

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v^k)/\partial x^k = 0, \tag{1.5}$$

однако пользоваться им в дальнейшем как независимым уравнением не будем. Вся информация, содержащаяся в (1.5) в областях гладких решений и в интегральных равенствах для областей с разрывами решений, как будет показано ниже, уже заключена в дифференциальном уравнении (1.4) и конечном алгебраическом соотношении $\rho = \rho(\mathbf{F}) = \rho_0/\det\mathbf{F}$.

Следует также отметить, что уравнение (1.4) инвариантно относительно замены системы отсчета (относительно наложения движения как жесткого целого).

2. Термодинамика и определяющие уравнения. Пусть U — плотность внутренней энергии, $E = U + v_iv^i/2$ — плотность полной энергии, $\mathbf{q} = q^i\mathbf{э}_i$ — вектор теплового потока через единицу площади в единицу времени, r — удельное тепловыделение, $\mathbf{b} = b^i\mathbf{э}_i$ — вектор массовой силы, $\sigma = \sigma^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j$ — тензор напряжений Коши. Рассматривая только тепловое и механическое взаимодействие, закон сохранения полной энергии (первый принцип термодинамики) и закон сохранения импульса и момента импульса для неполярной среды в инерциальной системе отсчета можно записать в областях гладких решений в форме [1]

$$\rho dv^i/dt = \partial\sigma^{ik}/\partial x^k + \rho b^i,\ \sigma^{ik} = \sigma^{ki}; \tag{2.1}$$

(2.2) $$\rho dU/dt = \sigma^k_i \partial v^i/\partial x^k + \partial q^k/\partial x^k + \rho r.$$

Будем использовать далее второй принцип термодинамики, дифференциальная форма которого для гладких функций записывается в виде [2]

(2.3) $$\rho \frac{d\eta}{dt} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{\Theta} q^k\right) - \frac{1}{\Theta}\rho r \geqslant 0,$$

где $\Theta > 0$ — температура; η — удельная энтропия. Вводя свободную энергию $A = U - \Theta\eta$ и используя выражение для dU/dt из (2.2), (2.3) можно преобразовать к виду

(2.4) $$-\rho \frac{dA}{dt} - \rho\eta \frac{d\Theta}{dt} + \sigma^k_i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{1}{\Theta} q^k \frac{\partial \Theta}{\partial x^k} \geqslant 0.$$

Постулируя для нелинейной упругой среды, что

(2.5) $$A = A(F^m_n, \Theta, \gamma_m),\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(F^m_n, \Theta, \gamma_m),$$
$$\eta = \eta(F^m_n, \Theta, \gamma_m),\ q^i = q^i(F^m_n, \Theta, \gamma_m),$$

где $\gamma_m = \partial\Theta/\partial x^m$, а A, σ_{ij}, η, q^i являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, и используя (2.4), получим [2]

(2.6) $$\partial A/\partial\gamma_m = 0,\ \eta = -\partial A/\partial\Theta,\ \sigma^k_i = \rho F^k_m \partial A/\partial F^i_m,\ q^m\gamma_m \geqslant 0.$$

Заметим, что условие симметричности $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ накладывает на вид допустимых функций свободной энергии ограничение

(2.7) $$(\partial A/\partial F^i_j)(F^k_j g^{mi} - F^m_j g^{ki}) = 0,$$

где g^{mi} — метрический тензор системы координат x^i. Для изотропных тел соотношения (2.7) удовлетворяются автоматически. В случае произвольной анизотропии (2.7) представляет собой три уравнения, которым должна удовлетворять любая нелинейно-упругая безмоментная среда.

Уравнение (2.2) для внутренней энергии может быть записано при учете (2.6) в форме

(2.8) $$\rho c_F \frac{d\Theta}{dt} = \Theta \frac{\partial\sigma^k_i}{\partial\Theta}\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^k} + \rho r,$$

где $c_F = \Theta\partial\eta/\partial\Theta = -\Theta\,\partial^2 A/\partial\Theta^2 = \partial U/\partial\Theta$ — теплоемкость среды при постоянной деформации.

