

3. Ганчев Б. Г., Козлов В. М., Лозовецкий В. В. Исследование нисходящего течения жидкости по вертикальной поверхности и теплопереноса к ней. — ИФЖ, 1971, т. 20, № 4.
4. Ганчев Б. Г., Козлов В. М. Исследование гравитационного течения пленки жидкости по стенкам вертикального канала большой длины. — ПМТФ, 1973, № 1.
5. Chu K. J., Dukler A. E. Statistical characteristics of thin, wavy films. Pt III. Structure of the large waves and their resistance to gas flow. — AIChE J., 1975, vol. 21, N 3.
6. Ганчев Б. Г., Козлов В. М., Лозовецкий В. В. Стеkanie пленки жидкости в вертикальном канале. — В кн.: Исследование процессов в энергетических установках. Вып. 2. М.: изд. МВТУ, 1975.
7. Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. — ПМТФ, 1962, № 4.
8. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости. — ПМТФ, 1973, № 2.

УДК 532.593

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев, Н. В. Газрилов

(Новосибирск)

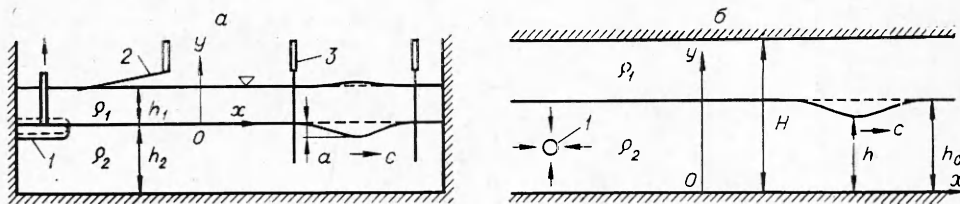
Получены экспериментальные данные для проверки некоторых результатов теоретических исследований уединенных внутренних волн в двух различных случаях. В первом из них уединенная волна генерировалась на поверхности раздела двух мелких слоев несмешивающихся жидкостей разной плотности ρ_1 и $\rho_2 > \rho_1$, ограниченных снизу горизонтальным дном, сверху — свободной поверхностью и в невозмущенном состоянии покоящихся (фиг. 1, а). Теоретически такая схема впервые рассматривалась в приближении Буссинеска в [1], а затем в условиях применимости уравнения Кортевега — де Вриза в [2, 3].

Соответствующие этому случаю экспериментальные исследования были выполнены в [4, 5]. Полученная в них информация дополнена в данных исследованиях, в частности, в том отношении, что в опытах наряду со скоростью распространения уединенной волны и ее профилем регистрировались также траектории жидких частиц. Ранее были выполнены еще два лабораторных экспериментальных исследования уединенных внутренних волн в покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости [6, 7], но при ином, чем указано выше, распределении плотности по глубине и иной геометрии течения.

Второй из рассмотренных случаев отличался тем, что слои были ограничены сверху непроницаемой горизонтальной «крышкой» и, что более существенно, в невозмущенном состоянии имел место сдвиг скорости между слоями (фиг. 1, б). Возможность образования уединенных волн на поверхности раздела в этой схеме движения стратифицированной жидкости впервые была предсказана на основе второго приближения теории мелкой воды в докладе Л. В. Овсянникова, который будет упоминаться ниже, как работа [8] (в списке литературы под этим номером указана краткая аннотация доклада).

Ниже используется неподвижная прямоугольная система координат x, y , показанная на фиг. 1 (разное положение начала отсчета по оси y и разный способ задания глубин в схемах а и б приняты для согласования с соответствующими теоретическими работами). Отклонение границы раздела от положения равновесия обозначено символом η , максимальное отклонение (амплитуда волны) — a , скорость распространения волны — c . Рассматриваются только двумерные волны.

Для реализации в опытах схемы, изображенной на фиг. 1, а, использовался непроточный лоток из оргстекла прямоугольного поперечного сечения длиной 220 см, шириной 17 см и высотой 15 см. Стратификация в нем создавалась с помощью одной из двух пар несмешивающихся жидкостей: керосина и воды с отношением плотностей $\sigma = \rho_1/\rho_2 = 0,8$ или воды и хладона-113 с $\sigma = 0,67$. Генерация уединенной волны на поверхности раздела осуществлялась, как и в [4, 5], пластиной I , перемещаемой на некоторое расстояние по вертикали. При этом имели место нежелательные возмущения свободной поверхности, которым в результатах теоретического анализа соответствует так называемая быстрая мода колеба-



Ф и г. 1

ний. В опытах эти возмущения были малы по интенсивности и эффективно гасились наклонной пластиной 2. Регистрация волн осуществлялась датчиками электропроводности 3, созданными для этих опытов В. В. Зыковым и Е. И. Хахилевым, а также фотосъемкой.

