

УДК 532.5

DOI: 10.15372/PMTF202215217

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

Д. В. Маклаков, А. Г. Петров*

Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, Россия

* Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, Москва, Россия

E-mails: dmaklak@kpfu.ru, petrovipmech@gmail.com

Рассматривается плоская задача об обтекании двух круговых цилиндров потенциальным потоком жидкости при заданных скорости на бесконечности, циркуляции вокруг цилиндров, радиусах и взаиморасположении цилиндров. Выведены точные аналитические формулы для комплексного потенциала и комплексно-сопряженной скорости, выраженные через тета-функции Якоби. Циркуляции вокруг цилиндров однозначно определяются с помощью минимаксного принципа Гольдштика: циркуляции должны быть подобраны таким образом, чтобы максимальная скорость жидкости в потоке была минимальной.

Ключевые слова: потенциальное течение, комплексный потенциал, циркуляция, тета-функции

Введение. Задача о потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости, индуцированной двумя круговыми цилиндрами, решается почти 150 лет — первая работа опубликована У. М. Хиксом в 1879 г. [1]. В работе [1] построен комплексный потенциал течения в виде определенных интегралов, а для случая, когда два неподвижных цилиндра обтекаются однородным на бесконечности потоком, с помощью эллиптических функций получено решение в биполярных координатах. В работе [2] представлено решение в виде бесконечных рядов от биполярных координат. Впоследствии результаты [1, 2] были изложены в монографии [3].

Наиболее целесообразно для решения задачи о двух цилиндрах использовать метод конформных отображений. Действительно, с помощью дробно-линейной функции можно конформно отобразить внешнюю область двух цилиндров на кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями. Следует отметить, что данное отображение эквивалентно введению системы биполярных координат. Далее можно либо использовать аппарат краевых задач, либо искать решение в виде рядов Лорана. Такой подход значительно упрощает процесс построения решения и используется в ряде работ.

В работе [4] решена задача об обтекании двух цилиндров с заданными циркуляциями и комплексный потенциал выражен через сигма- и дзета-функции Вейерштрасса. В [5] комплексный потенциал для задачи о движении цилиндра вблизи плоскости (цилиндра бесконечного радиуса) найден с помощью решения в виде бесконечных рядов. Однако из

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”) и при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00833).

данного решения получается формула для расхода, противоречащая работе [4]. Произвольное движение двух цилиндров исследовано в работе [6], в которой для случая обтекания неподвижных цилиндров решение выражается через тета-функции Якоби, в общем случае — с помощью числовых рядов. Кроме того, в [6] рассмотрен случай, когда в потоке помимо цилиндров может находиться конечное число точечных вихрей. В [7] исследован наиболее общий случай движения двух цилиндров переменных радиусов и решение представлено в виде рядов. Авторы [8] с использованием подхода А. Г. Гринхилла [2] нашли решение задачи о бесциркуляционном обтекании двух неподвижных цилиндров в виде рядов.

Метод конформных отображений, использовавшийся в [4–7], обобщается на случай движения двух цилиндров произвольного сечения [9, 10]. Л. И. Седов в монографии [11] применил этот метод для решения задачи о бипланах и вывел формулу для комплексного потенциала, аналогичную формуле Лагалли [4]. Кроме того, данный метод можно использовать в задаче о миграции вихря вблизи двух цилиндров [12, 13].

