ПМТФ, № 5, 1964

ДИФФУЗИЯ И ПРОВОДИМОСТЬ В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ МНОГОТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

В. А. Полянский

(*Москва*)

В работе получены выражения для диффузионного потока массы и обобщенных коэффициентов диффузии в частично ионизованной газовой смеси с различными температурами компонент, находящейся в электромагнитном поле. Исходными служат уравнения переноса, получаемые из кинетических уравнений для каждой из компонент смеси методом Грэда с использованием приближения «13 моментов» [1]. Интегралы столкновений в кинетических уравнениях берутся в форме Ландау для частиц, взаимодействующих по закону Кулона, и в форме Больцмана — для остальных частиц. Получены выражения для обобщенного закона Ома и коэффициентов подвижности и проводимости в плазме с различными сортами ионов. В § 2 работы вычислены коэффициенты диффузии, подвижности и проводимости в двутемпературном частично ионизованном газе для случая, когда анизотропией явлений переноса можно пренебречь ($|\omega_e|\tau_e^* \ll 1$). Найден коэффициент амбиполярной диффузии в таком газе. В § 3 вычислена проводимость полностью ионизованной плазмы с двумя сортами ионов. Если условие $|\omega_e|\tau_e^* \ll 1$ не выполняется, результаты §§ 2, 3 справедливы для диффузионных коэффициентов вдоль магнитного поля.

§ 1. Диффузионные уравнения для многотемпературной газовой смеси, содержащей заряженные частицы и находящейся в электромагнитном поле, в гидродинамическом приближении [1] имеют вид

$$\sum_\beta (a_{\alpha\beta}\mathbf{J}^\beta + b_{\alpha\beta}\mathbf{h}^\beta) + \omega_\alpha(\mathbf{J}^\alpha \times \boldsymbol{\varkappa}) - c_\alpha \sum_\beta \omega_\beta (\mathbf{J}^\beta \times \boldsymbol{\varkappa}) =$$
$$= \nabla p_\alpha - c_\alpha \nabla p + \operatorname{div} \pi^\alpha - c_\alpha \operatorname{div} \pi - \rho c_\alpha \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \sum_\beta \frac{c_\beta e_\beta}{m_\beta}\right)\mathbf{E}^* \qquad (1.1)$$

Здесь

$$\mathbf{J}^\alpha = \rho_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}), \qquad \rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha, \qquad c_\alpha = \rho_\alpha/\rho, \qquad p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha$$
$$\mathbf{u} = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{u}^\alpha, \qquad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \qquad p = \sum_\alpha p_\alpha, \qquad \pi = \sum_\alpha \pi^\alpha$$
$$\omega_\alpha = e_\alpha |\mathbf{B}| / m_\alpha c, \qquad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} + c^{-1}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \qquad \boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$$

При этом $\mathbf{J}^\alpha$ — диффузионный поток массы, $\mathbf{h}^\alpha$ — поток тепла, p_α, π^α и n_α — соответственно парциальное давление, тензор вязких напряжений и число частиц в единице объема α компоненты смеси, T_α — температура α компоненты, отнесенная к средней массовой скорости смеси $\mathbf{u}$, ω_α — циклотронная частота частицы с зарядом e_α и массой m_α, $\boldsymbol{\varkappa}$ — единичный вектор в направлении магнитного поля.

Система (1.1) следует из уравнения движения газовой смеси в целом и из уравнений для потоков $\mathbf{J}^\alpha$, которые получаются методом моментов из кинетических уравнений для каждой из компонент, записанных в системе координат, неподвижной относительно смеси в целом [1]. Интегралы столкновений в кинетических уравнениях берутся в форме Ландау для частиц,

[1] Макроскопические параметры каждой из компонент смеси мало меняются на расстояниях порядка эффективной длины свободного пробега и за времена порядка времени между столкновениями частиц.

взаимодействующих по закону Кулона, и в форме Больцмана — для остальных. В соответствии с этим коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ записываются различным образом. Для кулоновского взаимодействия частиц имеем

$$a_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}, \qquad a_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\frac{1}{\tau_{\beta\alpha}} \quad (\alpha\neq\beta) \tag{1.2}$$

$$b_{\alpha\alpha} = 0.6\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{m_\beta\gamma_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}, \qquad b_{\alpha\beta} = -\frac{0.6 m_\alpha\gamma_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}\frac{1}{\tau_{\beta\alpha}} \quad (\alpha\neq\beta) \tag{1.3}$$

При этом

$$\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} = \frac{16}{3} n_\beta \left(\frac{1}{2\pi\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} Q_{\alpha\beta}, \qquad \frac{1}{\tau_{\beta\alpha}} = \frac{n_\alpha}{n_\beta}\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}, \qquad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha\gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} \tag{1.4}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e_\alpha e_\beta\gamma_{\alpha\beta}(m_\alpha + m_\beta)}{m_\alpha m_\beta}\right]^2 \ln\Lambda_{\alpha\beta}, \qquad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{kT_\alpha},$$

