УДК 532.59:539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЯХ УЧАСТКА ДНА

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Решена задача о поведении плавающей упругой пластины в виде полосы под действием периодических колебаний участка дна. Используется численный метод, основанный на методе Винера — Хопфа. Численно исследовано влияние частоты, положения колеблющегося участка дна и глубины жидкости на амплитуды колебаний жидкости и пластины.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, метод Винера — Хопфа, частоты рассеяния.

Введение. В последнее время задача о гидроупругом поведении плавающих упругих пластин интенсивно изучается в связи с проектами построения плавучих аэродромов, искусственных островов и плавающих платформ различного назначения. Гигантские размеры таких объектов затрудняют выполнение критериев подобия при экспериментальных исследованиях, поэтому большую роль в их изучении играет численное моделирование.

Задача дифракции поверхностных волн на плавающей упругой пластине изучена достаточно хорошо. Значительно менее исследованы вынужденные колебания пластины под действием нестационарной нагрузки, а также поведение плавающей упругой пластины при колебаниях участка дна, вызванных землетрясением. В [1] исследованы высокочастотные колебания, дно моделируется однородной упругой средой (полупространством), в которой распространяются волны сжатия и сдвига от эпицентра землетрясения, а жидкость предполагается сжимаемой и невесомой. В [2] методом Винера — Хопфа построено аналитическое решение для упругой полубесконечной пластины при заданных периодических колебаниях дна и несжимаемой весомой жидкости. Обзор существующих численных методов решения задачи о поведении плавающих упругих пластин выполнен в [3]. В настоящей работе метод Винера — Хопфа используется для исследования в плоской постановке колебаний пластины конечной ширины, плавающей на поверхности несжимаемой весомой жидкости конечной глубины при колебаниях участка дна. Изучено влияние частоты, положения колеблющегося участка и глубины жидкости на амплитуды колебаний жидкости и пластины для условий модельного аэропорта.

1. Постановка задачи. В рамках линейной теории исследуется гидроупругое поведение плавающей пластины при периодических колебаниях участка дна. Толщина пластины h, длина L_0. Левый край пластины принимается за начало декартовой системы координат Oxy. Концы пластины не закреплены. Жидкость идеальная несжимаемая, а ее течение безвихревое. Будем предполагать, что толщина пластины значительно меньше

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00739) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-902.2003.1).

длины волн, распространяющихся в пластине. Граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды.

Потенциал скоростей жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям вида

$$\begin{gathered}
\Delta\varphi = 0 \qquad (-H_0 < y < 0),\\
\varphi_y = w_t \quad (y = 0), \qquad w(x, -H_0, t) = u(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t},\\
D\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \qquad (y = 0, \quad 0 < x < L_0),\\
p = -\rho(\varphi_t + gw),\\
\varphi_t + gw = 0 \qquad (y = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (L_0, \infty)).
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь H_0 — глубина жидкости; w — вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины); p — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; ρ, ρ_0 — плотности жидкости и пластины; t — время; ω — частота колебаний. На краях пластины должны обращаться в нуль момент и перерезывающая сила:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad (y = 0, \quad x = 0, L_0). \tag{1.2}$$

Рассмотрим сначала случай точечного источника на дне: $u(x,t) = u_0\delta(x - x_0)$. Зависимость всех функций от времени выражается множителем $\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Введем характерную длину $l = g/\omega^2$ и безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad \varphi' = \frac{\omega\varphi}{gu_0}, \quad w' = \frac{w}{u_0}, \quad t' = \omega t$$

(штрихи в дальнейшем будем опускать). Представим потенциал в виде $\varphi = \phi(x,y)\,\mathrm{e}^{-it}$. Тогда из (1.1), (1.2) получим краевую задачу для ϕ:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (-H < y < 0);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -i\delta(x - x_*) \qquad (y = -H); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi = 0 \qquad (y = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty)); \tag{1.4}$$

$$\Big(\beta\,\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - d\Big)\frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi = 0 \qquad (y = 0, \quad 0 < x < L); \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad (y = 0, \quad x = 0, L); \tag{1.6}$$

$$L = \frac{L_0}{l}, \quad H = \frac{H_0}{l}, \quad x_* = \frac{x_0}{l}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g l^4}, \quad d = \frac{\rho_0 h}{\rho l}.$$

Здесь L, H, x_*, β, d — безразмерные параметры задачи: соответственно длина пластины, глубина жидкости, положение источника колебаний, приведенные жесткость и осадка пластины в воду. Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \to \infty$ и условия регулярности вблизи кромок (локальная ограниченность энергии).

2. Система интегральных уравнений. Решение задачи будем строить методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса [4]. Введем функции комплексной переменной α

$$\Phi_+(\alpha,y)=\int\limits_L^{\infty}\mathrm{e}^{i\alpha(x-L)}\,\phi(x,y)\,dx,\qquad \Phi_-(\alpha,y)=\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,\phi(x,y)\,dx,$$

$$\Phi_1(\alpha,y)=\int\limits_0^{L}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,\phi(x,y)\,dx,\qquad \Phi(\alpha,y)=\Phi_-(\alpha,y)+\Phi_1(\alpha,y)+\mathrm{e}^{i\alpha L}\,\Phi_+(\alpha,y). \tag{2.1}$$

Функция $\Phi_+(\alpha,y)$ определена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\Phi_-(\alpha,y)$ — в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha<0$. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости.

Для поверхностных волн значения α должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$K_1(\alpha)\equiv\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H)-1=0,$$

которое имеет два действительных корня $\pm\gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm\gamma_n$ ($n=1,2,\ldots$), расположенных симметрично относительно действительной оси [4]; $\gamma_n\to in\pi/H$ при $n\to\infty$.