3. Полная система уравнений. Таким образом, полная система уравнений нелинейной термоупругости записывается в виде недивергентных дифференциальных уравнений (1.1), (2.1) и (2.8) в переменных (x^i, t)

(3.1) $$\rho \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial\sigma^{ik}}{\partial F^m_n}\frac{\partial F^m_n}{\partial x^k} + \frac{\partial\sigma^{ik}}{\partial\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x^k} + \rho b^i,$$
$$\rho c_F \frac{d\Theta}{dt} - \Theta\frac{\partial\sigma^k_i}{\partial\Theta}\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^k} + \rho r,\quad \frac{dF^i_j}{dt} = F^k_j \frac{\partial v^i}{\partial x^k}$$

и конечных соотношений

$$A = A(F^m_n, \Theta),\ c_F = -\Theta\partial^2 A/\partial\Theta^2,\ \sigma^i_j = \rho F^i_k \partial A/\partial F^j_k,$$
$$q^k = q^k(F^m_n, \Theta, \partial\Theta/\partial x^m),\ \rho = \rho_0/\det\|F^i_j\|,\ q^k\partial\Theta/\partial x^k \geqslant 0.$$

Уравнения (3.1) могут быть сформулированы в виде системы дифференциальных законов сохранения энергии и импульса [1, 2] и закона сохранения совместности деформаций, выражаемого соотношением (1.4):

(3.2) $$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E v^k - \sigma^{ik}v_i - q^k)}{\partial x^k} = \rho(r + b^i v_i),$$

$$\frac{\partial (\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^i v^k - \sigma^{ik})}{\partial x^k} = \rho b^i, \quad \frac{\partial (\rho F^i_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^k F^i_j - \rho v^i F^k_j)}{\partial x^k} = 0.$$

Система уравнений (3.2) обладает рядом преимуществ перед традиционной формулировкой уравнений нелинейной теории упругости [1, 2]. Запись всей системы в дивергентной форме позволяет определить не только классическое решение в областях достаточной гладкости, но и обобщенное, слабое решение [3] в областях, включающих разрывы. Из (3.2) стандартным образом [3] следуют все соотношения на разрывах, известные в нелинейной теории упругости. Наконец, система (3.2) удобна для построения консервативных разностных методов численного решения динамических и статических задач, методов, в которых точно выполняются интегральные законы сохранения и имеется теоретическое обоснование «сквозного» счета [4].

Однако использование эйлеровых переменных (x^i, t) часто сопряжено с определенными трудностями, особенно при численных исследованиях. Новый подход, развиваемый в последние годы в ряде работ [5, 6],— метод подвижных координат. Метод заключается во введении подвижных, отличных в общем случае от лагранжевых, координатных сеток, линии которых совпадают с выделяемыми особенностями решения задачи (границы, контактные разрывы, ударные волны и т. д.) и удовлетворяют ряду дополнительных требований.

Пусть

$$\eta^i = \eta^i(x^k, t), \quad \det\|\partial\eta^i/\partial x^m\| \neq 0 \tag{3.3}$$

— взаимооднозначное, дважды непрерывно дифференцируемое преобразование пространства (x^k, t) в (η^i, t), выбранное из каких-либо соображений. Обозначим

$$\eta^i_k = \frac{\partial\eta^i}{\partial x^k}, \; x^k_j = \frac{\partial x^k}{\partial\eta^j}, \; \widetilde{\Delta} = \det\|x^i_k\|, \; w^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{\eta^m}.$$

Тогда дивергентное уравнение в переменных (x^i, t)

$$\left.\frac{\partial A^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}}{\partial t}\right|_{x^n} + \frac{\partial B^{k j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}}{\partial x^k} = f^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}, \quad R \geqslant 0, \; N \geqslant 0, \; i_m, \; j_n = 1, 2, 3, \tag{3.4}$$

связывающее N-ковариантный и R-контравариантный тензор A с N-ковариантным и $R+1$-контравариантным тензором B, эквивалентно дивергентному уравнению в переменных (η^m, t):

$$\left.\frac{\partial\left(\widetilde{\Delta} A^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}\right)}{\partial t}\right|_{\eta^n} + \frac{\partial\left(\widetilde{\Delta}\widetilde{B}^{m j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}\right)}{\partial \eta^n} = \widetilde{\Delta} f^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}, \tag{3.5}$$

где

$$\widetilde{B}^{m j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \eta^m_k \left(B^{k j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N} - w^k A^{j_1 j_2 \ldots j_R}_{i_1 i_2 \ldots i_N}\right). \tag{3.6}$$

