разрушение начинается из центра шейки (темные кружки; то же с треугольниками для образцов, отпущенных при 300 °С), т. е. $\eta = 1{,}23$, $x^* \approx \approx 0{,}5y^*$, согласно (1.3).

Для нейтрализации поверхностных дефектов проведено разупрочнение поверхностного слоя образцов на глубину 0,5 мм с помощью индукционного отпуска. В результате полностью исключено разрушение от поверхности (более 100 образцов; на рис. 3 кружки, заштрихованные наполовину). При этом средняя прочность при разрушении увеличилась с 2590 до 2750 МПа, несмотря на разупрочнение части сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Конторова Т. А., Френкель Я. И.** Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // ЖТФ.— 1941.— Т. 11, вып. 3.
2. **Александров А. П., Журков С. Н.** Явление хрупкого разрыва.— М.: ГТТИ, 1933.
3. **Давиденков Н. Н.** Проблема удара в металловедении.— Киев: Наук. думка, 1981.— Т. 1.
4. **Шевандин Е. М., Маневич Ш. С.** Эффект масштаба при хрупком разрушении стали // ЖТФ.— 1946.— Т. 16, вып. 11.
5. **Бартнев Е. М., Бовкуменко А. Н.** Прочность стеклянных волокон и влияние на нее различных факторов // ЖТФ.— 1956.— Т. 26, вып. 11.
6. **Дроздовский Б. А., Фридман Я. Б.** Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей.— М.: Металлургия, 1960.
7. **Васильев Л. И.** К вопросу о статистической теории хрупкой прочности // Тр. Сиб. физ.-тех. ин-та.— 1948.— Вып. 26.
8. **Ирвин Дж., Парис П.** Основы теории роста трещин и разрушения // Разрушение.— М.: Мир, 1976.— Т. 3.
9. **Петерсон Р.** Коэффициенты концентрации напряжений.— М.: Мир, 1977.
10. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики.— М.: Наука, 1965.
11. **Макклинток Ф., Аргон А.** Деформация и разрушение материалов.— М.: Мир, 1970.
12. **Давиденков Н. Н., Спиридонова И. И.** Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца.— Киев: Наук. думка, 1981.— Т. 2.

Поступила 14/I 1987 г.

УДК 536.25

О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ КАПЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Е. Редников, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

В стоксовом приближении и в предположении малости теплового числа Пекле найдено приближенное аналитическое решение задачи о распределении скорости и температуры при термокапиллярном движении капли под действием поглощаемого на ее поверхности излучения в отсутствие гравитации. Найдены скорость дрейфа и поправка к сферической форме поверхности капли. Указано, что полученные результаты применимы в случае произвольных поверхностных источников тепла, расположенных симметрично относительно оси, проходящей через центр масс капли.

Наличие неоднородного распределения температуры вдоль поверхности капли в силу температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения приводит к скачку тангенциальных напряжений на поверхности, что обусловливает различные термокапиллярные эффекты, такие как неустойчивость состояния покоя капли и ее дрейф с постоянной скоростью в отсутствие гравитации [1—4]. В литературе рассмотрены различные механизмы возникновения неоднородного поверхностного распределения температуры. В одном случае оно связано с несимметричным, не зависящим от движения капли распределением источников тепла [1, 2], в другом — поверхность в состоянии покоя нагревается равномерно и температурный градиент вдоль поверхности возникает лишь при движении капли и через поверхностное натяжение, в свою очередь, влияет на движение [3, 4].

В данной работе исследовано относящееся к первому случаю термокапиллярное движение капли вязкой жидкости в другой, не смешивающейся с ней вязкой жидкости, заполняющей все пространство, при облучении капли с одной стороны однородным по сечению плоскопараллельным лучом света в отсутствие гравитации. Предполагается, что излучение полностью поглощается на поверхности капли, а окружающая каплю среда прозрачна. Рассматривается установившееся медленное движение капли вдоль направления падающего излучения. Используются уравнения Стокса, и в уравнении теплопроводности пренебрегается конвективными членами [5]. Считается, что поверхность капли сохраняет сферическую форму. Плотности, вязкости, теплопроводности, теплоемкости жидкостей вне и внутри капли принимаются постоянными, а коэффициент поверхностного натяжения — линейной функцией температуры.