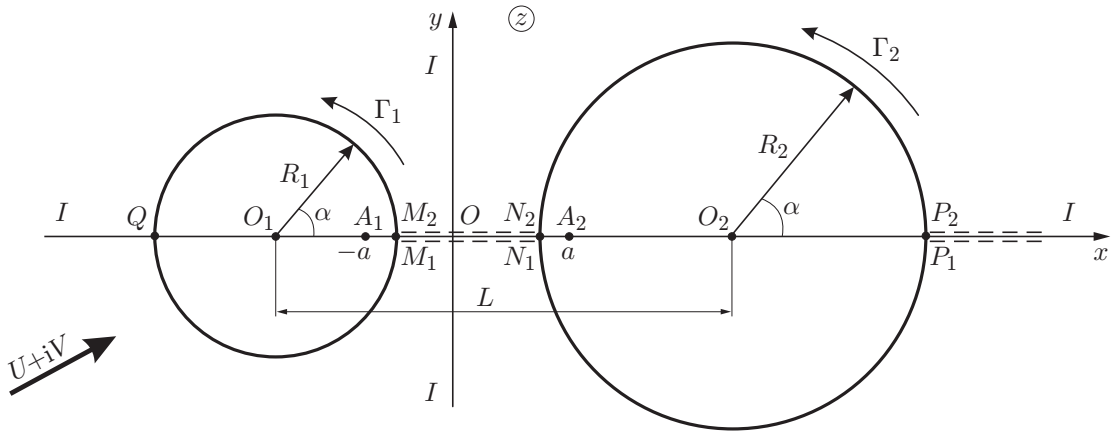
В случае если число круговых цилиндров больше двух, применяется метод отражения особенностей [14, 15], который также может быть использован в случае двух цилиндров. В [16. Гл. 6, пример 25] решение задачи об обтекании кругового цилиндра вблизи плоскости представлено в виде быстросходящегося ряда.

В настоящей работе с помощью метода, использовавшегося для решения задачи о циркуляционном обтекании цилиндра вблизи плоской стенки [17], получено простое аналитическое решение задачи об обтекании двух круговых цилиндров с заданными циркуляциями. Решение выражается через тета-функции Якоби, циркуляции вокруг цилиндров однозначно определяются с помощью минимаксного принципа Гольдштика [18]: циркуляции должны быть подобраны таким образом, чтобы максимальная скорость жидкости в потоке была минимальной. Следует отметить, что при $\Gamma_2 = 2\pi R_2$, $R_2 \rightarrow \infty$ аналитические формулы для потенциала и комплексно-сопряженной скорости, полученные в настоящей работе, переходят в соответствующие формулы из работы [17].

Аналогичные постановки краевых задач имеются в электростатике, магнитостатике, термодинамике, фильтрации и других физических теориях. При расчете электрического потенциала для двух заряженных цилиндрических проводников, помещенных в однородное электрическое поле, потенциалу электрического поля соответствует функция тока гидродинамического течения, а зарядам проводников — циркуляции. При расчете распределения температуры в окрестности двух цилиндров с заданными температурами этой температуре соответствует функция тока, а потокам тепла — циркуляции.

1. Постановка задачи. Рассмотрим две непересекающиеся окружности C_1 и C_2 с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 соответственно. Расстояние между центрами окружностей $L > R_1 + R_2$. Ось абсцисс проведем через центры окружностей в направлении от O_1 к O_2 (рис. 1). Внутри окружностей на отрезке O_1O_2 поместим две точки (A_1 и A_2) таким образом, чтобы A_1 была симметрична точке A_2 относительно окружности C_2 , а A_2 — точке A_1 относительно окружности C_1 (точки M , N , P лежат на берегах разрезов, проведенных в плоскости z , и обозначены соответственно M_k , N_k , P_k ($k = 1, 2$), I — бесконечно удаленные точки). Симметрия относительно окружности понимается в смысле преобразования инверсии. Введем обозначения $r_1 = A_1O_1$, $r_2 = A_2O_2$. Условие взаимной симметрии точек A_1 и A_2 имеет вид

$$\frac{R_1^2}{r_1} = L - r_2, \quad \frac{R_2^2}{r_2} = L - r_1. \quad (1.1)$$

Рис. 1. Схема течения в физической плоскости $z = x + iy$

Решая систему (1.1) относительно r_1 и r_2 , находим

$$r_1 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2 - \Delta}{2L}, \quad r_2 = \frac{L^2 - R_1^2 + R_2^2 - \Delta}{2L}, \quad (1.2)$$

где $\Delta = \sqrt{[L^2 - (R_1 - R_2)^2][L^2 - (R_1 + R_2)^2]}$.

