УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ДВУМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

Построена полная теория потенциала для первой краевой задачи двумерной анизотропной теории упругости (на границе задан вектор усилий) в ограниченной области на плоскости с границей Ляпунова.

Ключевые слова: теория упругости, уравнения Фредгольма.

Введение. Метод интегральных уравнений активно используется в теории упругости (см., например, [1–4]). При этом краевые задачи сводятся, как правило, к системам сингулярных интегральных уравнений. Если исходная краевая задача имеет нулевой индекс, соответствующую ей систему уравнений можно регуляризовать, т. е. свести к системе уравнений Фредгольма второго рода. Возникает вопрос: нельзя ли ее сразу привести к регулярной системе уравнений? В трехмерной теории упругости известен так называемый антенный потенциал Г. Вейля [5], применение которого приводит к системе регулярных интегральных уравнений. Как отмечается в [4], он соответствует решению задачи теории упругости, получаемому суперпозицией решений для полупространства, нагруженного на поверхности сосредоточенной силой (решение Буссинеска). В двумерной теории упругости для изотропного материала известно построенное аналогичным образом решение [6] статической задачи при заданных на границе внешних силах. В теории упругости хорошо известна система уравнений Фредгольма второго рода, предложенная Д. И. Шерманом [7], которая позволяет решать краевую задачу теории упругости при заданном на границе векторе усилий. Позднее автором настоящей работы был дан ее упрощенный вывод [8]. Эта система уравнений имеет существенный недостаток: в ее правой части присутствуют не усилия, а интегралы от них по длине границы. Поэтому желательно иметь аналогичную систему уравнений, в которой в качестве правой части присутствует заданный на границе вектор усилий. Именно такая система уравнений построена в данной работе. Смысл предлагаемого подхода состоит в построении аналога антенного потенциала Г. Вейля для анизотропной среды. Для изотропной среды это приводит к системе уравнений, записанной в [6] в комплексном виде. Отметим, что эта система уравнений не совпадает с системой, получающейся при традиционном подходе с использованием фундаментального решения исходной системы дифференциальных уравнений, так как этот подход приводит к системе сингулярных интегральных уравнений. Для вывода данной здесь системы не требуется знания фундаментального решения системы уравнений теории упругости и связанных с ним громоздких вычислений. Достаточно знать, что краевая задача удовлетворяет условию Лопатинского [9]. Существует несколько достаточно сложных формулировок этого условия; ограничимся замечанием, что оно сводится к существованию единственного затухающего на бесконечности решения эллиптической краевой задачи в любой полуплоскости, касательной к границе области, и заключается в отличии от нуля некоторого определителя, связанного с краевой задачей. Система уравнений двумерной анизотропной теории упругости имеет простые комплексные характеристики, что значительно упрощает ее построение. Эта система уравнений адекватна краевой задаче и позволяет использовать минимальные предположения о гладкости границы и граничных данных в гельдеровых классах функций. Ее можно использовать и в случае, когда ядра интегральных операторов утрачивают свойство фредгольмовости. При этом предельный переход к изотропному материалу осуществляется без каких-либо затруднений. Похожая система уравнений построена в [10], однако в этой работе имеется ряд существенных недостатков, а именно: не доказано, что ядра интегральных операторов, входящих в систему, имеют слабую особенность или непрерывны (поэтому уравнения нельзя считать фредгольмовыми), не указаны точные предположения о гладкости границы области. Необходимо отметить, что в литературе отсутствует теорема о разрешимости в этих предположениях рассматриваемой краевой задачи даже для изотропного материала.