Рассмотрение проведено в системе отсчета, связанной с центром капли, в которой задача сведется к обтеканию капли плоскопараллельным потоком жидкости. В рамках сформулированных допущений уравнения и граничные условия для функции тока и температуры запишутся в виде

$$E^4\psi_i = 0,\ E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}; \tag{1}$$

$$r \to \infty,\ \psi_1 \to r^2(1-\mu^2)/2,\ r = 0,\ \psi_2/r^2 < \infty, \tag{2}$$

$$r = 1,\ \psi_1 = \psi_2 = 0,\ \partial\psi_1/\partial r = \partial\psi_2/\partial r;$$

$$\left(2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(\psi_1 - \beta\psi_2) = \mathrm{Ma}\,(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu}; \tag{3}$$

$$\Delta\varphi_i = 0; \tag{4}$$

$$r \to \infty,\ \varphi_1 \to 0,\ r = 0,\ \varphi_2 < \infty, \tag{5}$$

$$r = 1,\ \varphi_1 = \varphi_2,\ \partial\varphi_1/\partial r - \delta\partial\varphi_2/\partial r + f(\mu) = 0;$$

$$f(\mu) = \begin{cases} -\mu, & -1 \leqslant \mu \leqslant 0, \\ 0, & 0 < \mu \leqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$\mu = \cos\theta,\ v_{ir} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi_i}{\partial\theta},\quad v_{i\theta} = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi_i}{\partial r},$$

$$\beta = \frac{\mu_2}{\mu_1},\ \delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},\ \psi_i = \frac{\Psi_i}{U_\infty a^2},\ \varphi_i = \frac{\lambda_1(T_i - T_\infty)}{Ia},\ \mathrm{Ma} = \frac{Ia}{\mu_1\lambda_1 U_\infty}\frac{d\sigma}{dT}.$$

Индексы $i = 1, 2$ здесь и в дальнейшем относятся к внешней среде и капле соответственно; U_∞ — скорость набегающего потока, которая подлежит определению из условия обращения в нуль силы, действующей на каплю ($U_\infty > 0$, если скорость направлена по оси x, $U_\infty < 0$ в противоположном случае); Ψ_i, $\mathbf{v}_i$, T_i — функция тока, скорость и температура; μ_i, λ_i, σ — коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и поверхностного натяжения; T_∞ — температура вдали от капли; a — радиус капли, используемый при обезразмеривании в качестве масштаба длины; $f(\mu)$— функция поверхностного тепловыделения; I — интенсивность падающего излучения; Ма — число Марангони. Ось x выбрана сонаправленной распространению излучения и проходящей через центр капли.

Использована сферическая система координат, в которой безразмерный радиус r отсчитывается от центра капли, а угол θ — от положительного направления оси x.

Согласно [6], решение задачи (1) с условиями (2) имеет вид

$$\psi_1 = \left(r^2 + Ar - \frac{A+1}{r}\right)\frac{1-\mu^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n(r^{-n+3} - r^{-n+1})\,G_n(\mu), \tag{7}$$

$$\psi_2 = \left(A + \frac{3}{2}\right)(r^4 - r^2)\frac{1-\mu^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n(r^{n+2} - r^n)\,G_n(\mu)$$

($G_n(\mu)$— функция Гегенбауэра первого рода порядка n степени $-1/2$). Постоянные A, A_n (n = 3, 4 ...) пока не определены и находятся из (3) после решения задачи о распределении температуры.

Решение (4) с граничными условиями (5) есть

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{r^{n+1}}P_n(\mu),\quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\mu); \tag{8}$$

$$(9)\qquad B_n = \frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{n(\delta+1)+1}\int\limits_{-1}^{1} f(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu,\quad n = 0, 1, 2\ldots$$

($P_n(\mu)$— полином Лежандра первого рода порядка n).