Начало декартовой системы координат поместим в точку O посередине отрезка A_1A_2 , тогда координаты точек A_1 и A_2 будут равны $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно, где

$$a = \frac{1}{2}(L - r_1 - r_2) = \frac{\Delta}{2L}. \quad (1.3)$$

Пусть окружности C_1 и C_2 являются сечениями двух круговых цилиндров, обтекаемых потенциальным двумерным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Введем комплексную переменную $z = x + iy$, комплексный потенциал течения $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ и комплексно-сопряженную скорость

$$f(z) = \frac{dw}{dz} = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$$

(v_x, v_y — вертикальная и горизонтальная компоненты вектора скорости; i — мнимая единица). Для аналитической во внешней области окружностей C_1 и C_2 функции $f(z)$ поставим краевую задачу.

Обозначим через $x_1 = -a - r_1$ и $x_2 = a + r_2$ координаты центров O_1 и O_2 окружностей. В случае если $z \in C_k$, векторы $z - x_k$ направлены по нормали к окружностям C_k ($k = 1, 2$). Скалярное произведение двух векторов, записанных в комплексной форме, равно действительной части произведения одного вектора на вектор, комплексно-сопряженный другому вектору. Отсюда следует, что условия непротекания окружностей C_1 и C_2 имеют вид

$$\operatorname{Re} [(z - x_k)f(z)] = 0, \quad z \in C_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.4)$$

В предположении, что Γ_1, Γ_2 — заданные циркуляции вокруг C_1 и C_2 , функция $f(z)$ должна удовлетворять условиям

$$\oint_{C_k} f(z) dz = \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \quad (1.5)$$

где интегрирование проводится против часовой стрелки. Кроме того, на бесконечности должно выполняться условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = U - iV, \quad (1.6)$$

где $U + iV$ — заданный в комплексной форме вектор скорости набегающего потока.

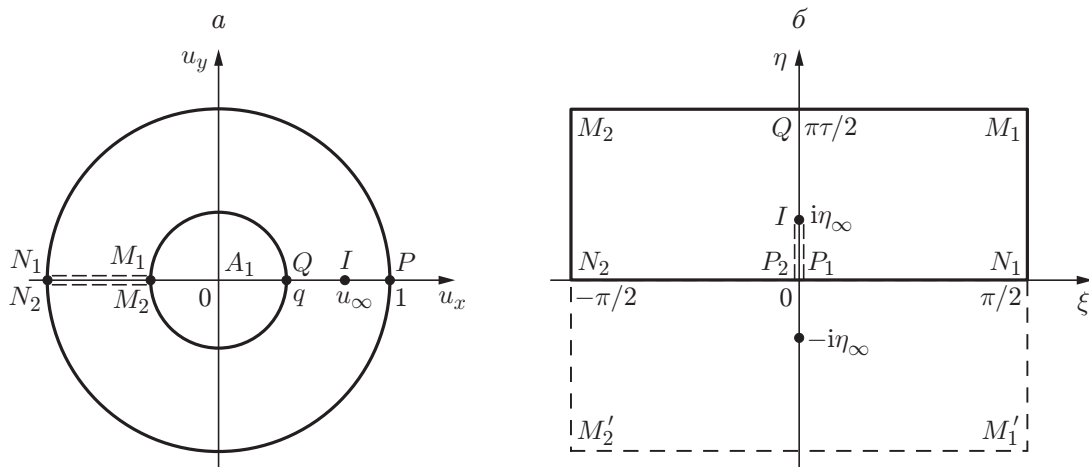


Рис. 2. Параметрические плоскости $u = u_x + iu_y$ (а) и $t = \xi + i\eta$ (б)

Соотношения (1.4)–(1.6) являются краевой задачей для определения аналитической во внешней области окружностей C_1 и C_2 функции $f(z)$. Краевые условия (1.4) представляют собой условия однородной задачи Гильберта [19]. Ниже построено точное аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) и доказано, что дополнительные соотношения (1.5), (1.6) обеспечивают единственность решения.