Для изгибно-гравитационных волн, распространяющихся в пластине, получаем дисперсионное соотношение

$$K_2(\alpha)\equiv(\beta\alpha^4+1-d)\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H)-1=0,$$

которое имеет два действительных корня $\pm\alpha_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm\alpha_n$ ($n=1,2,\ldots$), симметричных относительно действительной оси, а также четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей [5]. Обозначим через α_{-1} корень, лежащий в первом квадранте, через α_{-2} — корень во втором квадранте; $\alpha_n\to in\pi/H$ при $n\to\infty$.

Дисперсионные функции $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ четные. Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, остальные корни — краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины.

Исследуем поведение функций $\Phi_\pm(\alpha,y)$. При $x\to-\infty$ потенциал представляет собой волну вида $R\,\mathrm{e}^{-i\gamma x}$ (R — комплексная амплитуда волны, распространяющейся влево) и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1. Тогда $\Phi_-(\alpha,y)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha<|\gamma_1|$, за исключением полюса при $\alpha=\gamma$. При $x\to\infty$ потенциал ϕ представляет собой волну вида $T\,\mathrm{e}^{i\gamma x}$ (T — комплексная амплитуда волны, распространяющейся вправо) и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_+(\alpha,y)$ аналитична в полуплоскости $\{\operatorname{Im}\alpha>-|\gamma_1|\}$, за исключением полюса в точке $\alpha=-\gamma$.

Функция $\Phi(\alpha,y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\phi(x,y)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\alpha^2\Phi=0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi(\alpha,y)=C(\alpha)Z(\alpha,y)+S(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(\alpha(y+H)),\qquad Z(\alpha,y)=\mathrm{ch}\,(\alpha(y+H))/\,\mathrm{ch}\,(\alpha H). \tag{2.2}$$

Из условия (1.3) на дне получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha,-H)=-i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*},\qquad S(\alpha)=-\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}}{\alpha}.$$

Обозначим через $D_\pm(\alpha)$, $D_1(\alpha)$ интегралы типа (2.1), где функция ϕ под интегралом заменяется левой частью краевого условия (1.4), а через $F_\pm(\alpha)$, $F_1(\alpha)$ — аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (1.5). Введем функции

$$D(\alpha) = D_-(\alpha) + D_1(\alpha) + \mathrm{e}^{i\alpha L} D_+(\alpha), \qquad F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_1(\alpha) + \mathrm{e}^{i\alpha L} F_+(\alpha).$$

Функции $D(\alpha)$ и $F(\alpha)$ представляют собой образы Фурье от дисперсионных функций, которые будем понимать в смысле обобщенных функций [6]. Для них выполняются соотношения

$$D(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha, 0) - \Phi(\alpha, 0), \qquad F(\alpha) = (\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha, 0) - \Phi(\alpha, 0).$$

Из краевых условий (1.4) и (1.5) имеем

$$\begin{gathered} D_-(\alpha) = D_+(\alpha) = 0, \qquad F_1(\alpha) = 0, \\ D_1(\alpha) = D(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha) - i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\big(\mathrm{ch}(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha\big), \qquad (2.3) \\ F_-(\alpha) + \mathrm{e}^{i\alpha L} F_+(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha) - i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\big[(\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha\big]. \end{gathered}$$

Исключая $C(\alpha)$ из этих соотношений, получаем уравнение

$$\begin{gathered} F_-(\alpha) + \mathrm{e}^{i\alpha L} F_+(\alpha) + i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\big[(\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha\big] = \\ = K(\alpha)\big[D_1(\alpha) + i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\big(\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha\big)\big], \qquad (2.4) \\ K(\alpha) = K_2(\alpha)/K_1(\alpha). \end{gathered}$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т. е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha),$$

где функции $K_\pm(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_\pm(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет нули и полюса на действительной оси в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$ соответственно. Поэтому будем рассматривать области аналитичности Π_+ и Π_-, где Π_+ — полуплоскость $\mathrm{Im}\,\alpha > -|\gamma_1|$ с разрезами, исключающими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$, Π_- — полуплоскость $\mathrm{Im}\,\alpha < |\gamma_1|$ с разрезами, исключающими точки α_0 и γ.

Введем функцию

$$g(\alpha) = \frac{K(\alpha)(\alpha^2 - \gamma^2)}{\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)}.$$

Функция $g(\alpha)$ не имеет нулей на действительной оси, ограниченна и на бесконечности стремится к единице. Факторизуем ее следующим образом [4]:

$$g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha), \qquad g_\pm(\alpha) = \exp\Big[\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\ln g(x)}{x - \alpha}\,dx\Big], \quad \sigma < |\gamma_1|.$$

Определим функции $K_\pm(\alpha)$ по формуле

$$K_\pm(\alpha) = \frac{\sqrt{\beta}(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})g_\pm(\alpha)}{\alpha \pm \gamma}.$$

При этом $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$. Умножим уравнение (2.4) на $\mathrm{e}^{-i\alpha L}[K_+(\alpha)]^{-1}$ и преобразуем его к виду

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha L} F_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha(x_* - L)}(\beta\alpha^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_+(\alpha)K_1(\alpha)} = D_1(\alpha)K_-(\alpha)\,\mathrm{e}^{-i\alpha L}.$$

Представив члены в левой части этого уравнения в виде разложения

$$\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha L} F_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} = U_+(\alpha) + U_-(\alpha), \qquad -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha(x_*-L)}(\beta\alpha^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_+(\alpha)K_1(\alpha)} = L_+(\alpha) + L_-(\alpha),$$