Подставляя (7), (8) в (3), находим

$$(10)\qquad A = \left[\frac{\mathrm{Ma}\,B_1}{3} - \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)\right](1+\beta)^{-1},$$

$$A_n = \frac{\mathrm{Ma}\,B_{n-1}n\,(n-1)}{2\,(2n-1)\,(1+\beta)},\quad n = 3, 4\ldots$$

Для завершения построения решения задачи об обтекании капли остается найти скорость U_∞ или скорость дрейфа U_* ($U_* = -U_\infty$).

Сила, действующая на каплю, согласно [6],

$$(11)\qquad F = -4\pi\mu_1 a A U_\infty.$$

Если $F > 0$, то сила направлена по оси x, если $F < 0$,— то против оси x. После подстановки (10) выражение (11) запишется в виде

$$(12)\qquad F = 4\pi\mu_1 a\left[\left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)U_\infty - \frac{d\sigma}{dT}\,\frac{IaB_1}{3\mu_1\lambda_1}\right](1+\beta)^{-1}.$$

Скорость дрейфа U_* в отсутствие гравитации найдется из условия обращения в нуль силы (12):

$$(13)\qquad U_* = -\frac{d\sigma}{dT}\,\frac{IaB_1}{3\mu_1\lambda_1}\left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)^{-1}.$$

Стоит отметить, что как решение (7) для обтекания капли с учетом (10), так и (12) для действующей на каплю силы можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых определяет обычное стоксово обтекание капли со скоростью U_∞ и обычное выражение для действующей на каплю силы [6], а второе представляет собой чисто термокапиллярное движение и чисто термокапиллярную силу.

Формулы (7)—(13) применимы для произвольного распределения поверхностных источников тепла, симметричного относительно оси, проходящей через центр капли. Тогда $f(\mu)$ будет безразмерной функцией распределения поверхностных источников тепла, а I — величиной характерного тепловыделения на поверхности. Легко видеть, что если к тому же источники тепла расположены симметрично относительно плоскости, проходящей через центр капли перпендикулярно оси симметрии, то термокапиллярные напряжения, обусловленные такими источниками, не влияют в рассматриваемом приближении на движение капли (B_1 обращается в нуль), хотя при этом течение вне и внутри капли вообще говоря изменится (не все B_n ($n = 2, 3\ldots$) обращаются в нуль). Для нахождения влияния таких источников на движение капли уже необходимо рассмотреть следующий член в разложении температуры по малому числу Пекле, как это сделано в [3].

Если источником тепла является поглощаемое на поверхности излучение, то из (6), (9) получается $B_1 = -(\delta+2)^{-1}/2$ и выражение для скорости дрейфа в отсутствие гравитации перепишется в виде

$$(14)\qquad U_* = \frac{d\sigma}{dT}\,\frac{Ia}{6\mu_1\lambda_1(\delta+2)}\left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)^{-1}.$$

Поскольку для большинства веществ $d\sigma/dT < 0$, то, как следует из (14), капля будет дрейфовать навстречу лучу. Качественные соображения указывают на устойчивость термокапиллярного дрейфа капли. Действительно, при отклонении скорости дрейфа от равновесного значения возникает дополнительная сила, действующая против этого изменения.

Условия малости чисел Рейнольдса и Пекле, принятые в данной работе, накладывают некоторые ограничения на значения параметров задачи, при которых решение можно считать корректным. При формулировке задачи (1)—(5) опущено граничное условие для нормальных напряжений на поверхности капли

$$(15)\quad r=1,\quad -\frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}}(\bar{p}_1-\beta\bar{p}_2)-2\frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}}(\partial^2_{r\mu}\psi_1-\beta\partial^2_{r\mu}\psi_2)=2h\left(1+\frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}}\mathrm{Ma}\,\varphi_1\right),$$

$$\mathrm{We}=\rho_1 aU_\infty^2/\sigma_\infty,\quad \mathrm{Re}=\rho_1 aU_\infty/\mu_1.$$

Здесь p_1, p_2 — давление вне и внутри капли, отнесенное соответственно к $\mu_1 a^{-1}U_\infty$ и к $\mu_2 a^{-1}U_\infty$; σ_∞ — коэффициент поверхностного натяжения при температуре вдали от капли; We, Re — числа Вебера и Рейнольдса; $h = Ha/2$; H — кривизна поверхности капли (для сферической капли $H = 2/a$, $h = 1$); ρ_i — плотность.