1. Выполним формальное построение данной системы уравнений в предположении корректности проводимых вычислений, обоснование которых дано ниже. С использованием обозначений [11] напряжения σ_{ij} $(i,j=1,2)$ выражаются через производные аналитических функций $\Phi_k(z_k)$ $(z_k = x_1 + \mu_k x_2,\ k=1,2)$ следующим образом:

$$\sigma_{11} = \operatorname{Re}[\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\Phi_2'(z_2)], \qquad \sigma_{22} = \operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)],$$
$$\sigma_{12} = -\operatorname{Re}[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)].$$

Вектор перемещений при этом определен с точностью до жесткого перемещения и равен

$$u_1 = \operatorname{Re}[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)] + \alpha x_2 + \beta_1,$$
$$u_2 = \operatorname{Re}[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)] - \alpha x_1 + \beta_2.$$

Здесь μ_k $(k=1,2)$ — комплексные параметры анизотропного материала; α, β_k $(k=1,2)$ — вещественные постоянные; $p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k$; $q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}\mu_k^{-1} - a_{26}$, $k=1,2$. Коэффициенты a_{ij} $(i,j=1,2,6)$ определяются из закона Гука

$$e_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{16}\sigma_{12}, \qquad e_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{26}\sigma_{12},$$
$$2e_{12} = a_{16}\sigma_{11} + a_{26}\sigma_{22} + a_{66}\sigma_{12}, \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i,j=1,2,$$

где e_{ij} $(i,j=1,2)$ — деформации. Предполагается, что матрица упругих постоянных положительно определена. Обозначим через $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ $(n_1 = -x_2'(s),\ n_2 = x_1'(s))$ вектор внутренней нормали к спрямляемой жордановой границе ∂Q длины L односвязной ограниченной области Q на плоскости. Кроме того, $x_1(s), x_2(s) \in C^{1,\lambda}(0,L)$, $0<\lambda<1$, т. е. функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, задающие форму границы, непрерывны и непрерывно дифференцируемы, вектор нормали удовлетворяет условию Ляпунова. Начало координат лежит внутри области.

Граничные условия в усилиях имеют вид

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2\big|_{\partial Q} = g_1(s), \qquad \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2\big|_{\partial Q} = g_2(s), \tag{1}$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки границы в направлении против часовой стрелки. Положим $t_k(s) = x_1(s) + \mu_k x_2(s)$ $(k=1,2)$. Тогда граничные условия (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\{-\mu_1 t_1'(s_0)\Phi_1'(t_1(s_0)) - \mu_2 t_2'(s_0)\Phi_2'(t_2(s_0))\} = g_1(s_0), \\ \operatorname{Re}\{t_1'(s_0)\Phi_1'(t_1(s_0)) + t_2'(s_0)\Phi_2'(t_2(s_0))\} = g_2(s_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $t_k(s_0) = x_1(s_0)+\mu_k x_2(s_0)$ $(k = 1, 2)$; штрих обозначает производную по s. Представим функции $\Phi_1'(z_1)$, $\Phi_2'(z_2)$ в виде интегралов типа Коши:

$$\Phi_k'(z_k) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} \frac{b_k(s)(t_k(s))^{-1}\,ds}{t_k - z_k}, \qquad k = 1, 2.$$

Плотности $b_k(s)$ $(k = 1, 2)$, входящие в эти интегралы, комплексны и определяются из решения простой системы уравнений

$$-\mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 = f_1(s), \qquad b_1 + b_2 = f_2(s). \tag{3}$$

В (3) функции $f_k(s)$ $(k = 1, 2)$ вещественны. Поясним, каким образом появляется система уравнений (3). Рассмотрим частный случай — решение исходной краевой задачи в полуплоскости $x_2 > 0$. Представим входящие в решение функции в виде интегралов типа Коши и попытаемся удовлетворить граничным условиям (1). Тогда плотности, входящие в эти интегралы, будут удовлетворять соотношениям (3). Для полуплоскости, касающейся области в любой точке границы (в локальной прямоугольной системе координат, связанной с этой точкой), решением данной задачи также является система соотношений (3). Решив ее, получим

$$\Phi_1'(z_1) = -\frac{1}{\pi i(\mu_1 - \mu_2)}\int\limits_{\partial Q} \frac{(f_1 + \mu_2 f_2)[t_1'(s)]^{-1}\,dt_1}{t_1 - z_1},$$

$$\Phi_2'(z_2) = \frac{1}{\pi i(\mu_1 - \mu_2)}\int\limits_{\partial Q} \frac{(f_1 + \mu_1 f_2)[t_2'(s)]^{-1}\,dt_2}{t_2 - z_2}.$$