запишем

$$F_+(\alpha)/K_+(\alpha) + U_+(\alpha) + L_+(\alpha) = D_1(\alpha)K_-(\alpha)\,\mathrm{e}^{-i\alpha L} - L_-(\alpha) - U_-(\alpha). \tag{2.5}$$

Теперь разделим уравнение (2.4) на $K_-(\alpha)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + \frac{\mathrm{e}^{i\alpha L} F_+(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_-(\alpha)K_1(\alpha)} = D_1(\alpha)K_+(\alpha).$$

Представив члены в левой части этого уравнения в виде разложения

$$\frac{\mathrm{e}^{i\alpha L} F_+(\alpha)}{K_-(\alpha)} = V_+(\alpha) + V_-(\alpha), \qquad -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_-(\alpha)K_1(\alpha)} = N_+(\alpha) + N_-(\alpha),$$

запишем

$$F_-(\alpha)/K_-(\alpha) + V_-(\alpha) + N_-(\alpha) = D_1(\alpha)K_+(\alpha) - V_+(\alpha) - N_+(\alpha). \tag{2.6}$$

Функции $U_\pm(\alpha)$, $V_\pm(\alpha)$, $L_\pm(\alpha)$, $N_\pm(\alpha)$ определяются следующими выражениями [4]:

$$U_\pm(\alpha) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L} F_-(\zeta)\,d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)}; \qquad V_\pm(\alpha) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{i\zeta L} F_+(\zeta)\,d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta-\alpha)};$$

$$L_\pm(\alpha) = \mp\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{i\zeta(x_*-L)}(\beta\zeta^4 - d)\,d\zeta}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_+(\zeta)K_1(\zeta)(\zeta-\alpha)}; \tag{2.7}$$

$$N_\pm(\alpha) = \mp\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{i\zeta x_*}(\beta\zeta^4 - d)\,d\zeta}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_-(\zeta)K_1(\zeta)(\zeta-\alpha)}, \tag{2.8}$$

где $\sigma < |\gamma_1|$.

В левой части уравнения (2.5) имеем функцию, аналитическую в области Π_+, а в правой части — аналитическую в области Π_-. Аналитическим продолжением можно определить функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \to \infty$. Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность, порядок которой не выше $O(r^{-\lambda})$ ($\lambda < 1$, r — расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_-(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\lambda+3})$, а $D_+(\alpha)$ — не выше $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ [6]. Функции $K_\pm(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^2)$, так как $g_\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$F_+(\alpha)/K_+(\alpha) + U_+(\alpha) + L_+(\alpha) = a_1 + a_2\alpha. \tag{2.9}$$

Аналогично из уравнения (2.6) имеем

$$F_-(\alpha)/K_-(\alpha) + V_-(\alpha) + N_-(\alpha) = b_1 + b_2\alpha. \tag{2.10}$$

Здесь a_1, a_2, b_1, b_2 — неизвестные константы, которые будем определять из условий в кромках (1.6).

Из уравнений (2.9), (2.10) получаем систему

$$\begin{aligned} &\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L} F_-(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-\alpha)K_+(\zeta)} = a_1 + a_2\alpha - L_+(\alpha), \\ &\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{i\zeta L} F_+(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-\alpha)K_-(\zeta)} = b_1 + b_2\alpha - N_-(\alpha). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Определим константы a_1 и a_2. Имеем

$$D_1(\alpha)K_-(\alpha)\,\mathrm{e}^{-i\alpha L} - L_-(\alpha) - U_-(\alpha) = a_1 + a_2\alpha.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $U_-(\alpha)$, находим

$$D_1(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha L}}{K_-(\alpha)}\Big[a_1 + a_2\alpha + L_-(\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L} F_-(\zeta)\, d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)}\Big].$$

С учетом (2.2) и (2.3) и с помощью обратного преобразования Фурье получаем выражение для потенциала

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-L)}\,\mathrm{ch}\,(\alpha(y+H))}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_-(\alpha)K_1(\alpha)}\Big[a_1 + a_2\alpha + L_-(\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L} F_-(\zeta)\, d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)}\Big]\, d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-x_*)}\,\mathrm{sh}\,(\alpha(y+H))\, d\alpha}{\alpha} - \\ - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-x_*)}(\mathrm{ch}(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha)Z(\alpha,y)\, d\alpha}{K_1(\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Умножим числитель и знаменатель на $K_+(\alpha)$. После преобразований получим выражение для производной потенциала

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-L)}\,\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H)K_+(\alpha)}{K_2(\alpha)}\Big[a_1 + a_2\alpha - L_+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L} F_-(\zeta)\, d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)}\Big]\, d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-x_*)}\, d\alpha}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_2(\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Контур интегрирования во внешнем интеграле должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей Π_+ и Π_-. Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0 и γ снизу, а точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ — сверху.

Во внутреннем интеграле $\mathrm{Im}\,\alpha < \sigma$. Однако этот интеграл как функция от α аналитическим продолжением может быть определен во всей комплексной плоскости. Вычислим этот интеграл с использованием теории вычетов. Функция $K_+(\zeta)$ имеет нули в точках

$-\alpha_j$, $j = -2, -1, 0, \ldots$ и полюса в точках $-\gamma, -\gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Подынтегральное выражение имеет полюса в точках $\zeta = -\alpha_j$, $j = -2, -1, 0, \ldots$ и в точке $\zeta = \alpha$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L}\,F_-(\zeta)\,d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta-\alpha)} = -\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha L}\,F_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j L}\,F_-(-\alpha_j)}{K'_+(-\alpha_j)(\alpha_j+\alpha)}.$$