($\ln\Lambda_{\alpha\beta}$ — кулоновский логарифм)

Для других законов взаимодействия частиц коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ (а также $c_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$, τ_α^*, см. ниже) выражаются через интегралы [2] Чепмена — Каулинга $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$, причем в величинах $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$

$$Q_{\alpha\beta} = (2\pi\gamma_{\alpha\beta})^{1/2}\Omega_{\alpha\beta}^{11} \tag{1.5}$$

Вид этих коэффициентов легко установить, сравнивая (1.1) с соответствующими выражениями работы [1]. Система (1.1) линейно зависима:

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} = \sum_\alpha b_{\alpha\beta} = 0$$

Поэтому для определения $\mathbf{J}^\alpha$ необходимо к (1.1) добавить очевидное равенство

$$\sum_\alpha \mathbf{J}^\alpha = 0 \tag{1.6}$$

Тепловой поток $\mathbf{h}^\beta$ можно исключить из (1.1) при помощи системы [3]

$$\sum_\beta c_{\alpha\beta}\mathbf{h}^\beta - \omega_\alpha\tau_\alpha^*(\mathbf{h}^\alpha\times\boldsymbol{\varkappa}) = -\lambda_\alpha\nabla T_\alpha - \frac{0.4\lambda_\alpha}{kn_\alpha}\operatorname{div}\pi^\alpha + \sum_\beta d_{\alpha\beta}\tau_\alpha^*\mathbf{J}^\beta$$

$$\lambda_\alpha = \frac{5kp_\alpha\tau_\alpha^*}{2m_\alpha} \tag{1.7}$$

Выпишем величины $c_{\alpha\beta}$, τ_α^* и $d_{\alpha\beta}$ в случае кулоновского взаимодействия частиц

$$c_{\alpha\alpha} = 1, \quad c_{\alpha\beta} = -\frac{0.9 m_\alpha\gamma_\beta^2(3 + 2\delta_{\alpha\beta})\tau_\alpha^*}{(m_\alpha + m_\beta)(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)^2\tau_{\beta\alpha}} \quad (\alpha\neq\beta) \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\tau_\alpha^*} = \frac{0.4}{\tau_{\alpha\alpha}} + \sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)^2\tau_{\alpha\beta}}\left[3\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\beta} + {}\right. \tag{1.9}$$

$$\left. + 1.3\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} + 1.6 - \delta_{\alpha\beta}\left(2.2 + 0.4\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha}\right)\right]$$

$$d_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta\gamma_{\alpha\beta}}{(m_\alpha + m_\beta)\gamma_\alpha^2}\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}\left[1.5 - \delta_{\alpha\beta}\left(5\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\beta} + 2\right)\right]$$

$$d_{\alpha\beta} = -\frac{1.5 m_\alpha\gamma_{\alpha\beta}(1 + 2\delta_{\alpha\beta})}{(m_\alpha + m_\beta)\gamma_\alpha^2\tau_{\beta\alpha}} \quad (\alpha\neq\beta), \qquad \delta_{\alpha\beta} = \frac{1 - T_\beta/T_\alpha}{1 + m_\beta/m_\alpha} \tag{1.10}$$

Выражения для $c_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ и τ_α^* при других законах взаимодействия частиц можно найти, используя соответствующие результаты работ [1, 3].

Решение системы (1.7) записывается следующим образом [3]:

$$\mathbf{h}^{\alpha} = -\sum_{\beta} [\lambda_{\alpha\beta}^{\parallel} \nabla_{\parallel} T_{\beta} + \lambda_{\alpha\beta}^{\perp} \nabla_{\perp} T_{\beta} + \lambda_{\alpha\beta}^{\wedge} (\nabla T_{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa})] +$$
$$+ \sum_{\beta} [\mu_{\alpha\beta}^{\parallel} \mathbf{J}_{\parallel}^{\beta} + \mu_{\alpha\beta}^{\perp} \mathbf{J}_{\perp}^{\beta} + \mu_{\alpha\beta}^{\wedge} (\mathbf{J}^{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa})] - 0.4 \sum_{\beta} \frac{1}{kn_{\beta}} [(\lambda_{\alpha\beta}^{\parallel} - \lambda_{\alpha\beta}^{\perp}) \times$$
$$\times (\operatorname{div} \pi^{\beta} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) \boldsymbol{\varkappa} + \lambda_{\alpha\beta}^{\perp} \operatorname{div} \pi^{\beta} + \lambda_{\alpha\beta}^{\wedge} (\operatorname{div} \pi^{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa})] \tag{1.11}$$

При этом

$$\lambda_{\alpha\beta}^{\parallel} = \frac{|c|_{\beta\alpha}}{|c|} \lambda_{\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta}^{\perp} = \frac{|c^*|_{\beta\alpha}}{|c^*|} \lambda_{\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta}^{\wedge} = \sum_{\gamma} \frac{\lambda_{\alpha\gamma}^{\perp} \lambda_{\gamma\beta}^{\parallel} \omega_{\gamma} \tau_{\gamma}^*}{\lambda_{\gamma}}$$
$$\mu_{\alpha\beta}^{\parallel} = \sum_{\gamma} \frac{\lambda_{\alpha\gamma}^{\parallel} d_{\gamma\beta} \tau_{\gamma}^*}{\lambda_{\gamma}} \tag{1.12}$$