Для интеграла типа Коши имеют место формулы Сохоцкого [6]

$$\lim_{z_j\to t_j}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\varphi(s)\,\frac{dt_j}{t_j - z_j} = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\varphi(s)\,\frac{dt_j}{t_j - t_{j0}}, \qquad z \in Q_i,$$

$$\lim_{z_j\to t_j}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\varphi(s)\,\frac{dt_j}{t_j - z_j} = -\varphi(s) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\varphi(s)\,\frac{dt_j}{t_j - t_{j0}}, \qquad z \in Q_e.$$

Здесь $Q_i = Q$; Q_e — область, внешняя по отношению к Q; $t_{j0} = t_j(s_0)$; $\varphi(s) \in C^{0,\lambda}(\partial Q)$. Отсюда следует, что

$$\sigma_{kj}(\boldsymbol{u}(x,\boldsymbol{f})n_j)_i(s_0) - \sigma_{kj}(\boldsymbol{u}(x,\boldsymbol{f})n_j)_e(s_0) = 2f_k(s_0), \qquad k = 1, 2,$$

где $\sigma_{kj}(\boldsymbol{u}(x,\boldsymbol{f})n_j)_i(s_0)$ и $\sigma_{kj}(\boldsymbol{u}(x,\boldsymbol{f})n_j)_e(s_0)$ — предельные значения вектора усилий при стремлении к границе изнутри области и снаружи; $\boldsymbol{u}(x,\boldsymbol{f})$ — определенный ниже потенциал простого слоя. Поэтому из граничных условий (2) получим систему интегральных уравнений

$$f_1(s_0) + \operatorname{Re}\frac{\mu_1 t_1'(s_0)}{\pi i(\mu_1 - \mu_2)}\int\limits_{\partial Q}\frac{(f_1 + \mu_2 f_2)[t_1'(s)]^{-1}\,dt_1}{t_1 - t_{10}} -$$

$$- \operatorname{Re}\frac{\mu_2 t_2'(s_0)}{\pi i(\mu_1 - \mu_2)}\int\limits_{\partial Q}\frac{(f_1 + \mu_1 f_2)[t_2'(s)]^{-1}\,dt_2}{t_2 - t_{20}} = g_1(s_0); \tag{4}$$

$$f_2(s_0) - \operatorname{Re} \frac{t_1'(s_0)}{\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int\limits_{\partial Q} \frac{(f_1+\mu_2 f_2)[t_1'(s)]^{-1}\,dt_1}{t_1-t_{10}} + {}$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{t_2'(s_0)}{\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int\limits_{\partial Q} \frac{(f_1+\mu_1 f_2)[t_2'(s)]^{-1}\,dt_2}{t_2-t_{20}} = g_2(s_0), \qquad (5)$$

где $t_{k0} = x_1(s_0) + \mu_k x_2(s_0)$ ($k = 1, 2$). С системой уравнений (4), (5) сопряжена по Фредгольму система уравнений

$$\psi_1(s_0) - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int\limits_{\partial Q} \frac{(\psi_2-\mu_1\psi_1)\,dt_1}{t_1-t_{10}} + {}$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int\limits_{\partial Q} \frac{(\psi_2-\mu_2\psi_1)\,dt_2}{t_2-t_{20}} = h_1(s_0); \qquad (6)$$

$$\psi_2(s_0) - \operatorname{Re} \frac{\mu_2}{\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int\limits_{\partial Q} \frac{(\psi_2-\mu_1\psi_1)\,dt_1}{t_1-t_{10}} + {}$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{\mu_1}{\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int\limits_{\partial Q} \frac{(\psi_2-\mu_2\psi_1)\,d\,t_2}{t_2-t_{20}} = h_2(s_0). \qquad (7)$$

Легко проверить непосредственным вычислением, что система уравнений (6), (7) имеет собственные вектор-функции

$$\boldsymbol{w}_1 = (1, 0), \quad \boldsymbol{w}_2 = (0, 1), \quad \boldsymbol{w}_3 = (-x_2(s), x_1(s)).$$

Доказательство того, что все интегралы, участвующие в системе уравнений (6), (7), имеют, самое большее, слабую особенность при ляпуновской границе, аналогично данному в [12] и поэтому опускается. Следовательно, для взаимно сопряженных систем уравнений (4), (5) и (6), (7) справедливы все теоремы Фредгольма. Таким образом, для разрешимости уравнений (4), (5) необходимо и достаточно, чтобы их правые части были ортогональны всем решениям однородных уравнений (6), (7) соответственно, и наоборот.