Рассмотрим случай $x_* < x < L$. Вычислим внешний интеграл в (2.13) также с использованием теории вычетов. В первом и третьем интегралах контур интегрирования по α замыкаем в верхней полуплоскости, а во втором интеграле — в нижней. Получаем

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,0) = i\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m(L-x)}\,\alpha_m\,\mathrm{th}\,(\alpha_m H)K_+(\alpha_m)}{K'_2(\alpha_m)}\times$$
$$\times\Big[a_1 + a_2\alpha_m - L_+(\alpha_m) - \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j L}\,F_-(-\alpha_j)}{K'_+(-\alpha_j)(\alpha_j+\alpha_m)}\Big] -$$
$$- i\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x}\,\alpha_m\,\mathrm{th}\,(\alpha_m H)F_-(-\alpha_m)}{K'_2(-\alpha_m)} - \sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m|x-x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H)K'_2(\alpha_m)}.$$

Подставляя данное выражение в краевые условия (1.6) при $x = L$, получаем два уравнения

$$\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\alpha_m^n\,\mathrm{th}\,(\alpha_m H)K_+(\alpha_m)}{K'_2(\alpha_m)}\Big[a_1 + a_2\alpha_m - L_+(\alpha_m) - \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j L}\,F_-(-\alpha_j)}{K'_+(-\alpha_j)(\alpha_j+\alpha_m)}\Big] +$$
$$+ (-1)^n\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m L}\,\alpha_m^n\,\mathrm{th}\,(\alpha_m H)F_-(-\alpha_m)}{K'_2(-\alpha_m)} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_m^{n-1}\,\mathrm{e}^{i\alpha_m(L-x_*)}\,d\alpha}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H)K'_2(\alpha_m)} = 0,$$
$$n = 3, 4. \qquad (2.14)$$

Из дисперсионного соотношения под пластиной имеем

$$\alpha_m\,\mathrm{th}\,(\alpha_m H) = -K_1(\alpha_m)/(\beta\alpha_m^4 - d).$$

Подставляя это выражение в (2.14), находим

$$\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\alpha_m^{n-1}K_+(\alpha_m)K_1(\alpha_m)}{K'_2(\alpha_m)(\beta\alpha_m^4-d)}\Big[a_1 + a_2\alpha_m - L_+(\alpha_m) - \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j L}\,F_-(-\alpha_j)}{K'_+(-\alpha_j)(\alpha_j+\alpha_m)}\Big] +$$
$$+ (-1)^n\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m L}\,\alpha_m^{n-1}F_-(-\alpha_m)K_1(-\alpha_m)}{K'_2(-\alpha_m)(\beta\alpha_m^4-d)} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_m^{n-1}\,\mathrm{e}^{i\alpha_m(L-x_*)}\,d\alpha}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H)K'_2(\alpha_m)} = 0,$$
$$n = 3, 4. \qquad (2.15)$$

Заметим, что первый член в (2.15) представляет собой сумму вычетов в точках α_m для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}K_1(\alpha)K_+(\alpha)[a_1+a_2\alpha-L_+(\alpha)]\,d\alpha}{K_2(\alpha)(\beta\alpha^4-d)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}[a_1+a_2\alpha-L_+(\alpha)]\,d\alpha}{K_-(\alpha)(\beta\alpha^4-d)}.$$

Сведем этот интеграл к сумме вычетов в корнях полинома $\beta\alpha^4 - d$. Аналогично поступим и с остальными суммами. В результате для констант a_1, a_2 получим систему уравнений

$$a_1 \sum_{k=1}^{4} z_k^{n-2} K_+(z_k) + a_2 \sum_{k=1}^{4} z_k^{n-1} K_+(z_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{4} z_k^{n-2} K_+(z_k) \Big[L_+(z_k) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L}\, F_-(\zeta)\, d\zeta}{K_+(\zeta)(z_k - \zeta)} \Big], \quad n = 1, 2, \qquad (2.16)$$

где z_k — корни полинома $\beta\alpha^4 - d$.

Найдем теперь константы b_1 и b_2. Из уравнений (2.6), (2.10) имеем

$$D_1(\alpha) K_+(\alpha) - V_+(\alpha) - N_+(\alpha) = b_1 + b_2 \alpha.$$

Подставляя в это уравнение выражения для $V_+(\alpha)$ и $N_+(\alpha)$, получим

$$D_1(\alpha) = \frac{1}{K_+(\alpha)} \Big[b_1 + b_2\alpha + N_+(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{i\zeta L}\, F_+(\zeta)\, d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \Big].$$

С помощью обратного преобразования Фурье и с учетом (2.2), (2.3) находим представление для потенциала ϕ

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\, Z(\alpha, y)}{K_+(\alpha) K_1(\alpha)} \Big[b_1 + b_2\alpha + N_+(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{i\zeta L}\, F_+(\zeta)\, d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \Big]\, d\alpha -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}\, Z(\alpha, y)(\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha) d\alpha}{K_1(\alpha)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}\, \mathrm{sh}\,(\alpha(y + H))\, d\alpha}{\alpha}. \qquad (2.17)$$

Для производной потенциала получаем выражение

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\, \alpha\, \mathrm{th}\,(\alpha H) K_-(\alpha)}{K_2(\alpha)} \Big[b_1 + b_2\alpha + N_+(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{i\zeta L}\, F_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} \Big] d\alpha -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}\, d\alpha}{\mathrm{ch}\,(\alpha H) K_2(\alpha)}.$$

Подставляя это выражение в граничные условия (1.6), получаем систему уравнений для b_1, b_2

$$b_1 \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^{n-2}}{K_+(z_k)} + b_2 \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^{n-1}}{K_+(z_k)} = \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^{n-2}}{K_+(z_k)} \Big[- N_+(z_k) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-i\zeta L}\, F_-(\zeta)\, d\zeta}{K_+(\zeta)(z_k - \zeta)} \Big],$$

$$n = 1, 2. \qquad (2.18)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (2.11), (2.16), (2.18).