Выражения для $\mu_{\alpha\beta}^{\perp}$ и $\mu_{\alpha\beta}^{\wedge}$ получаются из формулы для $\mu_{\alpha\beta}^{\parallel}$ путем замены значка $\parallel$ соответственно на $\perp$ и $\wedge$. Значки $\parallel$, $\perp$ у векторов означают, что эти векторы направлены вдоль ($\parallel$) и поперек ($\perp$) магнитного поля, $|c|$ и $|c^*|$ — определители с элементами $c_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}^*$, $|c|_{\beta\alpha}$ и $|c^*|_{\beta\alpha}$ — алгебраические дополнения элементов ($\beta\alpha$) этих определителей, σ^{ilm} — перестановочный тензор,

$$\operatorname{div} \pi^{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa} = \sigma^{ilm} \varkappa^{m} \frac{\partial \pi_{lr}^{\beta}}{\partial x_{r}}, \qquad \operatorname{div} \pi^{\beta} \cdot \boldsymbol{\varkappa} = \varkappa^{r} \frac{\partial \pi_{rl}^{\beta}}{\partial x_{l}}$$

$$c_{\alpha\beta}^{*} = c_{\alpha\beta} + \frac{|c|_{\beta\alpha}}{|c|} \omega_{\alpha} \tau_{\alpha}^{*} \omega_{\beta} \tau_{\beta}^{*}$$

Решение системы (1.1) можно получить, подставляя (1.11) в (1.1) и исключая при помощи (1.6) из каждого уравнения системы (1.1) величину $\mathbf{J}^{\alpha}$. Несложные вычисления показывают, что диффузионный поток массы каждой из компонент смеси складывается из нескольких частей:

$$\mathbf{J}^{\alpha} = \mathbf{J}_{c}^{\alpha} + \mathbf{J}_{t}^{\alpha} + \mathbf{J}_{v}^{\alpha} + \mathbf{J}_{e}^{\alpha} \tag{1.13}$$

Перенос массы, вызванный градиентами плотностей компонент смеси,

$$\mathbf{J}_{c}^{\alpha} = \sum_{\beta} \rho_{\beta} \frac{m_{\alpha} T_{\beta}}{m_{\beta} T_{\alpha}} [G_{\alpha\beta}^{\parallel} \nabla_{\parallel} \ln \rho_{\beta} + G_{\alpha\beta}^{\perp} \nabla_{\perp} \ln \rho_{\beta} + G_{\alpha\beta}^{\wedge} (\ln \rho_{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa})] \tag{1.14}$$

Термодиффузионный перенос массы

$$\mathbf{J}_{t}^{\alpha} = \sum_{\beta} \rho_{\beta} \frac{m_{\alpha} T_{\beta}}{m_{\beta} T_{\alpha}} \Big\{ \Big(G_{\alpha\beta}^{\parallel} + \frac{1}{kn_{\beta}} \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma\delta} \lambda_{\delta\beta}^{\parallel} D_{\alpha\gamma}^{\parallel} \Big) \nabla_{\parallel} \ln T_{\beta} +$$
$$+ \Big[G_{\alpha\beta}^{\perp} + \frac{1}{kn_{\beta}} \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma\delta} (\lambda_{\delta\beta}^{\perp} D_{\alpha\gamma}^{\perp} - \lambda_{\delta\beta}^{\wedge} D_{\alpha\gamma}^{\wedge}) \Big] \nabla_{\perp} \ln T_{\beta} +$$
$$+ \Big[G_{\alpha\beta}^{\wedge} + \frac{1}{kn_{\beta}} \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma\delta} (\lambda_{\delta\beta}^{\wedge} D_{\alpha\gamma}^{\perp} + \lambda_{\delta\beta}^{\perp} D_{\alpha\gamma}^{\wedge}) \Big] (\nabla \ln T_{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa}) \Big\} \tag{1.15}$$