Схема, изображенная на фиг. 1, б, реализовывалась в лотке из оргстекла, в котором нижняя жидкость (вода) могла двигаться со скоростью u_0 , равномерно распределенной по вертикали в начальном сечении, а в верхнем слое (в керосине) имело место лишь слабое циркуляционное движение, обусловленное трением на границе раздела. Длина рабочей части лотка составляла 100 см, ширина 20 см, высота H в опытах варьировалась. Уединенная волна, направленная выпуклостью вниз, генерировалась путем кратковременного отсоса воды через перфорированную трубку, помеченную на схеме цифрой 1, т. е. путем кратковременного включения стока, равномерно распределенного по ширине лотка. Уединенная волна, направленная выпуклостью вверх, генерировалась аналогичным образом путем включения источника. Для измерения расхода воды применялся водослив с острой кромкой, расположенной в отводящей магистрали. Он предварительно калибровался объемным способом. На этой установке проводились также опыты с покоящимися в невозмущенном состоянии слоями, но с непроницаемой «крышкой» вместо свободной поверхности в качестве верхней границы. При этом генерация уединенных волн осуществлялась пластиной.

Изучение метрологических характеристик применявшихся в опытах датчиков показало, что они имели линейную статическую калибровочную характеристику с пренебрежимо малым гистерезисом и пространственно-временную разрешающую способность, удовлетворяющую требованиям данных опытов. Случайные погрешности измерений оцениваются коэффициентами вариации не более 5% и иллюстрируются разбросом экспериментальных точек на приводимых ниже графиках.

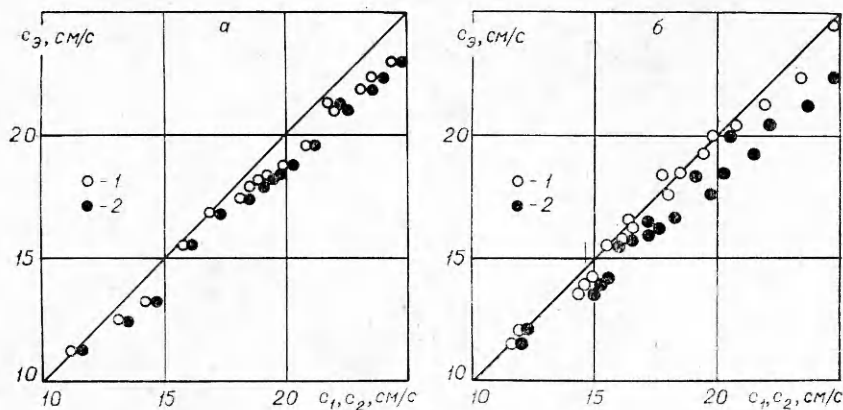
Основное различие в условиях проведения опытов с упомянутыми выше математическими моделями заключалось в том, что в последних не учитывается влияние вязкости реальных жидкостей. Кроме того, на границе раздела несмешивающихся жидкостей имеет место поверхностное натяжение, которое также не учитывается в этих математических моделях. Но в данной работе поверхностное натяжение играло только положительную роль. Оно эффективно подавляло неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в опытах с движущимся нижним слоем вплоть до разности скоростей порядка 30 см/с и в то же время в соответствии с оценками по формулам, приведенным, например, в [9], практически не влияло на характеристики достаточно длинных уединенных волн.

Рассмотрим случай покоящихся в невозмущенном состоянии слоев. В соответствии с [1, 3] форма уединенных волн описывается в этом случае выражением

$$(1) \quad \eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2[k(x - ct)],$$