Справедливость утверждения следует из цепочки преобразований

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x^k} + \frac{\partial B^m}{\partial x^m} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x^k} + \frac{\partial}{\partial x^m}\left(Aw^m + \widetilde{B}^k x^m_k\right) = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x^k} + w^m \frac{\partial A}{\partial x^m} + \frac{\partial w^m}{\partial x^m} A +$$

$$+ \frac{\partial \widetilde{B}^k}{\partial x^m} x^m_k + \widetilde{B}^k \frac{\partial x^m_k}{\partial x^m} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\eta^i} + \frac{\partial \widetilde{B}^k}{\partial \eta^k} + A\frac{\partial w^k}{\partial x^k} + \widetilde{B}^k \frac{\partial x^n_k}{\partial x^n}$$

и соотношений

$$\frac{\partial x^a_k}{\partial x^a} = \frac{1}{\widetilde{\Delta}}\frac{\partial\widetilde{\Delta}}{\partial\eta^k}, \quad \frac{\partial w^a}{\partial x^a} = \left.\frac{1}{\widetilde{\Delta}}\frac{\partial\widetilde{\Delta}}{\partial t}\right|_{\eta^m},$$

которые выводятся аналогично формулам (1.3).

Теперь система законов сохранения нелинейной термоупругости в подвижных криволинейных координатах (η^i, t) запишется с учетом (3.4)—(3.6) в виде

$$(3.7)\quad \frac{\partial(\rho\tilde{\Delta}E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta^m}\{\tilde{\Delta}[\rho E(\tilde{v}^m-\tilde{w}^m)-\eta_k^m\sigma^{ki}v_i-\eta_k^m q^k]\}=\tilde{\Delta}\rho(r+b^iv_i),$$

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\Delta}v^i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta^m}\{\tilde{\Delta}[\rho v^i(\tilde{v}^m-\tilde{w}^m)-\eta_k^m\sigma^{ki}]\}=\tilde{\Delta}\rho b^i,$$

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\Delta}F_j^i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta^m}\{\tilde{\Delta}\rho[F_j^i(\tilde{v}^m-\tilde{w}^m)-v^i\eta_k^mF_j^k]\}=0,$$

где $\tilde{v}^m=\eta_k^mv^k$; $\tilde{w}^m=\eta_k^mw^k$.

Отметим, что благодаря использованию в (3.7) компонент тензоров и векторов, отнесенных к координатам x^i, хотя сами уравнения записаны в (η^m, t), удается избежать появления в правой части дополнительных, не обусловленных физическим содержанием «источников».

Весьма простой вид (3.7) принимает в случае лагранжевых координат X^m, когда $w^m\equiv v^m$, $\tilde{\Delta}\rho=\rho_0$, $\eta_k^m=F_k^{-1m}$:

$$(3.8)\quad \frac{\partial E}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial X^m}\left[\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}(\sigma^{ki}v_i+q^k)\right]=r+b^iv_i,$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial X^m}\left(\frac{1}{\rho}F_k^{-1m}\sigma^{ki}\right)=b^i,\quad \frac{\partial F_j^i}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial X^m}(\delta_j^mv^i)=0.$$

4. **Характеристики.** Рассмотрим теперь в адиабатическом приближении ($q^i\equiv 0$) характеристические свойства системы (3.1). В этом случае (3.1) является квазилинейной системой

$$\frac{du_\alpha}{dt}+A_{\alpha\beta}^k(u_\gamma)\frac{\partial u_\beta}{\partial x^k}=f_\alpha,\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,13,\ k=1,2,3,$$

где $u_\alpha=\{\Theta,v^i,F_j^i\}$; $f_\alpha=\{r/c_F,\ b^i,\ 0\}$. Пусть $\varphi(t,x^i)=0$ — уравнение характеристической поверхности, $D=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right\}^{1/2}$, $n_i=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big/\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right\}^{1/2}$ — скорость распространения и нормаль к этой поверхности. Тогда уравнение характеристик имеет вид [3]

$$(4.1)\quad \det\|-c\mathbf{I}+\mathbf{A}^kn_k\|=0,$$

где $c=D-v^kn_k$ — скорость поверхности относительно частиц среды; $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Обозначим через p_α правый собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^kn_k$, который для дальнейших выкладок удобнее представить в виде совокупности компонент $p_\alpha=\{\alpha,\beta_i,\gamma_j^i\}$, соответствующих скачкам нормальных производных температуры, скоростей и градиента деформации. Уравнение $(-c\mathbf{I}+\mathbf{A}^kn_k)\mathbf{p}=0$ записывается тогда в виде