Поток массы за счет вязкого переноса импульса

$$\mathbf{J}_{v}^{\alpha} = \sum_{\beta} \frac{m_{\alpha}}{kT_{\alpha}} \Big\{ \Big[G_{\alpha\beta}^{\perp} + \frac{0.4}{kn_{\beta}} \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma\delta} (\lambda_{\delta\beta}^{\perp} D_{\alpha\gamma}^{\perp} - \lambda_{\delta\beta}^{\wedge} D_{\alpha\gamma}^{\wedge}) \Big] \operatorname{div} \pi^{\beta} +$$
$$+ \Big[G_{\alpha\beta}^{\parallel} - G_{\alpha\beta}^{\perp} + \frac{0.4}{kn_{\beta}} \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma\delta} (\lambda_{\delta\beta}^{\parallel} D_{\alpha\gamma}^{\parallel} - \lambda_{\delta\beta}^{\perp} D_{\alpha\gamma}^{\perp} +$$
$$+ \lambda_{\delta\beta}^{\wedge} D_{\alpha\gamma}^{\wedge}) \Big] (\operatorname{div} \pi^{\beta} \cdot \boldsymbol{\varkappa}) \boldsymbol{\varkappa} + \Big[G_{\alpha\beta}^{\wedge} + \frac{0.4}{kn_{\beta}} \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma\delta} (\lambda_{\delta\beta}^{\wedge} D_{\alpha\gamma}^{\perp} +$$
$$+ \lambda_{\delta\beta}^{\perp} D_{\alpha\gamma}^{\wedge}) \Big] (\operatorname{div} \pi^{\beta} \times \boldsymbol{\varkappa}) \Big\} \tag{1.16}$$

Перенос массы электромагнитным полем

$$\mathbf{J}_e^{\alpha} = -\rho_\alpha K_\alpha^{\|} \mathbf{E}_{\|}^* - \rho_\alpha K_\alpha^{\perp} \mathbf{E}_{\perp}^* - \rho_\alpha K_\alpha^{\wedge} (\mathbf{E}^* \times \boldsymbol{\varkappa}) \tag{1.17}$$

Здесь введены обобщенные коэффициенты диффузии многокомпонентной смеси $D_{\alpha\beta}$ и подвижности K_α

$$D_{\alpha\beta}^{\|} = \frac{kT_\alpha}{m_\alpha} \frac{|a^{(0)}|_{\beta\alpha} - |a^{(0)}|_{\alpha\alpha}}{|a^{(0)}|}, \qquad D_{\alpha\beta}^{\perp} = \frac{kT_\alpha}{m_\alpha} \frac{|a^{(3)}|_{\beta\alpha} - |a^{(3)}|_{\alpha\alpha}}{|a^{(3)}|} \tag{1.18}$$

$$D_{\alpha\beta}^{\wedge} = -\frac{kT_\alpha}{m_\alpha} \sum_{\gamma,\delta} a_{\gamma\delta}^{(2)} \frac{(|a^{(1)}|_{\beta\delta} - |a^{(1)}|_{\alpha\delta})\, |a^{(3)}|_{\gamma\alpha}}{|a^{(1)}|\, |a^{(3)}|}, \qquad G_{\alpha\beta}^{\|} = D_{\alpha\beta}^{\|} - \sum_{\gamma} c_\gamma D_{\alpha\gamma}^{\|}$$

$$K_\alpha^{\|} = \sum_{\beta} \frac{n_\beta}{n_\alpha kT_\alpha} \left(e_\beta - \sum_{\gamma} \frac{m_\beta}{m_\gamma} c_\gamma e_\gamma\right) D_{\alpha\beta}^{\|} \tag{1.19}$$

При этом $|a^{(p)}|$ — определители с элементами

$$a_{\alpha\beta}^{(0)} = a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\alpha} + \sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} (\mu_{\gamma\beta}^{\|} - \mu_{\gamma\alpha}^{\|})$$

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} = a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\alpha} + \sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} (\mu_{\gamma\beta}^{\perp} - \mu_{\gamma\alpha}^{\perp}) \tag{1.20}$$

$$a_{\alpha\beta}^{(2)} = \omega_{\alpha\beta}^* - \omega_{\alpha\alpha}^* + \sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} (\mu_{\gamma\beta}^{\wedge} - \mu_{\gamma\alpha}^{\wedge}), \qquad \omega_{\alpha\alpha}^* = (1 - c_\alpha)\, \omega_\alpha$$

$$a_{\alpha\beta}^{(3)} = a_{\alpha\beta}^{(1)} + \sum_{\gamma,\delta} \frac{|a^{(1)}|_{\gamma\delta}}{|a^{(1)}|} a_{\alpha\delta}^{(2)} a_{\gamma\beta}^{(2)}, \qquad \omega_{\alpha\beta}^* = -c_\alpha \omega_\beta \qquad (\alpha \neq \beta)$$

$|a^{(p)}|_{\alpha\beta}$ — алгебраические дополнения элементов $a_{\alpha\beta}^{(p)}$ этих определителей. Выражения для величин $G_{\alpha\beta}^{\perp}$, $G_{\alpha\beta}^{\wedge}$ и для подвижностей $K_\alpha^{\perp}$, $K_\alpha^{\wedge}$ получаются из формул для $G_{\alpha\beta}^{\|}$, $K_\alpha^{\|}$ заменой в них значка $\|$ соответственно на значки $\perp$ и $\wedge$.