3. Решение системы. Интегралы в уравнениях (2.11), (2.16), (2.18) будем вычислять на основе теории вычетов. Введем новые неизвестные

$$\xi_j = \frac{F_+(\alpha_j)}{\alpha_j^2 K_+(\alpha_j)}, \qquad \eta_j = \frac{F_-(-\alpha_j)}{\alpha_j^2 K_-(-\alpha_j)}.$$

Для них получим следующую систему:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi} - C\boldsymbol{\eta} - A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_1, \\ \boldsymbol{\eta} - C\boldsymbol{\xi} - \tilde{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}_2, \\ G\boldsymbol{\eta} + B\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_3, \\ S\boldsymbol{\xi} + D\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}_4, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{F}_n$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — векторы $\{\xi_j\}$, $\{\eta_j\}$, $\{F_j^{(n)}\}$, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$; C, G, S, B, D, A, $\tilde{A}$ — матрицы $\{C_{jm}\}$, $\{G_{im}\}$, $\{S_{im}\}$, $\{B_{im}\}$, $\{D_{im}\}$, $\{A_{ji}\}$, $\{\tilde{A}_{ji}\}$;

$$C_{jm} = \frac{Q_m}{\alpha_j^2(\alpha_m + \alpha_j)}; \qquad Q_m = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m L}\, \alpha_m^2 K_+^2(\alpha_m) K_1(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)}; \qquad \tilde{A}_{ji} = (-1)^{i-1}\alpha_j^{i-3};$$

$$A_{ji} = \alpha_j^{i-3}; \qquad G_{im} = Q_m \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^{i-2} K_+(z_k)}{z_k + \alpha_j}; \qquad S_{im} = -Q_m \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^{i-2}}{K_+(z_k)(z_k - \alpha_j)};$$

$$B_{11} = \sum_{k=1}^{4} \frac{K_+(z_k)}{z_k}, \qquad B_{12} = B_{21} = \sum_{k=1}^{4} K_+(z_k); \qquad B_{22} = \sum_{k=1}^{4} z_k K_+(z_k);$$

$$D_{11} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{K_+(z_k) z_k}; \qquad D_{12} = D_{21} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{K_+(z_k)}; \qquad D_{22} = \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k}{K_+(z_k)};$$

$$F_j^{(1)} = -L_+(\alpha_j)/\alpha_j^2; \qquad F_j^{(2)} = -N_-(-\alpha_j)/\alpha_j^2;$$

$$F_i^{(3)} = \sum_{k=1}^{4} z_k^{i-2} K_+(z_k) L_+(z_k); \qquad F_i^{(4)} = \sum_{k=1}^{4} z_k^{i-2} N_-(z_k)/K_+(z_k);$$

$$L_+(\alpha) = \begin{cases} -i \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\gamma_m(x_*-L)}(\beta\gamma_m^4 - d)}{\operatorname{ch}(\gamma_m H) K_+(\gamma_m) K_1'(\gamma_m)(\gamma_m - \alpha)} - i\,\frac{\mathrm{e}^{i\alpha(x_*-L)}(\beta\alpha^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_+(\alpha) K_1(\alpha)}, & x_* > L, \\ i \displaystyle\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m(L-x_*)}\, K_+(\alpha_m)(\beta\alpha_m^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha_m H) K_2'(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha)}, & x_* < L; \end{cases}$$

$$N_-(\alpha) = \begin{cases} -i \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_m x_*}(\beta\gamma_m^4 - d)}{\operatorname{ch}(\gamma_m H) K_+(\gamma_m) K_1'(\gamma_m)(\gamma_m + \alpha)} - i\,\frac{\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha H) K_-(\alpha) K_1(\alpha)}, & x_* < 0, \\ i \displaystyle\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_*}\, K_+(\alpha_m)(\beta\alpha_m^4 - d)}{\operatorname{ch}(\alpha_m H) K_2'(\alpha_m)(\alpha_m - \alpha)}, & x_* > 0. \end{cases}$$

После того как система (3.1) решена, найдем прогиб пластины и возвышение свободной поверхности вдали от пластины. Имеем

$$C(\alpha) = \big(F_-(\alpha) + \mathrm{e}^{i\alpha L}\, F_+(\alpha) + i\,\mathrm{e}^{i\alpha_0 x_*}[(\beta\alpha^4 + 1 - d)\operatorname{ch}(\alpha H) - \operatorname{sh}(\alpha H)/\alpha]\big)/K_2(\alpha).$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x} Z(\alpha,y)[F_-(\alpha) + \mathrm{e}^{i\alpha L} F_+(\alpha)]d\alpha}{K_2(\alpha)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-x_*)} \,\mathrm{sh}\,(\alpha(y+H))\, d\alpha}{\alpha} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x-x_*)} Z(\alpha,y)}{K_2(\alpha)} \Big[(\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \frac{\mathrm{sh}\,(\alpha H)}{\alpha}\Big]\, d\alpha.$$

Прогиб пластины $w(x)$ и безразмерные изгибающие моменты $M(x)$ определяются формулами

$$w(x) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{W_j(x)}{K_2'(\alpha_j)}, \qquad M(x) = \frac{\beta l |w''(x)|}{Ld},$$

$$W_j(x) = -i\,\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j|x-x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)} + \frac{\alpha_j^2 K_1(\alpha_j)K_+(\alpha_j)}{\beta\alpha_j^4 - d}\,[\eta_j\,\mathrm{e}^{i\alpha_j x} + \xi_j\,\mathrm{e}^{i\alpha_j(L-x)}].$$

Первый член в $W_j(x)$ — волна от источника колебаний. Значения ξ_j определяют комплексные амплитуды волн, отраженных с правой кромки пластины, а η_j — с левой кромки.