Так как система уравнений (4), (5) предназначена для решения первой краевой задачи, должны выполняться условия равновесия — равенства нулю главного вектора и главного момента приложенных сил. Иными словами, должны иметь место равенства

$$\int\limits_{\partial Q} g_k(s)\,ds = 0, \quad k = 1, 2, \qquad \int\limits_{\partial Q} (x_1(s) g_2(s) - x_2(s) g_1(s))\,ds = 0. \qquad (8)$$

Для проверки этого утверждения умножим уравнения (4), (5) на ds_0 и проинтегрируем результат по s_0, учитывая, что

$$\int\limits_{\partial Q} \frac{t_{k0}'\,ds_0}{t_k - t_{k0}} = -\pi i.$$

Тогда левые части уравнений (4), (5) обратятся в нуль и получим первые два равенства (8). Аналогично умножим уравнение (5) на $-x_2(s_0)$, а уравнение (4) — на $x_1(s_0)$, изменим порядок интегрирования и проинтегрируем по s_0. Получим третье равенство (8). Таким образом, равенства (8) необходимы для того, чтобы система уравнений (4), (5) имела решение.

Решение первой краевой задачи дается потенциалом простого слоя, который в данном случае имеет вид

$$u_1(x,y,\boldsymbol{f}) = \operatorname{Re}\frac{p_1}{(\mu_1-\mu_2)\pi i}\int\limits_{\partial Q}(f_1+f_2\mu_2)\ln(z_1-t_1)\,ds -$$

$$-\operatorname{Re}\frac{p_2}{(\mu_1-\mu_2)\pi i}\int\limits_{\partial Q}(f_1+f_2\mu_1)\ln(z_2-t_2)\,ds,$$

$$u_2(x,y,\boldsymbol{f}) = \operatorname{Re}\frac{q_1}{(\mu_1-\mu_2)\pi i}\int\limits_{\partial Q}(f_1+f_2\mu_2)\ln(z_1-t_1)\,ds -$$

$$-\operatorname{Re}\frac{q_2}{(\mu_1-\mu_2)\pi i}\int\limits_{\partial Q}(f_1+f_2\mu_1)\ln(z_2-t_2)\,ds \qquad (9)$$

(для определенности выбрана главная ветвь логарифма). Рассмотрим более детально свойства потенциала простого слоя. Для существования интегралов (9) достаточно, чтобы плотности f_1, f_2 были непрерывны. При этом u_1, u_2 непрерывны на всей плоскости, однако имеют логарифмический рост на бесконечности. Справедлива

Лемма 1. *Для потенциала простого слоя с непрерывной плотностью* $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$, *удовлетворяющей соотношению*

$$\int\limits_{\partial Q} f_i\,ds = 0, \qquad i = 1, 2,$$

справедливы оценки

$$|u_i(x,f)| < \frac{c}{|x|}, \qquad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| < \frac{c_1}{|x|^2}, \qquad i,j = 1,2, \quad |x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Для доказательства леммы рассмотрим входящий в (9) типичный интеграл

$$\int\limits_{\partial Q} f(s)\ln(z_k-t_k)\,ds.$$

Здесь $f(s)$ — какая-либо плотность. Представим f в виде производной

$$f(s) = \frac{d}{ds}\Big(\int\limits_0^s f(s)\,ds\Big) = \frac{d}{ds}\,\tau(s).$$

Проинтегрировав по частям, получим равенство

$$\int\limits_{\partial Q}\frac{d\tau}{ds}\,\ln(z_k-t_k)\,ds = \tau(s)\ln(z_1-t_1)\big|_{\partial Q} - \int\limits_{\partial Q}\tau(s)\,\frac{dt_k}{t_k-z_k}. \qquad (10)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (10) обратится в нуль, если $\tau(L)=0$; второе слагаемое представляет собой однозначный интеграл типа Коши. Равенство $\tau(L) = 0$ означает выполнение условия леммы. Остальные утверждения леммы очевидны. Отсюда следует однозначность функций $v_1(x_1,x_2)$, $v_2(x_1,x_2)$.