Нетрудно видеть, что коэффициенты $D_{\alpha\beta}^{\|}$ для смеси с одинаковыми температурами компонент совпадают с приведенными в [4] обобщенными коэффициентами диффузии D_{ij}, если входящие в D_{ij} коэффициенты бинарной диффузии $[D_{ij}]_k$ взять в первом приближении, а в величинах $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ опустить члены вида $b_{\alpha\beta}\mu_{\delta\gamma}^{\|}$. Учет этих членов, возникающих вследствие переноса тепла диффузией, соответствует второму приближению в коэффициентах бинарной диффузии $[D_{ij}]_k$. Из расчетов, сделанных в [4] для некоторых потенциалов взаимодействия частиц смеси, видно, что отличие $[D_{ij}]_2$ от $[D_{ij}]_1$ составляет всего лишь несколько процентов (например, для потенциала Леннарда — Джонса это отличие не превосходит 3% для большинства бинарных смесей). Однако в случае кулоновского взаимодействия заряженных частиц рассматриваемый ниже пример тройной смеси показывает, что учет диффузионного переноса тепла может привести к значительному изменению $D_{\alpha\beta}$ (см. также [5]).

Полученное выражение (1.13) позволяет без труда написать обобщенный закон Ома для плазмы, содержащей произвольное количество сортов заряженных частиц. Плотность тока

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha \mathbf{u}^\alpha$$

Следовательно, обобщенный закон Ома имеет вид

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{J}^\alpha + \mathbf{u} \sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha \tag{1.21}$$

Проводимость такой плазмы выражается формулой

$$\sigma^{\|} = -\sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha K_\alpha^{\|} \tag{1.22}$$

Замена значка $\|$ в (1.22) на значки $\perp$ и $\wedge$ дает выражения соответственно для $\sigma^{\perp}$ и $\sigma^{\wedge}$.

В заключение этого раздела приведем полную систему гидродинамических уравнений, описывающих движение многотемпературной частично ионизованной газовой смеси в электромагнитном поле. Система получается методом моментов из кинетических уравнений для каждой из компонент смеси, записанных в системе координат, неподвижной относительно смеси в целом. Система содержит $N-1$ уравнение неразрывности отдельных компонент (N — число компонент смеси), уравнения неразрывности и движения смеси в целом, N уравнений энергии и «уравнение состояния» смеси. В гидродинамическом приближении (см. сноску на стр. 11) имеем

$$\rho \frac{dc_\alpha}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J}^\alpha = 0, \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{1.23}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\pi + \sum_\beta \frac{e_\beta c_\beta}{m_\beta}\mathbf{E} + \frac{1}{\rho c}\mathbf{j}\times\mathbf{B} \tag{1.24}$$

$$\begin{gathered}\frac{3}{2} c_\alpha \frac{dT_\alpha}{dt} = -c_\alpha T_\alpha \operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{m_\alpha}{k\rho}\operatorname{div}\mathbf{h}^\alpha - \frac{T_\alpha}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{J}^\alpha - \frac{m_\alpha}{k\rho}\pi_{ij}^\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \\ + \frac{m_\alpha}{k\rho^2}\mathbf{J}^\alpha\cdot\nabla p - \frac{5}{2\rho}\mathbf{J}^\alpha\nabla T_\alpha + \frac{m_\alpha}{k\rho^2}\mathbf{J}^\alpha \operatorname{div}\pi + \frac{1}{k\rho}\mathbf{J}^\alpha\cdot\Big[\Big(e_\alpha - \sum_\beta \frac{m_\alpha}{m_\beta} e_\beta c_\beta\Big)\mathbf{E} + \\ + \frac{e_\alpha}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B} - \frac{m_\alpha}{\rho c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}\Big] + \sum_\beta \frac{3c_\alpha m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2 \tau_{\alpha\beta}}(T_\beta - T_\alpha)\end{gathered} \tag{1.25}$$

$$p = k\rho \sum_\beta \frac{c_\beta T_\beta}{m_\beta} \tag{1.26}$$

Тензоры вязких напряжений каждой из компонент смеси π^α сложным образом зависят от тензора скоростей деформаций всей смеси в целом. Выражения для π^α получены в [3]. Величины $\mathbf{J}^\alpha$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{h}^\alpha$ даются формулами (1.13), (1.21) и (1.11).

§ 2. Ниже рассматривается трехкомпонентная смесь, состоящая из ионов (i), электронов (e) и нейтральных частиц (a). Температуры и массы частиц тяжелых компонент предполагаются одинаковыми ($T_i = T_a = T$, $m_i = m_a = m$). Температура электронов $T_e \geqslant T$, причем считается выполненным условие

$$\varepsilon\theta^{-1} \ll 1 \qquad (\varepsilon = m_e / m, \theta = T / T_e) \tag{2.1}$$