Подставляя уже известные решения (7), (8) с учетом (9), (10), а также выражения для давления, которые легко найти, зная функцию тока [6], можно убедиться, что соотношение (15), вообще говоря, не выполняется. Это означает, что форма капли не может оставаться сферической ($h \neq 1$). Однако при выполнении условия $\varepsilon = \mathrm{Ma\,We/Re} \ll 1$ отклонение формы от сферической будет малым, а (15) необходимо уже рассматривать как граничное условие для нормальных напряжений, снесенное на сферическую поверхность ($r = 1$), которое в главном приближении сведется к лапласовскому скачку давления на поверхности капли.

Форма поверхности ищется в виде

$$(16)\qquad R(\mu)=1+\varepsilon\zeta(\mu);$$

$$(17)\qquad \zeta(\mu)=\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n P_n(\mu).$$

Разложение (17) начинается с члена с номером $n = 2$, поскольку при деформации поверхности объем капли не изменяется и начало координат выбрано в ее центре масс.

Безразмерная кривизна h представляется как разложение по малому параметру

$$(18)\qquad h=1+\varepsilon h^{(1)}$$

и в силу соотношения $h^{(1)} = -\zeta-(1/2)d((1-\mu^2)d\zeta/d\mu)/d\mu$ будет

$$(19)\qquad h^{(1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n P_n(\mu),\quad \gamma_n=\alpha_n(n-1)(n+2)/2.$$

Подставляя (7), (8), (18) с учетом (9), (10), (19), а также выражения для давления [6] в (15), получим

$$(20)\qquad A=0;$$

$$(21)\qquad \alpha_n=\frac{\beta-n\beta-n-2}{(2n+1)(n-1)(n+2)(1+\beta)}B_n,\quad n=2,3\ldots$$

Равенство (20) отражает тот факт, что сила, действующая на каплю, равна нулю, а (21) вместе с (16), (17) определяет форму поверхности.

Если предположить наличие силы тяжести, параллельной направлению распространения излучения (или оси симметрии поверхностных источников тепла), то скорость движения капли уже не будет удовлетворять соотношениям (13) или (14) и найдется из условия обращения в нуль результирующей силы, действующей на каплю, равной сумме силы (12) и массовой силы. Из того же условия можно определить интенсивность излучения, необходимую для удержания капли в покое. Соотношения (16), (17), (21) по-прежнему справедливы, поскольку, как следует из них, форма капли в рассматриваемом приближении не зависит от скорости U_∞ и в конечном счете от силы тяжести. И это неудивительно, так как она определяется только чисто термокапиллярными слагаемыми функции тока.

При Ма = 0 или $\delta \to \infty$ (большая теплопроводность вещества капли) емпература вдоль поверхности постоянна и термокапиллярный эффект счезает. При этом из (7) получается решение Рыбчинского — Адамара, из (12)— обычное выражение для силы сопротивления капли [6], форма тановится строго сферической, скорость дрейфа (13) или (14) обращается в нуль.

При $\beta \to \infty$ (большая вязкость вещества капли) движение внутри апли затормаживается, термокапиллярные напряжения не играют никакой роли, (7), (12) сводятся к соответствующим выражениям для стоксова обтекания твердого шарика и силы Стокса [6]. Скорость дрейфа обращается в нуль. Однако форма капли остается несферической. Это связано тем, что хотя движение жидкости внутри капли очень слабо, в силу больпой вязкости оно приводит к заметным напряжениям и перепадам давления, что и обусловливает несферичность формы, к тому же влияет изменение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

. **Братухин Ю. К.** Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1975.— № 5.

. **Яламов Ю. И., Санасарян А. С.** Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // Инж.-физ. журн.— 1975.— Т. 28, № 6.

. **Рязанцев Ю. С.** О термокапиллярном движении реагирующей капли в химически активной среде // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.

. **Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.** О хемотермокапиллярном эффекте для движения капли в жидкости // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 1.

. **Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.** Тепломассообмен реагирующих частиц с потоком.— М.: Наука, 1985.

. **Хаппель Дж., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.

Поступила 24/V 1988 г.