где k — волновое число; t — время. Для скорости распространения c в [1, 3] даются разные формулы соответственно:

$$(2) \quad c_1 = c_{10} \sqrt{1 + \frac{(m-1)a}{mh_2}} \sqrt{gh_2};$$



Ф и г. 2

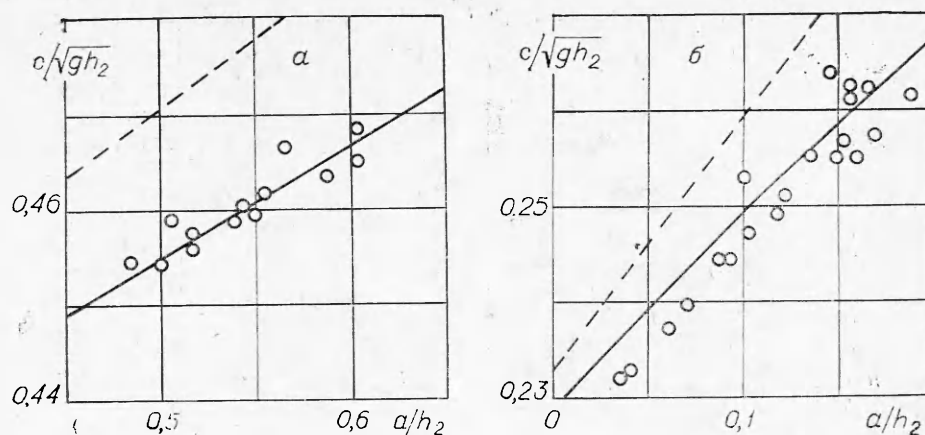
$$(3) \quad c_2 = \left(c_{20} + \frac{\alpha a}{2h_2} \right) \sqrt{gh_2},$$

где g — ускорение силы тяжести; c_{10} , c_{20} , α — некоторые безразмерные величины [1, 3], зависящие от отношения плотностей σ и от отношения глубин $m = h_1/h_2$. Амплитуда волны a , от которой зависит не только c , но и k , считается заданной.

Теоретический анализ [1, 3] показывает, что при одних значениях параметров σ и m на границе раздела могут существовать только уединенные волны, направленные выпуклостью вверх ($a > 0$), а при других — только волны, направленные выпуклостью вниз ($a < 0$). По свободной поверхности также движется уединенная волна, находящаяся в противофазе с внутренней волной и имеющая при рассмотренных в опытах значениях σ и m существенно меньшую амплитуду. Качественно эти результаты теории хорошо подтверждаются в опытах.

Результаты проверки формул (2), (3) иллюстрируются на фиг. 2, 3, где случай a относится к волнам с $a > 0$, а случай $б$ — к волнам с $a < 0$. На первой из них используются все полученные экспериментальные данные в диапазоне значений m от 0,36 до 3,3, a/h_2 от 0,04 до 0,6 при $\sigma = 0,8$. По оси абсцисс отложены расчетные значения скорости распространения волн, а по оси ординат — экспериментально найденные скорости c_3 при соответствующих значениях параметров σ , m и a/h_2 . В случае идеальной корреляции расчетных и экспериментальных данных точки на фиг. 2 группировались бы около прямой, являющейся биссектрисой координатного угла. Фактически же имеет место некоторое систематическое отклонение, несколько большее для точек 2, соответствующих модели [3], чем для точек 1, соответствующих модели [1].

Указанное отклонение с практической точки зрения не так уж и велико, но оно подчеркивает одно слабое место рассматриваемых математических моделей, которое удобно проследить на примере [3], где используется второе приближение теории мелкой воды, но предполагается малость не одного, а двух параметров (в качестве которых можно принять отношение глубины нижнего слоя к длине волны и отношение амплитуды волны к глубине нижнего слоя) и считается, что оба они имеют один и тот же порядок малости. Если предположение о малости первого из этих параметров имеет принципиальное значение для получения содержательных теоретических результатов, то уединенные волны очень малой амплитуды представляют существенно меньший практический интерес, и это ограничение теории было бы желательно снять. Аналогичный недостаток имеет и работа [1]. В [8] ограничение на амплитуду волны не накладывается, и, как будет показано ниже, это приводит к существенно лучшему совпадению расчетных и экспериментальных скоростей распространения волн.



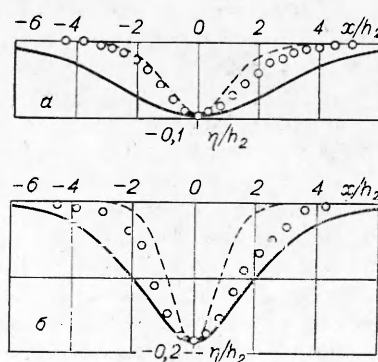
Ф и г. 3

Вопрос о том, какие значения a/h_2 можно считать достаточно малыми с точки зрения моделей [1, 3], требует специального экспериментального исследования, поскольку верхняя граница малости этого параметра сложным образом зависит от значений σ и m , а также от допустимого расхождения расчетных и экспериментальных данных. Здесь можно отметить только, что в этом отношении формула (2) имеет преимущества перед формулой (3). Для иллюстрации на фиг. 3 приведена зависимость скорости распространения волны от ее амплитуды при следующих значениях параметров: $\sigma = 0,8$, $m = 3,3$, $h_2 = 0,92$ см для фиг. 3, а и $\sigma = 0,8$, $m = 0,357$, $h_2 = 3,5$ см для фиг. 3, б. В обоих случаях сплошные линии получены расчетом по формуле (2), штриховые — по формуле (3), точками нанесены экспериментальные данные.