Коэффициенты $a_{\alpha\beta} \div d_{\alpha\beta}$ для такой смеси с учетом (2.1) принимают вид

$$\begin{gathered} a_{aa} = -0.5\tau_{ai}^{-1} - \varepsilon\tau_{ae}^{-1}, \qquad a_{ai} = 0.5\tau_{ia}^{-1}, \qquad a_{ae} = \tau_{ea}^{-1} \\ a_{ii} = -0.5\tau_{ia}^{-1} - \varepsilon\tau_{ie}^{-1}, \qquad a_{ia} = 0.5\tau_{ai}^{-1}, \qquad a_{ie} = \tau_{ei}^{-1} \\ a_{ee} = -\tau_0^{-1}, \qquad a_{ei} = \varepsilon\tau_{ie}^{-1}, \qquad a_{ea} = \varepsilon\tau_{ae}^{-1} \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} b_{aa} = -\gamma b_1\tau_{ai}^{-1}, \qquad b_{ai} = \gamma b_1\tau_{ia}^{-1}, \qquad b_{ae} = \varepsilon\theta\gamma b_2\tau_{ea}^{-1} \\ b_{ii} = -\gamma b_1\tau_{ia}^{-1} + 0.6\varepsilon^2\theta\gamma\tau_{ie}^{-1}, \qquad b_{ia} = \gamma b_1\tau_{ai}^{-1}, \qquad b_{ie} = -0.6\varepsilon\theta\gamma\tau_{ei}^{-1} \\ b_{ee} = -\varepsilon\theta\gamma\nu, \qquad b_{ea} = \varepsilon^2\theta\gamma b_2\tau_{ae}^{-1}, \qquad b_{ei} = -0.6\varepsilon^2\theta\gamma\tau_{ie}^{-1} \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} d_{aa} = -2.5b_1(\gamma\tau_{ai})^{-1} + 5\varepsilon(1-\theta)(\gamma\theta\tau_{ae})^{-1}, \qquad d_{ai} = 2.5b_1(\gamma\tau_{ia})^{-1} \\ d_{ae} = \varepsilon d(\gamma\theta\tau_{ea})^{-1}, \qquad d_{ii} = -2.5b_1(\gamma\tau_{ia})^{-1} + 5\varepsilon(1-\theta)(\gamma\theta\tau_{ie})^{-1} \\ d_{ia} = 2.5b_1(\gamma\tau_{ai})^{-1}, \qquad d_{ie} = \varepsilon(3-4.5\theta)(\gamma\tau_{ei})^{-1}, \qquad d_{ee} = -2.5(\varepsilon\theta\gamma)^{-1}\nu \\ d_{ea} = 2.5b_2(\gamma\theta\tau_{ae})^{-1}, \qquad d_{ei} = -1.5(\gamma\theta\tau_{ie})^{-1} \end{gathered} \tag{2.4}$$

При этом

$$\tau_0^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{ea}^{-1}, \qquad \nu = b_2\tau_{ea}^{-1} - 0.6\tau_{ei}^{-1}, \qquad \gamma = m / kT$$

$$b_1 = 0.25(1.2C_{ia}^* - 1), \qquad b_2 = (1.2C_{ea}^* - 1)$$

$$d = 2.5\theta^2 b_2 - (1-\theta)(4A_{ea}^* - 12C_{ea}^* - 5\theta + 6\theta C_{ea}^*)$$

$$A_{\alpha\beta}^* = \Omega_{\alpha\beta}^{22} / 2\Omega_{\alpha\beta}^{11}, \qquad B_{\alpha\beta}^* = (5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13}) / 3\Omega_{\alpha\beta}^{11}, \qquad C_{\alpha\beta}^* = \Omega_{\alpha\beta}^{12} / 3\Omega_{\alpha\beta}^{11}$$

Коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ и величины τ_α^* для тройной смеси выписаны в [3]. Приведем результаты вычислений обобщенных коэффициентов диффузии и проводимости для случая, когда анизотропией явлений переноса можно пренебречь ($|\omega_e|\tau_e^* \ll 1$). При вычислениях существенно использовались оценки отношений эффективных сечений столкновений $Q_{\alpha\beta} / Q_{\delta\gamma}$ для диапазона температур $5\cdot 10^2\,°\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 10^4\,°\mathrm{K}$, $5\cdot 10^3\,°\mathrm{K} \leqslant T_e \leqslant 5\cdot 10^5\,°\mathrm{K}$, приведенные в § 2 работы [3]. Дополнительные данные, подтверждающие справедливость этих оценок, можно найти в [6]. Эти данные позволяют для некоторых газов уменьшить нижнюю границу электронной температуры T_e до $2\cdot 10^3\,°\mathrm{K}$. С точностью до величин порядка $\varepsilon^{1/2}\theta^{1/2}$ по отношению к оставленным коэффициенты $D_{\alpha\beta}^{\parallel}$ принимают вид

$$D_{ae}^{\parallel} = \frac{\delta kT}{m}\left(\frac{a_1}{2\tau_{ia}} + \frac{a_2}{\tau_{ei}}\right), \quad D_{ea}^{\parallel} = \frac{\delta kT_e}{m_e}\left(\frac{a_1}{2\alpha\tau_{ai}} + \frac{\varepsilon a_4}{\tau_{ie}}\right), \quad D_{ei}^{\parallel} = \frac{\delta kT_e}{m_e}\left(\frac{a_1}{2\alpha\tau_{ai}} + \frac{\varepsilon a_5}{\tau_{ae}}\right)$$

$$D_{ai}^{\parallel} = D_{ia}^{\parallel} = \frac{2\alpha\tau_{ai}}{a_1(1+\Delta)}\frac{kT}{m}, \qquad D_{ie}^{\parallel} = \frac{\delta kT}{m}\left(\frac{a_1}{2\tau_{ai}} + \frac{a_3}{\tau_{ea}}\right) \tag{2.5}$$