$$(4.2)\quad \rho c_Fc\alpha+\Theta\frac{\partial\sigma_i^k}{\partial\Theta}n_k\beta^i=0,$$

$$\rho c\beta^i+\frac{\partial\sigma^{ik}}{\partial F_n^m}n_k\gamma_n^m+\frac{\partial\sigma^{ik}}{\partial\Theta}n_k\alpha=0,\quad c\gamma_j^i+F_j^kn_k\beta^i=0.$$

В случае если $c\neq 0$, то, выражая из первого и третьего уравнений (4.2) величины α и γ_j^i через β^i и подставляя во второе соотношение, придем к системе трех уравнений с симметричной матрицей коэффициентов

$$(4.3)\quad \left\{c^2g_{ij}-(F_m^an_a)\left(\frac{\partial^2A}{\partial F_m^i\partial F_n^j}+\frac{\Theta}{c_F}\frac{\partial\eta}{\partial F_m^i}\frac{\partial\eta}{\partial F_n^j}\right)(F_n^bn_b)\right\}\beta^i=0.$$

Условием существования действительных ненулевых значений скоростей распространения характеристических поверхностей является положительная определенность симметричной квадратичной формы

$$\left(F^a_m n_a\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial F^i_m \partial F^j_n} + \frac{\Theta}{c_F}\frac{\partial \eta}{\partial F^i_m}\frac{\partial \eta}{\partial F^j_n}\right)\left(F^b_n n_b\right)\lambda^i\lambda^j > 0$$

для произвольного $\lambda^i \neq 0$. Если воспользоваться функцией внутренней энергии $U = U\left(F^m_n, \eta\right)$, то это условие можно записать в виде

$$\left(F^a_m n_a\right)\frac{\partial^2 U}{\partial F^i_m \partial F^j_n}\left(F^b_n n_b\right)\lambda^i\lambda^j > 0. \tag{4.4}$$

Из системы (4.2) видно также, что $c = 0$ является кратным корнем характеристического уравнения (4.1), причем $\beta^i = 0$ в этом случае, а на γ^m_n и α накладывается связь:

$$M^{ik}_n \gamma^n_k + m^i\alpha = 0,\ M^{ik}_n = n_s\frac{\partial \sigma^{is}}{\partial F^n_k};\ m^i = n_s\frac{\partial \sigma^{is}}{\partial \Theta}. \tag{4.5}$$

Утверждать что-либо о существовании решения однородного уравнения (4.5) без знания матрицы коэффициентов не представляется возможным.

Сформулируем достаточные условия, при которых система уравнений (3.1) будет заведомо гиперболической. Для этого приведем систему с помощью невырожденной замены вектора решения к симметричному виду. Симметризация и достаточные условия гиперболичности нелинейных уравнений газовой динамики и уравнений линейной теории упругости с малыми деформациями рассматривались в [7]. Использование дивергентного уравнения (1.4) для градиента деформации F^i_j позволило обобщить решение этой задачи и на случай произвольного нелинейно-упругого тела с конечными деформациями.

Аналогично [7] воспользуемся для этого дополнительным законом сохранения энтропии

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{X^m} = \frac{1}{\Theta}\, r, \tag{4.6}$$

который справедлив в адиабатическом приближении в области гладких решений. Получим теперь (4.6) как следствие дивергентных уравнений (3.8), записанных в лагранжевых координатах X^m. Для этого умножим первое уравнение (3.8) на множитель q_0, второе — на q_i, третье — на q^j_i, где q_0, q_i, q^j_i — неизвестные пока функции Θ, v^i и F^i_j. Складывая уравнения и приравнивая (4.6), получим систему для q_0, q_i, q^j_i:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = q_0\frac{\partial E}{\partial t} + q_i\frac{\partial v^i}{\partial t} + q^j_i\frac{\partial F^i_j}{\partial t},\ q_0\left(r + b^i v_i\right) + q_i b^i = \frac{1}{\Theta} r, \tag{4.7}$$

$$q_0\frac{\partial}{\partial X^m}\left(\frac{1}{\rho}F^{-1m}_k\sigma^{ki}v_i\right) + q_i\frac{\partial}{\partial X^m}\left(\frac{1}{\rho}F^{-1m}_k\sigma^{ki}\right) + q^j_i\frac{\partial}{\partial X^m}\left(\delta^m_j v^i\right) = 0,$$