2. Точное аналитическое решение. Отобразим конформно внешнюю область окружностей на кольцо плоскости $u = u_x + iu_y$ таким образом, что окружность C_2 перейдет в окружность с единичным радиусом, окружность C_1 — в окружность с радиусом $q < 1$, а бесконечно удаленная точка I — в точку $u_\infty \in (q, 1)$ (рис. 2,а). Конформное отображение $u(z)$ и обратное ему $z(u)$ являются дробно-линейными функциями:

$$u(z) = u_\infty \frac{z + a}{z - a}, \quad z(u) = a \frac{u + u_\infty}{u - u_\infty}. \quad (2.1)$$

Дробно-линейные отображения переводят симметричные относительно окружностей точки в симметричные. Точки, симметричные бесконечно удаленной точке в плоскости z относительно окружностей C_1 и C_2 , будут точками O_1 и O_2 соответственно. Поэтому $u(x_1) = q^2/u_\infty$, $u(x_2) = 1/u_\infty$. Отсюда с помощью формул (1.1) находим

$$u_\infty = \frac{r_2}{R_2}, \quad q = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}.$$

Разрежем кольцо в плоскости u по отрезку $(-1, -q)$ и с помощью функции $t = (2i)^{-1} \ln u$ отобразим кольцо с разрезом на прямоугольник $N_2 N_1 M_1 M_2$ в плоскости $t = \xi + i\eta$ (рис. 2,б). Получаем

$$t = i\eta_\infty + \frac{1}{2i} \ln \frac{z + a}{z - a}, \quad \eta_\infty = -\frac{1}{2} \ln u_\infty, \quad z = -ai \operatorname{ctg}(t - i\eta_\infty), \quad (2.2)$$

где $i\eta_\infty$ — образ бесконечно удаленной точки I в физической плоскости z . При вычислении логарифма комплексного числа выбирается стандартная ветвь

$$\ln \zeta = \ln |\zeta| + i \arg \zeta, \quad -\pi < \arg \zeta \leq \pi. \quad (2.3)$$

Основание прямоугольника равно π , а высота — $\pi|\tau|/2$, где

$$\tau = -\frac{\ln q}{\pi} i \iff q = e^{-\pi|\tau|}. \quad (2.4)$$

В прямоугольнике $N_2 N_1 M_1 M_2$ рассмотрим функцию

$$w'(t) = f[z(t)]z'(t) = \frac{iaf[z(t)]}{\sin^2(t - i\eta_\infty)}.$$

Из (1.6) следует

$$\lim_{t \rightarrow i\eta_\infty} f[z(t)] = U - iV, \quad \lim_{t \rightarrow i\eta_\infty} w'(t)(t - i\eta_\infty)^2 = a(V + iU). \quad (2.5)$$

Кроме того, согласно теореме Коши из формул (1.5) находим

$$\oint_{i\eta_\infty} w'(t) dt = -\Gamma_1 - \Gamma_2, \quad (2.6)$$

где интеграл вычисляется по любому контуру в прямоугольнике, охватывающему точку $i\eta_\infty$. Интегрирование направлено против часовой стрелки.

Из формул (2.5), (2.6) следует, что главная часть разложения функции $w'(t)$ в ряд Лорана в окрестности точки $t = i\eta_\infty$ имеет вид

$$w'(t) = \frac{a(V + iU)}{(t - i\eta_\infty)^2} - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i (t - i\eta_\infty)} + O(1). \quad (2.7)$$

Функция $z(t)$, определенная последней формулой в (2.2), является π -периодической, поэтому $w'(t)$ также является π -периодической функцией. Кроме того, из граничных условий непротекания (1.4) следует

$$\operatorname{Im} w'(\xi) = 0, \quad \operatorname{Im} w'(\xi + \pi\tau/2) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Эти условия позволяют продолжить функцию $w'(t)$ на всю комплексную плоскость $t = \xi + i\eta$ в соответствии с принципом симметрии Римана — Шварца. При этом имеем

$$w'(t + \pi) = w'(t), \quad w'(t + \pi\tau) = w'(t).$$

Главная часть разложения функции $w'(t)$ в ряд Лорана в окрестности точки $t = -i\eta_\infty$ принимает вид

$$w'(t) = \frac{a(V - iU)}{(t + i\eta_\infty)^2} + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i (t + i\eta_\infty)} + O(1). \quad (2.9)$$

Таким образом, $w'(t)$ представляет собой эллиптическую функцию с периодами π и $\pi\tau$. В качестве ячейки периодов выберем прямоугольник с вершинами $-\pi/2 - \pi\tau/2$, $\pi/2 - \pi\tau/2$, $\pi/2 + \pi\tau/2$, $-\pi/2 + \pi\tau/2$. В ячейке периодов функция $w'(t)$ имеет полюсы второго порядка в точках $t = \pm i\eta_\infty$, а главные части разложений в ряд Лорана вблизи этих точек имеют вид соотношений (2.7), (2.9).