Из выражений (2.12) и (2.17) находим амплитуды возвышения свободной границы ζ_1 при $x \to -\infty$ и ζ_2 при $x \to \infty$:

$$\zeta_1 = -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\gamma x_*}}{\mathrm{ch}\,(\gamma H)K_1'(\gamma)} - \frac{1}{K_1'(\gamma)K_+(\gamma)}\Big[b_1 + b_2\gamma + N_+(\gamma) - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j L} K_+^2(\alpha_j)K_1(\alpha_j)\alpha_j^2\xi_j}{K_2'(\alpha_j)(\gamma - \alpha_j)}\Big],$$

$$\zeta_2 = -\frac{i\,\mathrm{e}^{-i\gamma x_*}}{\mathrm{ch}\,(\gamma H)K_1'(\gamma)} - \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma L}}{K_1'(\gamma)K_+(\gamma)}\Big[a_1 - a_2\gamma + L_-(-\gamma) - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j L} K_+^2(\alpha_j)K_1(\alpha_j)\alpha_j^2\eta_j}{K_2'(\alpha_j)(\gamma - \alpha_j)}\Big],$$

$$L_-(-\gamma) = -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\gamma(L-x_*)} K_+(\gamma)}{\mathrm{ch}\,(\gamma H)} - L_+(-\gamma), \qquad N_+(\gamma) = -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\gamma x_*} K_+(\gamma)}{\mathrm{ch}\,(\gamma H)} - N_-(\gamma).$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть на дне имеется участок $[x_1, x_2]$, колеблющийся периодически и вертикально с заданным законом перемещений $u(x), x \in [x_1, x_2]$. В этом случае, умножая полученное решение на $u(x_*)$ и интегрируя по x_*, находим решение для общего случая. Отметим, что в случае, когда колеблющийся участок дна находится под кромкой пластины, суммы в выражениях для $L_+(\alpha)$ и $N_-(\alpha)$ сходятся слабо, поэтому при вычислении их значений по формулам (2.7), (2.8) необходимо сначала проинтегрировать по x_*, а затем применить теорию вычетов.

4. Численные результаты. Расчеты проводились для модельного аэропорта при следующих значениях параметров: жесткость пластины $D = 1{,}764 \cdot 10^{11}$ Н$\cdot$м^2, длина $L_0 = 1000$ м, плотность жидкости $\rho = 1025$ кг/м^3, осадка пластины в воду 5 м. Глубина жидкости менялась. В этом случае безразмерный параметр d является существенным, и его нельзя отбрасывать (как это делалось в ряде работ). Зависимость параметра d от частоты ω показана на рис. 1. Видно, что с ростом частоты параметр d быстро растет, и при $\omega > 1$ с$^{-1}$ его необходимо учитывать.

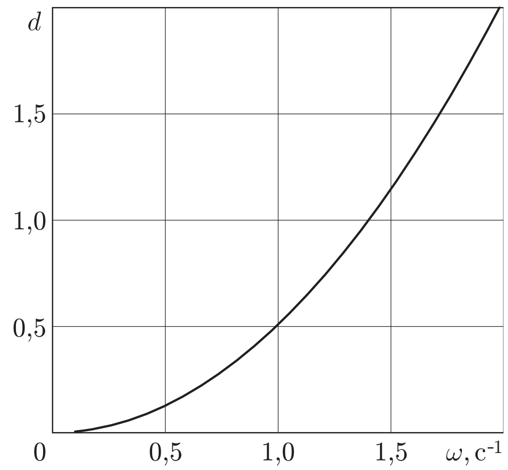

Рис. 1. Зависимость безразмерного параметра d от частоты ω

Вертикальные смещения колеблющегося участка дна задавались в виде $u(x) = u_0 \cos^2(\pi(x-x_0)/(2s))$, где x_0 — центр, s — полуширина участка ($s = 200$ м). Численно исследована зависимость амплитуд колебаний жидкости и пластины от частоты, положения колеблющегося участка, а также глубины жидкости.

На рис. 2,*а* приведена зависимость коэффициента отражения R от частоты в задаче дифракции поверхностных волн для жидкости глубиной $H_0 = 100$ м (расчеты проводились методом [7]). В [8] показано, что в случае мелкой воды нулевые значения коэффициента отражения соответствуют частотам рассеяния (резонансным частотам), на которых амплитуды колебаний пластины и жидкости максимальны в задаче дифракции. По-видимому, это справедливо и для жидкости конечной глубины. Увеличение амплитуд колебаний пластины и жидкости на частотах рассеяния отмечено и в задаче о вынужденных колебаниях плавающей пластины под действием периодической нагрузки [9].

На рис. 2,*б*–*г* представлены зависимости от частоты амплитуд колебаний жидкости и пластины при $x_0 = 500$, 300, 0 м; $s = 200$ м; глубина жидкости $H_0 = 100$ м. Штриховые кривые *1, 2* соответствуют амплитудам возвышения жидкости на бесконечности слева и справа от пластины, сплошные кривые *1*–*3* — амплитудам прогиба пластины в левой и правой кромках и при $x = x_0$; пунктирные кривые *1, 2* — максимальной амплитуде безразмерного изгибающего момента на пластине и амплитуде в точке $x = x_0$ (на рис. 2,*б* в силу симметрии сплошные и штриховые кривые *1* и *2* совпадают, а на рис. 2,*г* $x_0 = 0$, т. е. левая кромка находится над центром колеблющегося участка). Как видно из рис. 2, зависимость амплитуд колебаний жидкости и пластины от частоты немонотонная. Наблюдается увеличение амплитуд колебаний на частотах рассеяния (для симметричного случая частоты рассеяния, соответствующие несимметричным модам, исчезают). При этом амплитуды прогиба в точке x_0 изменяются значительно меньше, чем амплитуды кромок. Положение колеблющегося участка дна по отношению к пластине существенно влияет на характер колебаний.