Положим $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ и введем краткие обозначения для потенциала простого слоя:

$$\boldsymbol{u}(x, \boldsymbol{f}) = (u_1(x, \boldsymbol{f}), u_2(x, \boldsymbol{f})), \qquad u_i(x, \boldsymbol{f}) = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\partial Q} G_{ij} f_j(s)\, ds, \quad i = 1, 2.$$

Здесь G_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — ядра интегральных операторов в (9). Введем матрицу $G(x) = (G_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2)$ и запишем потенциал простого слоя в векторном виде:

$$\boldsymbol{u}(x, \boldsymbol{f}) = \int\limits_{\partial Q} G(x - y) \boldsymbol{f}\, ds.$$

Лемма 2. *Система интегральных уравнений* (6), (7) *имеет три и только три линейно независимых решения*

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, 0), \qquad \boldsymbol{f}_2 = (0, 1), \qquad \boldsymbol{f}_3 = (-x_2(s), x_1(s)).$$

Действительно, если бы это утверждение было неверным, то система уравнений (4), (5), сопряженная с (6), (7), также имела бы более трех линейно независимых решений $\boldsymbol{w}_k(s)$, $k > 3$. Каждому из них отвечает потенциал простого слоя $\boldsymbol{v}(x, f_k)$, для которого $\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}(x, f_k) n_j) = 0$ на границе области.

Пусть существует еще одно решение $f_4(s)$, линейно независимое от предыдущих, тогда выражение

$$f(s) = f_4(s) - \sum_{j=1}^{3} c_j f_j(s),$$

где c_j $(j = 1, 2, 3)$ — произвольные вещественные постоянные, также является решением однородной системы уравнений (6), (7). Составим потенциалы простого слоя:

$$\boldsymbol{u}(x, f_4), \quad \boldsymbol{u}(x, f_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Как решения однородных краевых задач они представляют собой векторы жестких перемещений:

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x, f_4) - \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{u}(x, f_j).$$

Подберем постоянные c_1, c_2, c_3 так, чтобы выполнялись условия

$$\boldsymbol{u}(0) = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0.$$

Но тогда v^k удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \qquad i, j = 1, 2.$$

Запишем эти условия в виде

$$\sum_{j=1}^{3} c_j \int\limits_{\partial Q} G(x_2) \varphi_j(s)\, ds = \int\limits_{\partial Q} G(x_2)\, ds,$$

$$\sum_{j=1}^{3} c_j \int\limits_{\partial Q} G_0(x_2) \varphi_j(s)\, ds = \int\limits_{\partial Q} G_0(x_2)\, ds,$$

где

$$G_0(x_2) = \frac{\partial G_2}{\partial x_2} - \frac{\partial G_1}{\partial x_1}.$$

Определитель данной системы уравнений отличен от нуля в силу линейной независимости w_j $(j = 1, 2, 3)$. Решив эту систему относительно c_j $(j = 1, 2, 3)$, получим $u(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in Q_i$. Из непрерывности потенциала на всей плоскости следует, что $u(x) = 0$ на ∂Q. Так как $u(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то на бесконечности

$$|u(x_1, x_2)| < c/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad |\sigma_{ij}(u(x))| < c_1/(x_1^2 + x_2^2),$$

поэтому $u(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in Q_e$. Но тогда по формуле Сохоцкого скачок вектора усилий на границе равен нулю и $f_4 = 0$. Приходим к противоречию. В случае, когда на границе задан вектор усилий, обозначим решение внутренней краевой задачи через (I, Q_i), а решение внешней краевой задачи — через (I, Q_e). Справедлива