При этом

$$(D_{\alpha\beta}^{\perp} \approx D_{\alpha\beta}^{\parallel}, \quad D_{\alpha\beta}^{\wedge} \ll D_{\alpha\beta}^{\parallel})$$

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_a}, \qquad \delta = \frac{2\alpha\tau_{ai}\tau_0}{a_0 a_1(1+\Delta)}, \qquad a_p = 1 - f_p, \qquad (p = 0, 1, \ldots, 5)$$

$$\Delta = 2\varepsilon\tau_{ai}(1 - 2.5\tau_e^*\nu^{**})\left[\tau_{ae}\tau_{ei}a_1\left(\frac{a_0}{\tau_0} + \frac{a_1}{2\alpha\tau_{ai}}\right)\right]^{-1}$$

$$f_0 = 2.5\nu^2\tau_e^*\tau_0, \qquad f_1 = \frac{5b_1^2}{\xi}\left(\frac{\tau_a^*}{\tau_{ai}} + \frac{\tau_i^*}{\tau_{ia}} - \frac{2g\tau_a^*\tau_i^*}{\tau_{ia}\tau_{ai}}\right), \qquad f_2 = -1.5\nu\tau_e^*, \qquad f_3 = 2.5b_2\nu\tau_e^*$$

$$f_4 = 1.5\nu^*\tau_e^*\frac{n_i}{n_e}, \qquad f_5 = \frac{2.5b_2\nu^*\tau_e^* n_a}{n_e}, \qquad \xi = 1 - \frac{g^2\tau_a^*\tau_i^*}{\tau_{ia}\tau_{ai}}$$

$$\nu^* = \frac{b_2}{\tau_{ae}} + \frac{0.6}{\tau_{ie}}, \qquad \nu^{**} = \frac{b_2}{\tau_{ea}} + \frac{0.6}{\tau_{ei}}, \qquad g = 0.125(5.5 - 1.6A_{ai}^* - 1.2B_{ai}^*)$$

Вычисления, сделанные в предположении, что степень ионизации мала и преобладают столкновения типа нейтрал — нейтрал, нейтрал — заряженная частица, показывают, что учет диффузионного переноса тепла вносит в $D_{\alpha\beta}^{\parallel}$ незначительную поправку $f_p \sim 0.01$—0.08 ($p = 0, \ldots, 5$). При высокой степени ионизации, когда становятся существенными столкновения между заряженными частицами, величина поправки возрастает: $f_p \sim 0.5$ ($p = 0, 2, 4$). Это приводит к значительному увеличению некоторых диффузионных коэффициентов $D_{\alpha\beta}^{\parallel}$.

Подвижности заряженных частиц

$$K_i^{\parallel} = \frac{Ze}{kT}\alpha_i D_{ie}^{\parallel}, \qquad K_e^{\parallel} = \frac{e}{kT_e}\alpha_e D_{ei}^{\parallel}$$

$$\alpha_i = \frac{n_e}{Zn_i}\left[1 - \frac{m_e}{\rho}(n_e - Zn_i)\right], \qquad \alpha_e = \frac{Zn_i}{n_e}\left[1 - \frac{m}{Z\rho}(Zn_i - n_e)\right] \tag{2.6}$$

В (2.6) для удобства записи подвижность $K_i^{\parallel}$ взята с противоположным знаком по сравнению с (1.19). В дальнейшем для простоты будем считать, что плазма квазинейтральна ($Zn_i = n_e$, $\alpha_i = \alpha_e = 1$). Несложные выкладки с учетом оценок отношений $Q_{\alpha\beta} / Q_{\delta\gamma}$ из работы [3] дают

$$K_i^{\parallel} / K_e^{\parallel} \sim \varepsilon[\alpha + (\varepsilon\theta)^{-1/2}(1-\alpha)]$$

Следовательно, при высокой степени ионизации ($\alpha \sim 1$) $K_i^{\parallel} / K_e^{\parallel} \sim \varepsilon \ll 1$. Если $\alpha < 1$, то неравенство становится менее сильным, так как тогда $K_i^{\parallel} / K_e^{\parallel} \sim \varepsilon^{1/2}\theta^{-1/2}$.