На рис. 3 приведено распределение амплитуд прогиба пластины и момента при различных частотах. Глубина жидкости $H_0 = 100$ м, $x_0 = 300$ м. При частотах, близких к нулю, амплитуды прогиба пластины практически равны во всех точках (кривая *1*). С увеличением частоты амплитуды прогиба в точке x_0 (центре колеблющегося участка) и в кромках становятся значительно больше, чем в остальной части пластины (кривая *2*). При дальнейшем увеличении частоты амплитуды волн, отраженных от краев, уменьшаются, растет количество горбов и впадин в средней части пластины (кривые *3, 4*). При высоких

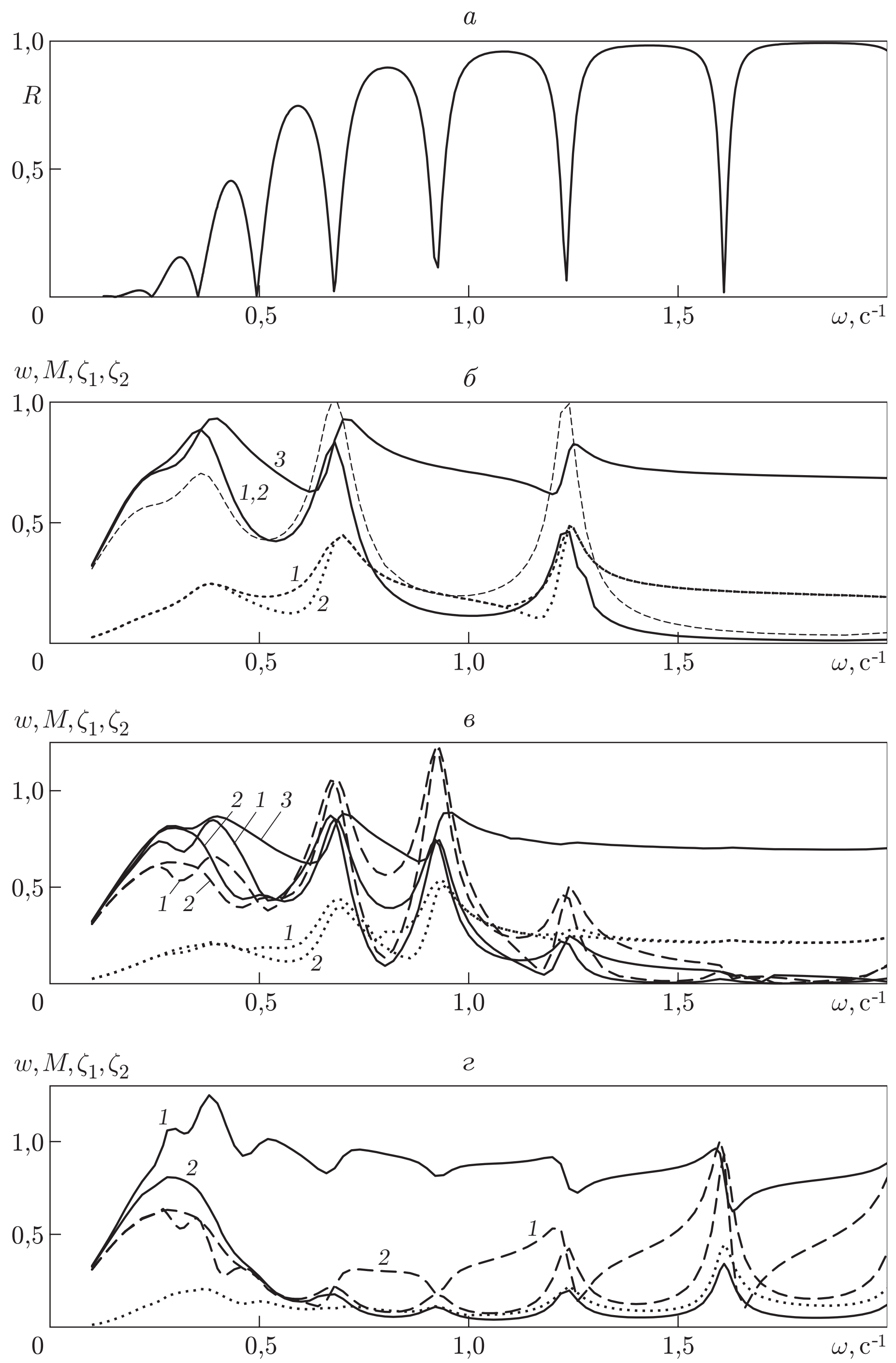

Рис. 2. Зависимости от частоты коэффициента отражения R в задаче дифракции поверхностных волн ($а$) и амплитуд прогиба пластины w, момента M и возвышения свободной границы в дальнем поле (ζ_1, ζ_2) для различных положений колеблющегося участка (*б* — $x_0 = 500$ м, *в* — $x_0 = 300$ м, *г* — $x_0 = 0$)