Функции $w'(t)$ и $w(t)$ построим с помощью тета-функций Якоби [20. Гл. 21]. Четыре тета-функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t, q) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n-1/2)^2} \sin(2n-1)t, & \vartheta_2(t, q) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} \cos(2n-1)t, \\ \vartheta_3(t, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nt, & \vartheta_4(t, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формул (2.10) следует, что при $q \ll 1$ эти функции являются быстросходящимися рядами. Тета-функции входят в ядро пакета Wolfram Mathematica [21], и их вычисление не представляет трудностей. Далее параметр q опускается и вместо $\vartheta_k(t, q)$ используется $\vartheta_k(t)$

($k = 1, 2, 3, 4$). Кроме того, как и в [20], будем считать, что запись тета-функции без аргумента означает, что он равен нулю, например $\vartheta_2 = \vartheta_2(0)$, $\vartheta'_1 = \vartheta'_1(0)$.

Введем функцию

$$F(t) = -\frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)}.$$

Эллиптическая функция определяется главными частями разложений в ряд Лорана вблизи полюсов с точностью до аддитивной постоянной [20. С. 350]:

$$\begin{aligned} w'(t) = a(V + iU)F'(t - i\eta_\infty) + a(V - iU)F'(t + i\eta_\infty) + \\ + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} [F(t - i\eta_\infty) - F(t + i\eta_\infty)] + A, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где постоянная A является действительной в силу граничных условий (2.8).

Нетрудно доказать справедливость равенств

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\xi \pm i\eta_\infty) d\xi = \pm \pi i, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\xi + \pi\tau/2 \pm i\eta_\infty) d\xi = \pi i,$$

из которых следует, что $A = \Gamma_1/\pi$. Путем интегрирования находим

$$\begin{aligned} w(z) &= Uw_1(z) + Vw_2(z) + \Gamma_1w_3(z) + \Gamma_2w_4(z), \\ w_1(z) &= ia[F(t - i\eta_\infty) - F(t + i\eta_\infty)], \quad w_2(z) = a[F(t - i\eta_\infty) + F(t + i\eta_\infty)] + D, \\ w_3(z) &= -\frac{1}{2\pi i} F_1(t) + \frac{t}{\pi}, \quad w_4(z) = -\frac{1}{2\pi i} F_1(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где функция t определяется первой формулой в (2.2),

$$D = 2a[1 + iF(i\eta_\infty + \pi\tau/2)], \quad F_1(t) = \ln \frac{\vartheta_1(t - i\eta_\infty)}{\vartheta_1(t + i\eta_\infty)}.$$

Комплексные потенциалы $w_k(z) = \varphi_k(x, y) + i\psi_k(x, y)$ ($k = \overline{1, 4}$) построены таким образом, что функции тока $\psi_k = 0$ на окружности C_2 , а потенциалы скорости φ_k обращаются в нуль в крайней левой точке Q окружности C'_1 : $\varphi_k = 0$ при $z = -a - r_1 - R_1$.

Для функции $F_1(t)$ также выбрана стандартная ветвь логарифма (2.3), что приводит к появлению дополнительного разреза по действительной оси в плоскости z , проведенного от крайней правой точки P окружности C_2 до бесконечности I (см. рис. 1). Разность значений потенциала φ на нижнем и верхнем берегах этого разреза равна $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Заметим, что разность значений потенциала φ на нижнем и верхнем берегах разреза, соединяющего точки M и N , равна Γ_1 .