откуда

$$q_0 = \frac{1}{\Theta},\ q_i = -\frac{v_i}{\Theta},\ q^j_i = -\frac{1}{\rho\Theta}F^{-1j}_k\sigma^k_i. \tag{4.8}$$

При этом будем предполагать, ~~что свобод~~ная энергия $A = A\left(F^m_n, \Theta\right)$ такова, что величины $\{q_0, q_i, q^j_i\}$ взаимооднозначно разрешимы относительно $\{\Theta, v^i, F^i_j\}$. Как будет видно из дальнейшего, достаточные условия гиперболичности обеспечивают справедливость этого предположения.

Соотношения (4.7) будут заведомо выполняться, если справедливы более сильные соотношения

$$d\eta = q_0 dE + q_i dv^i + q^j_i dF^i_j, \tag{4.9}$$

$$q_0 d\left(\frac{1}{\rho} F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i\right) + q_i d\left(\frac{1}{\rho} F_k^{-1m}\sigma^{ki}\right) + q_i^j d\left(\delta_j^m v^i\right) = 0,$$

которые действительно имеют место с учетом (4.8), (2.6).

Переписывая (4.9) в форме

$$d\left(q_0E + q_iv^i + q_i^jF_j^i - \eta\right) = E dq_0 + v^i dq_i + F_j^i dq_i^j,$$

$$d\left(\frac{1}{\rho} q_0 F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i + \frac{1}{\rho} q_i F_k^{-1m}\sigma^{ki} + q_i^j\delta_j^m v^i\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho} F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i dq_0 + \frac{1}{\rho} F_k^{-1m}\sigma^{ki} dq_i + \delta_j^m v^i dq_i^j$$

и обозначая

$$L^0 = \eta - q_0E - q_iv^i - q_i^jF_j^i = \frac{1}{\Theta}\left(\frac{1}{\rho}\sigma_k^k + \frac{1}{2}v_iv^i - A\right), \tag{4.10}$$

$$L^m = \frac{1}{\rho} q_0 F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i + \frac{1}{\rho} q_i F_k^{-1m}\sigma^{ki} + q_i^j\delta_j^m v^i = -\frac{1}{\rho\Theta} F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i,$$

находим

$$E = -\frac{\partial L^0}{\partial q_0},\ v^i = -\frac{\partial L^0}{\partial q_i},\ F_j^i = -\frac{\partial L^0}{\partial q_i^j}, \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{\rho} F_k^{-1m}\sigma^{ki}v_i = \frac{\partial L^m}{\partial q_0},\ \frac{1}{\rho} F_k^{-1m}\sigma^{ki} = \frac{\partial L^m}{\partial q_i},\ \delta_j^m v^i = \frac{\partial L^m}{\partial q_i^j}.$$

Таким образом, с учетом (4.11) система дифференциальных уравнений нелинейной теории упругости может быть записана в виде симметричной системы первого порядка для четырех производящих функций L^0, L^m $(m = 1, 2, 3)$, определенных (4.10):

$$\frac{\partial L^0_{q_\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial L^m_{q_\alpha}}{\partial X^m} = L^0_{q_\alpha q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial t} + L^m_{q_\alpha q_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial X^m} = f_\alpha, \tag{4.12}$$

где $\quad L^{0,m}_{q_\alpha} = \partial L^{0,m}/\partial q_\alpha;\ L^{0,m}_{q_\alpha q_\beta} = \partial^2 L^{0,m}/\partial q_\alpha \partial q_\beta;$

$$q_\alpha = \{q_0, q_i, q_i^j\};\ f_\alpha = \{-(r + b^i v_i), -b^i, 0\}.$$

Для того чтобы система (4.12) была гиперболической, достаточно, чтобы матрица $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ была положительно определенной. В этом случае существует невырожденное преобразование, одновременно приводящее матрицы $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ и $L^m_{q_\alpha q_\beta}n_m$, входящие в характеристическое уравнение

$$\det\left\| -cL^0_{q_\alpha q_\beta} + L^m_{q_\alpha q_\beta}n_m \right\| = 0,$$

к диагональному виду.