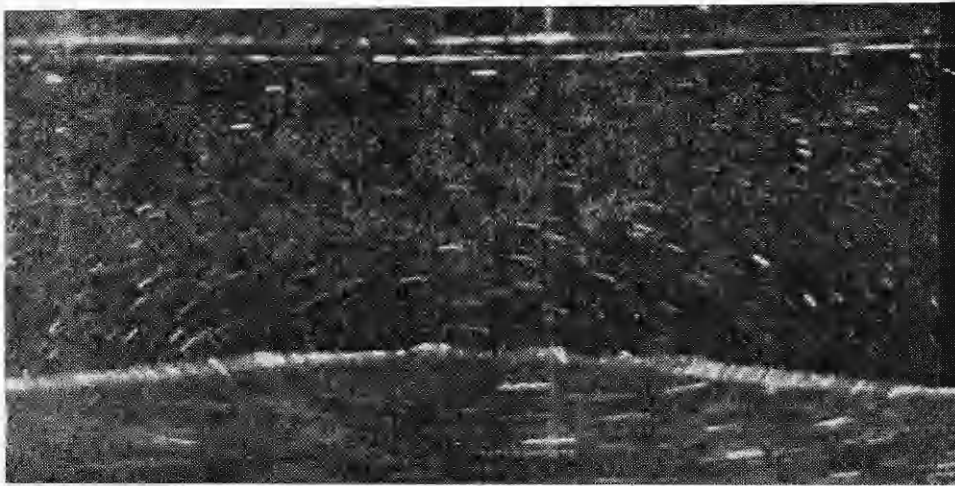
На фиг. 4 сравниваются расчетные (по формуле (1)) и экспериментальные профили уединенных волн при $a < 0$, $\sigma = 0,8$, $m = 0,36$ и двух приведенных на графиках значениях a/h_2 . В расчетах использовалось экспериментально найденное значение a , так как применительно к схеме данных опытов этот параметр в теории следует считать заданным. Сплошные линии соответствуют модели [1], штриховые — модели [3], экспериментальные данные показаны точками. Можно видеть, что при $a/h_2 = 0,1$ лучшие результаты по форме волны дает модель [3]. Сопоставляя этот факт с выводами из фиг. 2, 3, приходим к заключению, что скорость распространения уединенной волны не сильно зависит от ее профиля, а более важным параметром является ее амплитуда.

На фиг. 5 приведена картина траекторий движения жидких частиц в уединенной волне в неподвижной системе координат. Она получена методом визуализации течения частицами алюминиевой пудры размером в несколько микрон при $\sigma = 0,67$, $m = 3,5$, $h_2 = 1$ см. Время экспозиции при фотосъемке составляло 0,250 с. Волна двигалась вправо, горизонтальная проекция скорости частиц направлена влево в верхнем слое и вправо в нижнем. Расстояние между делениями координатной сетки, нанесенной на стенке лотка, 5 см. На фотоснимке достаточно четко прослеживается излом траекторий движения частиц на границе раздела, свидетельствующий о хорошем соответствии реальной картины условию скольжения слоев друг относительно друга, используемому в теоретических моделях.

Случай относительного движения слоев (см. фиг. 1, б) характеризуется нали-



Ф и г. 4



Ф и г. 5

чем в задаче еще одного независимого параметра $u = u_0/\sqrt{gH}$, что существенно пополняет класс интересных явлений, но сильно усложняет исследование. Здесь будут приведены лишь ограниченные результаты проверки формулы для скорости распространения уединенной волны из [8]:

$$(4) \quad c_2 = \frac{1-n}{1-\mu n} \left[u + \sqrt{u^2 - \frac{(u^2 - \mu n)(1 - \mu n)}{1-n}} \right] \sqrt{gH},$$

где $n = h/H$; $\mu = 1 - \sigma$. В случае, когда оба слоя покоятся,

$$(5) \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu n (1-n)}{1-\mu n}} \sqrt{gH}.$$

Теоретический анализ [8] показал также, что существует критическое значение глубины невозмущенного нижнего слоя

$$\frac{h_0^*}{H} = \frac{1 - \sqrt{\sigma/\mu}}{1 - \sqrt{\sigma}} u$$

такое, что при $h_0 > h_0^*$ могут существовать только волны с $a < 0$, а при $h_0 < h_0^*$ — только с $a > 0$.