Расход жидкости в пространстве между цилиндрами, движущейся в направлении оси ординат, находится по формуле $Q_f = \text{Im } w(\pi\tau/2)$, которая преобразуется к простому виду

$$Q_f = 2aV - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \ln \frac{r_1}{R_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{R_2}. \quad (2.13)$$

Следует отметить, что в выражение (2.13) параметры конформного отображения не входят, а входят лишь легко вычисляемые по формулам (1.2), (1.3) геометрические характеристики области течения r_1 , r_2 , a , определяемые путем нахождения взаимно симметричных точек двух окружностей. Эквивалентная (2.13) формула для Q_f , содержащая параметры отображения, была получена в [4].

Для комплексно-сопряженной скорости $f(z)$ формулы, аналогичные (2.12), имеют вид

$$f(z) = \frac{ia}{z^2 - a^2} [Uf_1(t) + Vf_2(t) + \Gamma_1 f_3(t) + \Gamma_2 f_4(t)],$$

$$f_1(t) = ia[F'(t - i\eta_\infty) - F'(t + i\eta_\infty)], \quad f_2(t) = a[F'(t - i\eta_\infty) + F'(t + i\eta_\infty)], \quad (2.14)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2\pi i} [F(t - i\eta_\infty) - F(t + i\eta_\infty)] + \frac{1}{\pi}, \quad f_4(t) = \frac{1}{2\pi i} [F(t - i\eta_\infty) - F(t + i\eta_\infty)],$$

где t , как и в (2.12), определяется из первой формулы в (2.2) и используется равенство $\sin^2(t - i\eta_\infty) = a^2/(a^2 - z^2)$, также вытекающее из (2.2).

В работе [17] получена эффективная с точки зрения вычислений формула для определения $F'(t)$, не содержащая производных от тета-функций:

$$F'(t) = \left(\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_3} \right)^2 \left[\frac{\vartheta_3(t)}{\vartheta_1(t)} \right]^2 - \frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3}.$$

3. Линии тока, эквипотенциали и распределения скоростей на окружностях для комплексных потенциалов $w_k(z)$, $k = \overline{1, 4}$. Из формул (2.12) следует, что комплексный потенциал обтекания двух цилиндров представляет собой линейную комбинацию четырех комплексных потенциалов $w_k(z)$, $k = \overline{1, 4}$. Потенциал $w_1(z)$ определяет бесциркуляционное обтекание двух цилиндров горизонтальным потоком ($U = 1$, $V = \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$), потенциал $w_2(z)$ — бесциркуляционное обтекание вертикальным потоком ($V = 1$, $U = \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$), потенциалы $w_3(z)$, $w_4(z)$ определяют чисто циркуляционное обтекание каждого цилиндра с единичной циркуляцией: $\Gamma_1 = 1$, $U = V = \Gamma_2 = 0$ и $\Gamma_2 = 1$, $U = V = \Gamma_1 = 0$.

Обозначим через α полярные углы точек на окружностях C_1 и C_2 , отсчитываемые от оси Ox против часовой стрелки (см. рис. 1). Тогда $ie^{i\alpha}$ являются единичными векторами касательной к окружностям. Распределения скоростей по окружностям C_1 и C_2 соответственно имеют вид

$$v_k(\alpha) = ie^{i\alpha} f(x_k + R_k e^{i\alpha}), \quad x_k = (-1)^k(a + r_k), \quad k = 1, 2. \quad (3.1)$$

Скорость, определенная соотношениями (3.1), является положительной, если ее направление совпадает с направлением увеличения угла α (так же, как $ie^{i\alpha}$), и отрицательной в противоположном случае.

С помощью формул (2.14) распределение скоростей по окружностям можно представить в виде

$$v_k(\alpha) = Uv_{k,1}(\alpha) + Vv_{k,2}(\alpha) + \Gamma_1 v_{k,3}(\alpha) + \Gamma_2 v_{k,4}(\alpha), \quad k = 1, 2, \quad (3.2)$$

где

$$v_{k,j}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} ia}{(x_k + R_k e^{i\alpha})^2 - a^2} f_j \left[\frac{1}{2i} \ln \frac{x_k + R_k e^{i\alpha} + a}{x_k + R_k e^{i\alpha} - a} \right], \quad k = 1, 2, \quad j = \overline{1, 4},$$

причем все функции $v_{k,j}(\alpha)$ являются действительными.