Положительная определенность $L^0_{q_\alpha q_\beta}$ эквивалентна выпуклости функции $L^0 = L^0\left(1/\Theta, -v_i/\Theta, -F_k^{-1j}\sigma_i^k/(\rho\Theta)\right)$ относительно всех своих аргументов. Воспользуемся свойством [7], в силу которого функция M такая, что

$$M(1/q_0, q_1/q_0, \ldots, q_n/q_0) = (1/q_0)L^0(q_0, q_1, \ldots, q_n)$$

является выпуклой, если L^0 выпукла. Достаточное условие гиперболичности тогда можно сформулировать в виде условия выпуклости функции $M\left(\Theta, v_i, F_k^{-1j}\sigma_i^k/\rho\right) = \sigma_k^k/\rho + v_iv^i/2 - A$. Построив преобразование Лежандра H функции M, придем к следующему результату:

$$H\left(\eta, v_i, F_j^i\right) = U\left(F_j^i, \eta\right) + \frac{1}{2} v_iv^i.$$

Таким образом, матрица $L^0_{\alpha\beta}$ будет положительно определенной, если положительно определена квадратичная форма:

$$(\partial^2 U/\partial g_\alpha \partial g_\beta)\lambda^\alpha\lambda^\beta > 0, \tag{4.13}$$

где $g_\alpha = \{F^m_n, \eta\}$; $\lambda^\alpha \neq 0$ — произвольный вектор. Условие (4.13) заведомо сильнее условия (4.4).

Отметим, что в силу формул (4.11) и выпуклости функции L^0 определитель $\partial(E, v^i, F^i_j)/\partial(q_0, q_i, q^j_i) \neq 0$, что обеспечивает при $c_F \neq 0$ взаимную однозначность отображения $(\Theta, v^i, F^i_j) \leftrightarrow (q_0, q_i, q^j_i)$, которая предполагалась выше.

5. Сильные разрывы. Для системы дивергентных уравнений (3.2) или (3.7) можно определить слабое или обобщенное решение [3], справедливое не только в областях гладкости, но и при наличии поверхностей разрыва. Пусть $\varphi(x^i, t) = 0$ — уравнение такой поверхности. Обозначим через D нормальную составляющую скорости движения, n_i — вектор нормали к рассматриваемой поверхности. Тогда из (3.2) следуют соотношения на сильном разрыве:

$$[\rho GE] + [\sigma^{ik}v_i + q^k]n_k = 0, \quad [\rho Gv^i] + [\sigma^{ik}]n_k = 0, \tag{5.1}$$
$$[\rho GF^i_j] + [\rho v^i F^k_j]\, n_k = 0,$$

где $G = D - v^i n_i$ — скорость движения разрыва относительно частиц среды; $[a]$ — скачок величины a на разрыве.

Сворачивая уравнение для скачка F^i_j с n_i, получим для нестационарных разрывов $(D \neq 0)$

$$[\rho F^k_j n_k] = \left[\frac{\rho_0}{\det\|F^m_n\|} F^k_j n_k\right] = 0. \tag{5.2}$$

Соотношение (5.2) выражает непрерывность нормали к поверхности разрыва в отсчетной конфигурации, если плотность последней постоянна.

Из (5.1) с учетом (5.2) следует непрерывность потока массы:

$$[\rho G] = 0, \tag{5.3}$$

получаемая обычно из уравнения непрерывности [1]. Чтобы показать это, идентифицируем точки поверхности разрыва с помощью криволинейных координат ξ^α ($\alpha = 1, 2$). Пусть $x^i = x^i(X^m(\xi^\alpha, t), t)$ — радиус-вектор какой-либо фиксированной точки ξ^α. Тогда

$$D^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{\xi^\alpha} = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{X^m} + \left.\frac{\partial x^i}{\partial X^a}\frac{\partial X^a}{\partial t}\right|_{\xi^\alpha} = v^i + F^i_a D^a_*,$$

где $D^a_* = (\partial X^a/\partial t)|_{\xi^\alpha}$ — скорость поверхности относительно отсчетной конфигурации. Отсюда

$$[\rho G] = [\rho(D^i - v^i)\, n_i] = [\rho F^k_i n_k D^i_*] = [\rho F^k_i n_k]\, D^i_* = 0.$$