Проводимость плазмы

$$\sigma^{\parallel} = \frac{e^2 n_e \delta}{m_e}\left[\frac{a_1}{2\alpha\tau_{ai}} + \frac{\varepsilon}{\tau_{ae}}\left(a_5 + \frac{Za_3 n_a}{n_e}\right)\right] \tag{2.7}$$

Выражение для $\sigma^{\parallel}$ становится более простым, если отрыв температуры электронов от температуры тяжелых частиц не очень велик ($\varepsilon^{1/2}\theta^{-1/2} \ll 1$)

$$\sigma^{\parallel} = \frac{e^2 n_e \tau_0}{m_e (1 - 2.5\nu^2 \tau_0 \tau_e^*)} \tag{2.8}$$

Формула (2.8) аналогична выражению (4.17) работы [5], если в последнем определить величины $\tau_{e\beta}$ при электронной температуре T_e. Это подтверждает утверждение в [3] относительно выражения для плотности тока **j**.

Рассмотрим амбиполярную диффузию в случае, когда $|\omega_e|\tau_e^* \ll 1$. Предположим, что, кроме условия квазинейтральности, выполнено условие $Z\nabla n_i = \nabla n_e \gg \gg \nabla n_a$ и все токи равны нулю $(\mathbf{u}^i - \mathbf{u} = \mathbf{u}^e - \mathbf{u} = \mathbf{w}_a)$. Пусть, далее, влиянием вязкого переноса импульса и градиентов температуры на диффузионные потоки ионов и электронов можно пренебречь. После исключения из выражений для $\mathbf{J}^i$, $\mathbf{J}^e$ электрического поля $\mathbf{E}^*$ будем иметь

$$\mathbf{w}_a = D_a^{\parallel} \nabla \rho_i / \rho_i = D_a^{\parallel} \nabla \rho_e / \rho_e \tag{2.9}$$

При этом $D_a^{\parallel}$ — коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_a^{\parallel} = \frac{Z\theta^{-1} G_{ie}^{\parallel} K_e^{\parallel} + Z^{-1}\theta G_{ei}^{\parallel} K_i^{\parallel}}{K_i^{\parallel} + K_e^{\parallel}} \tag{2.10}$$

Вычисления с точностью $\varepsilon^{1/2}\theta^{-1/2}$ дают

$$D_a^{\parallel} = \frac{p_e \delta^*}{\rho} \left(\frac{a_1}{2\tau_{ai}} + \frac{a_3}{\tau_{ea}} \right) \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[1 - \frac{a_0}{\tau_0 (a_3 \tau_{ea}^{-1} + 0.5 a_1 \tau_{ai}^{-1})} - \frac{2\varepsilon\theta a_2 \alpha \tau_{ai}}{Z a_1 \tau_{ie}} \right] \right\}$$

$$\delta^* = 2\alpha\tau_{ai}\tau_0 / a_0 a_1 \tag{2.11}$$

§ 3. Ниже формулы (1.19) и (1.22) применяются к двутемпературной полностью ионизованной плазме с двумя сортами ионов: (i) и (s). Пусть T, m_i, $m_s (m_i \leqslant \leqslant m_s)$ — температура и массы ионов, $Z_i e$, $Z_s e$ — их заряды. В условиях, когда $|\omega_e|\tau_0 \ll 1$, подвижности заряженных частиц в такой плазме записываются следующим образом:

$$K_e^{\parallel} = e (Z_i n_i + Z_s n_s) \tau_0 / n_e m_e$$

$$K_\alpha^{\parallel} = \frac{e\tau_0\tau_1}{n_\alpha m_\alpha} \left[\frac{Z_\beta n_\beta}{\tau_0} - \frac{n_e}{\tau_{e\beta}} - \frac{n_e m_\alpha}{(m_i + m_s)\tau_{\beta\alpha}} \right] \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = i, s \\ \alpha \neq \beta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

При этом

$$\tau_0^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{es}^{-1}, \qquad \tau_1^{-1} = (m_s \tau_{is}^{-1} + m_i \tau_{si}^{-1}) / (m_i + m_s)$$

Проводимость

$$\sigma^{\parallel} = \frac{e^2 n_e \tau_0}{m_e} = \frac{3 n_e (kT_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\, e^2 m_e^{1/2} (Z_i^2 n_i \ln \Lambda_{ei} + Z_s^2 n_s \ln \Lambda_{es})} \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) вычисления сделаны с точностью $(m_e / m_i)^{1/2}\theta^{3/2}$, и считается, что

$$\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha = 0, \qquad b_{\alpha\beta}\mu_{\delta\gamma} = 0$$

Если $|\omega_e|\tau_0 \gtrsim 1$, формулы (3.1), (3.2) верны для продольных коэффициентов.

Поступила 16 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Уравнения переноса для неизотермической многосортной плазмы. ПМТФ, 1963, № 5.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
3. Алиевский М. Я., Жданов В. М., Полянский В. А. Тензор вязких напряжений и тепловой поток в двухтемпературном частично ионизованном газе. ПМТФ, 1964, № 3.
4. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд. иностр. лит., 1961.
5. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
6. Пэн Цзай-чэн, Пиндрох А. Уточненный расчет свойств воздуха при высоких температурах. Вопр. ракетн. техн. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1962, № 12.