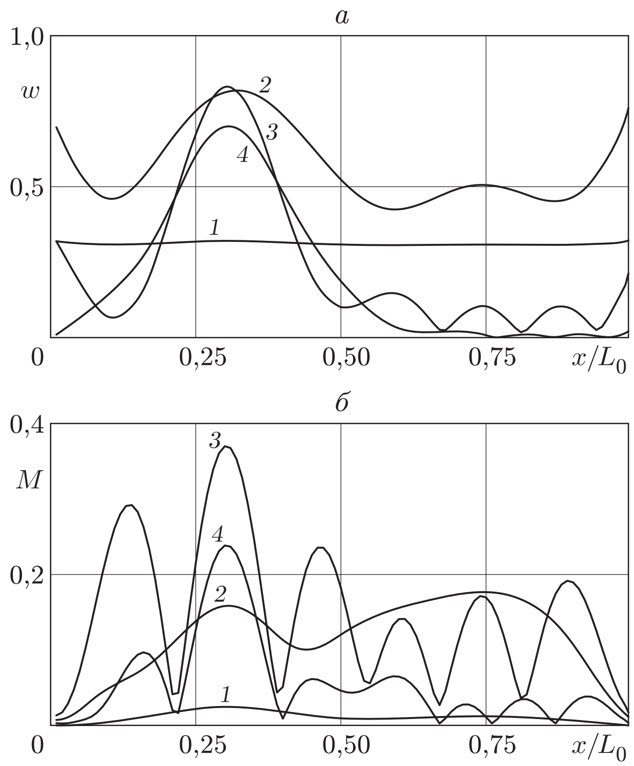

Рис. 3

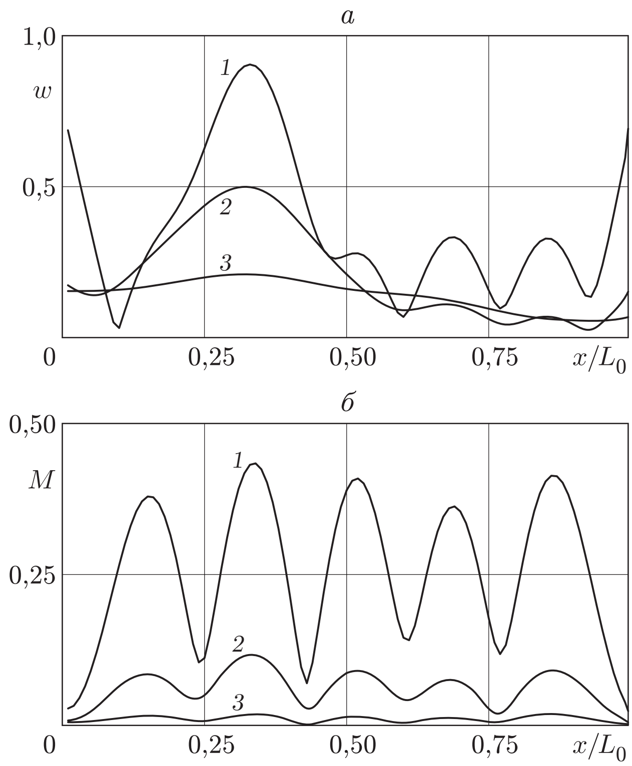

Рис. 4

Рис. 3. Распределение амплитуд прогиба пластины (*а*) и момента (*б*) для разных частот в несимметричном случае:
1 — $\omega = 0{,}1$ с$^{-1}$; *2* — $\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$; *3* — $\omega = 1$ с$^{-1}$; *4* — $\omega = 2$ с$^{-1}$

Рис. 4. Влияние глубины жидкости на амплитуды прогиба пластины (*а*) и момента (*б*) в несимметричном случае при $\omega = 0{,}7$ с$^{-1}$:
1 — $H_0 = 100$ м; *2* — $H_0 = 200$ м; *3* — $H_0 = 500$ м

частотах максимальные амплитуды прогиба достигаются над колеблющимся участком дна, а максимальные напряжения могут наблюдаться и на других участках пластины.

На рис. 4 показано влияние глубины жидкости на амплитуды прогиба пластины и безразмерного изгибающего момента при $\omega = 0{,}7$ с$^{-1}$, $x_0 = 300$ м. С увеличением глубины амплитуды колебаний пластины уменьшаются.

Итак, результаты расчетов и сравнение их с соответствующими результатами для полубесконечной пластины [2] показывают существенное влияние кромок на амплитуды прогиба и напряжений в пластине. Для пластины конечной ширины взаимодействие распространяющихся мод, отраженных с кромок и соответствующих действительному корню α_0, в значительной степени определяет амплитуды прогиба и напряжений в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Takamura H., Masuda K., Maeda H., Bessho M.** A study on the estimation of the seaquake response of a floating structure considering the characteristics of seismic wave propagation in the ground and the water // J. Marine Sci. and Technol. 2003. V. 7. P. 164–174.
2. **Ткачева Л. А.** Поведение плавающей упругой пластины при колебаниях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 2. С. 98–108.

3. **Kashivagi M.** Research on hydroelastic responses of VLFS: recent progress and future work // J. Offshore and Polar Engng. 2000. V. 10, N 2. P. 17–26.
4. **Нобл Б.** Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. **Fox C., Squire V. A.** Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95, N C7. P. 11.629-11.639.
6. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
7. **Коробкин А. А.** Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 90–96.
8. **Meylan M.** Computation of resonances for a floating one dimensional thin plate on shallow water // Proc. of the III Intern. conf. on hydroelasticity in marine technology, Oxford, 15–17 Sept., 2003. Oxford: Univ. of Oxford, 2003. P. 251–257.
9. **Tkacheva L. A.** Forced vibrations of floating elastic plate // Proc. of the 19th Intern. workshop on water waves and floating bodies, Cortona (Italy), 28–31 Mar., 2004. Rome: INSEAN, 2004.

Поступила в редакцию 25/X 2004 г.