Соотношения (5.2), (5.3) позволяют записать уравнение для скачка F^i_j в виде

$$[F^i_j] = h^i \rho F^k_j n_k, \; h^i = -\frac{1}{\rho G}[v^i], \tag{5.4}$$

после чего два первых уравнения (5.1) принимают форму

$$\rho G\left\{[U] - \frac{1}{2}(\sigma^k_i + \overset{\circ}{\sigma}{}^k_i)\, h^i n_k\right\} + [q^k]\, n_k = 0, \tag{5.5}$$
$$[\sigma^{ik}]n_k - (\rho G)^2 h^i = 0,$$

где $\overset{\circ}{\sigma}{}^k_i$, σ^k_i — тензор напряжений перед и за фронтом ударной волны.

Рассмотрим теперь в адиабатическом приближении ($q^i = 0$) такую задачу. Пусть известно состояние среды, т. е. величины $\overset{\circ}{F}{}^m_n$, $\overset{\circ}{\eta}$ перед фронтом ударной волны с заданной скоростью движения G. Требуется найти необходимые условия, при которых состояние среды за фронтом, задаваемое величинами

$$F^i_j = \overset{\circ}{F}{}^i_j + h^i \rho \overset{\circ}{F}{}^k_j n_k,\ \eta = \overset{\circ}{\eta} + \tau,\quad \tau = [\eta],$$

определено единственным образом.

Будем рассматривать соотношения (5.5) как систему уравнений относительно неизвестных h^m и τ:

$$\Phi^0 (h^m, \tau) = U (\overset{\circ}{F}{}^m_n + h^m \rho \overset{\circ}{F}{}^k_n n_k, \overset{\circ}{\eta} + \tau) - U (\overset{\circ}{F}{}^m_n, \overset{\circ}{\eta}) - \tag{5.6}$$

$$- \frac{1}{2} n_k h^i \{\sigma^k_i (\overset{\circ}{F}{}^m_n + h^m \rho \overset{\circ}{F}{}^a_n n_a, \overset{\circ}{\eta} + \tau) + \sigma^k_i (\overset{\circ}{F}{}^m_n, \overset{\circ}{\eta})\} = 0,$$

$$\Phi^i (h^m, \tau) = n_k \{\sigma^{ki} (\overset{\circ}{F}{}^m_n + h^m \rho \overset{\circ}{F}{}^a_n n_a, \overset{\circ}{\eta} + \tau) - \sigma^{ki} (\overset{\circ}{F}{}^m_n, \overset{\circ}{\eta})\} - (\rho G)^2 h^i = 0.$$

В соответствии с теоремой существования неявных функций необходимым условием разрешимости системы (5.6) относительно h^i и τ является

$$\partial(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^0)/\partial(h^1, h^2, h^3, \tau) \neq 0, \tag{5.7}$$

где Φ^0, Φ^i — достаточно гладкие функции своих аргументов.

Вычисляя производные, входящие в (5.7), и пользуясь соотношением

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial h^j} + \frac{1}{2} h_i \frac{\partial \Phi^i}{\partial h^j} = 0,$$

неравенство (5.7) можно записать в форме

$$\Theta \det \left\| (\rho G)^2 g_{ij} - (\rho F^a_m n_a) \frac{\partial^2 U}{\partial F^i_m \partial F^j_n} (\rho F^b_n n_b) \right\| \neq 0. \tag{5.8}$$

Сравнивая (5.8) и (4.4), находим, что искомым условием является $\rho G \neq \neq \rho c$, т. е. скорость ударной волны не должна равняться скорости распространения характеристической поверхности.

Поступила 20 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
2. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975.
3. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
4. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
5. **Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н.** Методы подвижных координат в газовой динамике.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды. 1976, т. 2, № 2.
6. **Vinocur M.** Conservation equations of gas-dynamics in curvilinear coordinate systems.— J. Comput. Phys., 1974, vol. 14, N 2.
7. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.

УДК 539.3 : 678.5.06

ОБ УЧЕТЕ СТРУКТУРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ КОМПОЗИТА ПРИ ОЦЕНКЕ АДГЕЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ

Л. И. Маневич, А. В. Павленко

(Днепропетровск)

Одной из основных характеристик композитного материала является адгезионная прочность. Экспериментальное определение этой характеристики (в случае волокнистого композита) может быть основано на измерении нагрузки, соответствующей «выдергиванию» волокна из матрицы.