Лемма 3. *Задача (I, Q_i) имеет единственное решение с точностью до линейной комбинации $c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$, где*

$$\boldsymbol{w}_1 = (0, 1), \quad \boldsymbol{w}_2 = (1, 0), \quad \boldsymbol{w}_3 = (-x_2, x_1),$$

и функции w_k $(k = 1, 2, 3)$ являются полным набором решений системы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0, \qquad i, k = 1, 2.$$

Доказательство леммы 3 следует из справедливости интегрального равенства

$$\int\limits_{Q_i} \sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v})\, dx = \int\limits_{\partial} Q\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) v_i \nu_j\, ds. \tag{11}$$

Здесь ν — нормаль, внешняя по отношению к Q_i. Для функций $\boldsymbol{v}$, обладающих свойствами

$$|\boldsymbol{v}| \leqslant c, \qquad \left|\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c}{|x|^2}, \quad i, k = 1, 2, \tag{12}$$

при больших $|x|$ и удовлетворяющих однородной системе уравнений теории упругости в неограниченной области Q_e, справедливо интегральное равенство

$$\int\limits_{Q_e} \sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v})\, dx = -\int\limits_{\partial} Q\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) v_i \nu_j\, ds. \tag{13}$$

Равенство (13) следует из интегрального равенства (11) для ограниченной области. Действительно, рассмотрим область, расположенную между границей ∂Q и окружностью достаточно большого радиуса R с центром, лежащим внутри Q_i. Для этой области справедливо равенство (11). Интеграл по внешней окружности стремится к нулю в силу (12) при $R \to \infty$. Поэтому равенство (13) следует из стремления к нулю интеграла по окружности радиуса R и абсолютной сходимости интеграла по Q_e. Отсюда следует

Лемма 4. *Решение задачи (I, Q_e) в классе функций, обладающих свойством* (12), *единственно с точностью до постоянного вектора, а если $\boldsymbol{u} \to 0$ при $|x| \to \infty$, то решение задачи (I, Q_e) единственно.*

Систему уравнений (4), (5) можно модифицировать так, что она станет разрешимой при любой правой части. Действительно, дополним уравнение (4) слагаемыми

$$-\operatorname{Re} \frac{\mu_1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)} \frac{t_1'(s_0)}{t_1(s_0)} \int\limits_{\partial Q} (f_1 + \mu_2 f_2)\, ds +$$

$$+\operatorname{Re}\frac{\mu_2}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}\,\frac{t_2'(s_0)}{t_2(s_0)}\int\limits_{\partial Q}(f_1+\mu_1 f_2)\,ds-$$
$$-\operatorname{Re}\frac{1}{4\pi i}\Big(-\mu_1\frac{\partial}{\partial s_0}\,\frac{1}{t_1(s_0)}-\mu_2\frac{\partial}{\partial s_0}\,\frac{1}{t_2(s_0)}\Big)M,$$

а уравнение (5) — слагаемыми

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}\,\frac{t_1'(s_0)}{t_1(s_0)}\int\limits_{\partial Q}(f_1+\mu_2 f_2)\,ds+$$
$$+\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}\,\frac{t_2'(s_0)}{t_2(s_0)}\int\limits_{\partial Q}(f_1+\mu_1 f_2)\,ds-$$
$$-\operatorname{Re}\frac{1}{4\pi i}\Big(\frac{\partial}{\partial s_0}\,\frac{1}{t_1(s_0)}+\frac{\partial}{\partial s_0}\,\frac{1}{t_2(s_0)}\Big)M,$$

где M — вещественная постоянная. Так как

$$\int\limits_{\partial Q}\frac{dt_k(s_0)}{t_k(s_0)}=2\pi i,\qquad k=1,2$$

(начало координат лежит внутри области), то

$$\int\limits_{\partial Q}f_k(s)\,ds=\int\limits_{\partial Q}g_k(s)\,ds,\qquad k=1,2,$$
$$M=\int\limits_{\partial Q}(-x_2(s)g_1(s)+x_1(s)g_2(s))\,ds.$$