Результаты экспериментальной проверки формул (4), (5) приведены в таблице, в которой три верхние строчки соответствуют условию $h_0 > h_0^*$, а три нижние — условию $h_0 < h_0^*$. В двух последних столбцах даны экспериментальные c_2 и расчетные c_p значения скорости распространения волн. Имеет место хорошее их совпадение, лучшее, чем при проверке моделей [1, 3]. Следует отметить, что в опытах с движущимся нижним слоем уединенная волна имела немного несимметричную форму, тогда как в теории волна симметрична. Но это не привело к расхождению с теорией по скорости распространения, что согласуется со сказанным выше.

H , см	h_0 , см	h_0 / h_0^*	h , см	u_0 , см/с	c_p , см/с	c_2 , см/с
4	2,75	1,40	1,95	9,0	19,3	19,0
3,15	2,40	1,44	2,15	0	12,4	12,4
3,15	2,40	1,44	1,90	0	12,9	12,7
3,15	0,85	0,54	1,10	5,5	15,7	15,4
3,15	1,00	0,60	1,30	0	12,7	12,7
3,15	1,00	0,60	1,45	0	13,0	13,2

Относительно влияния вязкости можно отметить, что она приводит лишь к слабому затуханию волн. В опытах по распространению волн в покоящейся жидкости было найдено, что их амплитуда уменьшалась примерно в e раз на расстоянии $s/l = 100$, где s — пройденный путь, l — длина основания прямоугольника, имеющего высоту a и площадь, равную площади волны. При этом имело место многократное отражение от торцевых стенок лотка.

Авторы благодарят Л. В. Овсянникова за инициативу постановки данных опытов и всестороннюю помощь в работе.

Поступила 23 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Keulegan G. H. Characteristics of internal solitary waves. — J. Res. of the Nat. Bur. of Stand., 1953, vol. 51, N 3.
2. Peters A. S., Stoker J. J. Solitary waves in liquids having nonconstant density. — Comm. Pure Appl. Math., 1960, vol. 13, N 1.
3. Kakutani T., Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid. — J. Phys. Soc. of Japan, 1978, vol. 45, N 2.
4. Walker L. R. Interfacial solitary waves in two-fluid medium. — Phys. Fluids, 1973, vol. 16, N 11.
5. Koop C. G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system. — J. Fluid Mech., 1981, vol. 112, p. 225.
6. Davis R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water. — J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, pt 3.
7. Kao T. W., Pao H.-P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves. — J. Fluid Mech., 1980, vol. 97, pt 1.
8. Овсянников Л. В. Второе приближение в теории мелкой воды. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 2.
9. Thorpe S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows immiscible fluids. — J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 1.

УДК 535.5 : 621.22

РАСЧЕТ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС КОЛЬЦЕВОЙ РЕШЕТКИ ЛОПАСТЕЙ

Л. А. Ткачева

(Новосибирск)

Для решения ряда задач аэроупругости турбомашин, например для расчета собственных частот и форм колебаний лопастей гидротурбин, необходимо знать коэффициенты присоединенных масс. Эти коэффициенты известны лишь для плоской решетки пластин [1—3]. Поэтому представляет интерес оценить влияние пространственности течения на их величину.

В данной работе рассматриваются присоединенные массы пространственной кольцевой решетки тонких лопастей, совершающих малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фазы в несжимаемой жидкости.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z кольцевую решетку N лопастей, колеблющихся в жидкости между двумя бесконечными цилиндрами C_1 и C_2 с радиусами r_1 и r_2 (фиг. 1). Предположим, что 1) жидкость идеальная, несжимаемая, покоится на бесконечности, а течение потенциальное; 2) лопасти бесконечно тонкие и представляют собой части винтовых поверхностей, которые задаются уравнениями

$$z = h(\theta - 2\pi n/N), \quad -\theta_0 < \theta - 2\pi n/N < \theta_0, \quad r_1 < r < r_2,$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где h — шаг винтовой поверхности, $2\theta_0$ — угол раствора лопасти; 3) все лопасти совершают малые колебания по одинаковому гармоническому закону с некоторым сдвигом фазы $\mu = 2\pi n/N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.