Если главный вектор и главный момент приложенных сил равны нулю, то система уравнений с этими слагаемыми эквивалентна системе уравнений (4), (5). Для того чтобы она имела смысл, следует предположить, что $g_k(s)\in C^{0,\lambda}(\partial Q)$ $(k=1,2)$. Тогда $f_k(s)\in C^{0,\lambda}(\partial Q)$ $(k=1,2)$. Не совсем очевидно, что это система уравнений Фредгольма второго рода. Запишем уравнения (4), (5) в виде

$$f_1(s_0)+\operatorname{Re}\frac{t_1'(s_0)}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}f_1(s)\frac{[t_1'(s)]^{-1}\,dt_1}{t_1-t_{10}}+$$
$$+\operatorname{Re}\frac{\mu_2}{\pi i(\mu_1-\mu_2)}\int\limits_{\partial Q}(f_1+\mu_1 f_2)\Big(\frac{t_2'(s_0)}{t_2-t_{20}}-\frac{t_1'(s_0)}{t_1-t_{10}}\Big)\,ds=g_1(s_0);\qquad(14)$$

$$f_2(s_0)+\operatorname{Re}\frac{t_2'(s_0)}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}f_2(s)\frac{(t_2'(s))^{-1}\,dt_1}{t_2-t_{20}}+$$
$$+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i(\mu_1-\mu_2)}\int\limits_{\partial Q}(f_1+\mu_2 f_2)\Big(\frac{t_1'(s_0)}{t_1-t_{10}}-\frac{t_2'(s_0)}{t_2-t_{20}}\Big)\,ds=g_2(s_0).\qquad(15)$$

Таким образом, система уравнений (14), (15) — это система уравнений Фредгольма второго рода.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть*

$$g_k(s) \in C^{0,\lambda}(\partial Q), \quad k = 1, 2, \qquad \partial Q \in C^{1,\lambda}(0, L), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Для существования решения системы уравнений (14), (15) *из класса* $C^{0,\lambda}(\partial Q)$, *причем* $u_k(x) \in C^{1,\lambda}(Q)$, $k = 1, 2$, *необходимо и достаточно равенства нулю главного вектора и главного момента приложенных усилий. При этом решение краевой задачи* $u_k(x) \in C^{1,\lambda}(\,\overline{Q}\,)$ $(k = 1, 2)$.

Доказательство. Будем искать решение краевой задачи в виде потенциала простого слоя $\boldsymbol{u} = (u_1(x, \boldsymbol{f}),\ u_2(x, \boldsymbol{f}))$. Тогда плотность $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ удовлетворяет системе уравнений (4), (5). Так как для пары сопряженных интегральных уравнений (4), (5) и (6), (7) справедливы все теоремы Фредгольма, то система уравнений (4), (5) разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$ ортогональна ко всем решениям однородной системы уравнений (6), (7). Согласно лемме 2 общим решением однородной системы уравнений (6), (7) является вектор жестких перемещений $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_1 = -c_3x_2 + c_1$, $\varphi_2 = c_3x_1 + c_2$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные вещественные постоянные. Равенства (8) представляют собой условие ортогональности решения однородной системы (6), (7) вектор-функции $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$, поэтому они гарантируют существование решения системы уравнений (4), (5). Они же являются необходимыми условиями разрешимости, что следует из формулы Бетти:

$$0 = \int\limits_{\partial Q} \sigma_{ij} n_j \varphi_i \, ds = \int\limits_{\partial Q} g_i \varphi_i \, ds.$$

Полученные соотношения эквивалентны условиям равновесия. Гладкость решения повышается при повышении гладкости границы и граничных данных. Справедлива

Теорема 2. *Пусть*

$$g_k(s) \in C^{l,\lambda}(\partial Q), \quad k = 1, 2, \qquad \partial Q \in C^{l+1,\lambda}(0, L), \quad 0 < \lambda < 1, \quad l \geqslant 1.$$

Тогда решение краевой задачи принадлежит классу $C^{l+1,\lambda}(\,\overline{Q}\,)$. Этот результат следует из свойств гладкости интеграла типа Коши ([13], теорема (8)).

2. Рассмотрим решение для изотропного материала. При изотропии

$$a_{11} = a_{22} = 1/E, \quad a_{12} = -\nu/E, \quad a_{66} = 1/G, \quad a_{16} = a_{26} = 0,$$

где E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. При $\mu_1, \mu_2 \to i$ осуществляется предельный переход. В результате для изотропного материала имеем систему уравнений

$$\begin{gathered}
f_1(s_0) + \operatorname{Re} \frac{t'(s_0)}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f_1(s)[t'(s)]^{-1}\, dt}{t - t_0} + \\
+ \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial Q} (f_1 + i f_2) \, \frac{(\bar t - \bar t_0)\, dt - (t - t_0)\, d\bar t}{(t - t_0)^2} = g_1(s_0), \\
f_2(s_0) + \operatorname{Re} \frac{t'(s_0)}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f_2(s)[t'(s)]^{-1}\, dt}{t - t_0} + \\
+ \operatorname{Re} \frac{i}{2\pi i} \int\limits_{\partial Q} (f_1 + i f_2) \, \frac{(\bar t - \bar t_0)\, dt - (t - t_0)\, d\bar t}{(t - t_0)^2} = g_2(s_0),
\end{gathered} \tag{16}$$

где $t = x_1(s) + ix_2(s)$; $t_0 = x_1(s_0) + ix_2(s_0)$. Приведем систему уравнений (16) к одному (комплексному) уравнению относительно комплексной плотности $\omega(s) = f_1(s) + if_2(s)$. Эта система эквивалентна системе уравнений в [6].

Обозначим через $(u_1^1(x), u_2^1(x))$ компоненты вектора перемещений для изотропного материала. Тогда

$$u_1^1(x) = \operatorname{Re}\Big[\frac{2}{E}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial Q} f_1(s)\ln(z-t)\,ds + \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial Q} f_1(s)\,\frac{i(\eta - x_2)}{t-z}\,ds\Big] + \\ + \operatorname{Re}\Big[\frac{1-\nu}{E}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial Q} if_2(s)\ln(z-t)\,ds + \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial Q} f_2(s)\,\frac{i(\eta - x_2)}{t-z}\,ds\Big],$$

$$u_2^1(x) = \operatorname{Re}\Big[\frac{1-\nu}{E}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} f_1(s)\ln(z-t)\,ds - \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} f_1(s)\,\frac{i(\eta - x_2)}{t-z}\,ds\Big] + \\ + \operatorname{Re}\Big[\frac{2}{E}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} if_2(s)\ln(z-t)\,ds - \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q} if_2(s)\,\frac{i(\eta - x_2)}{t-z}\,ds\Big],$$

где $z = x_1 + ix_2$; $\eta = x_2(s)$.

Отметим, что представленная форма записи перемещений для изотропного материала ранее не предлагалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З., Перлин П. И.** Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977.
2. **Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В.** Интегральные уравнения в теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1994.
3. **Мазья В. Г.** Граничные интегральные уравнения. М.: ВИНИТИ, 1988. (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики; Т. 27).
4. **Купрадзе В. Д.** Методы теории потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
5. **Weil H.** Das asymptotische Verteilingsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalten elastischen // Korpers. Rend. Circ. Mat. Palermo. 1915. T. 39.
6. **Шерман Д. И.** К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды // Прикл. математика и механика. 1942. Т. 6, № 6. С. 509–514.
7. **Хациревич И. Х.** Применение метода Вейля к решению плоской статической задачи теории упругости // Прикл. математика и механика. 1942. Т. 6, № 2/3. С. 197–202.
8. **Боган Ю. А.** Об интегральных уравнениях Фредгольма в двумерной анизотропной теории упругости // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 4, № 1. С. 21–30.
9. **Лопатинский Я. Б.** Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5, № 2. С. 123–151.
10. **Башелейшвили М. О.** Решение плоских граничных задач статики анизотропного упругого тела // Тр. ВЦ АН ГССР. 1963. Т. 3. С. 93–139.
11. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
12. **Боган Ю. А.** Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 17–26.
13. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 18/IV 2005 г.