На рис. 3, *a, в, д, ж* показаны линии тока и эквипотенциали для течений с комплексными потенциалами $w_k(z)$ ($k = \overline{1, 4}$), на рис. 3, *б, г, е, з* — распределения скоростей по окружностям для этих течений.

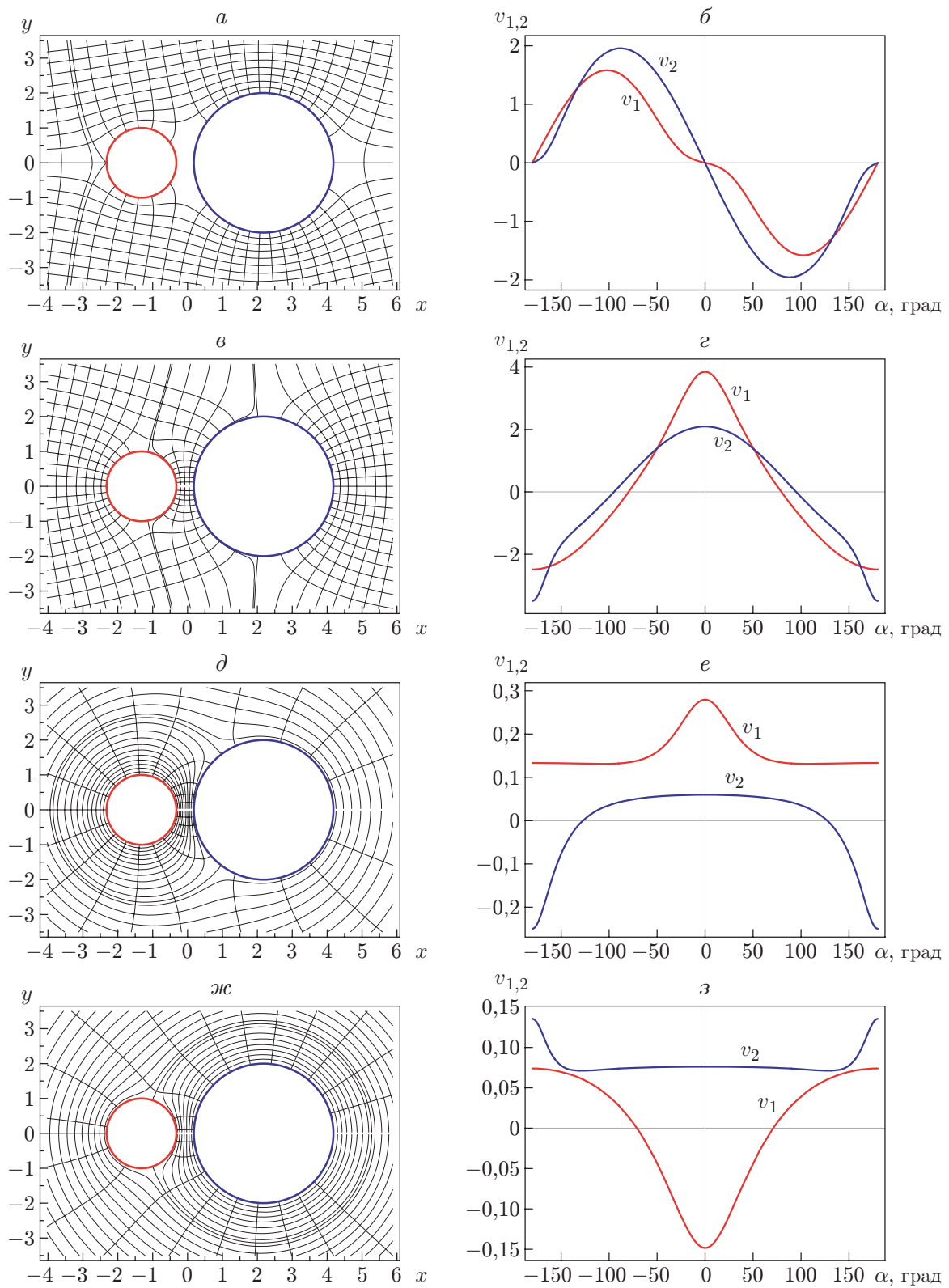


Рис. 3. Линии тока и эквипотенциалы (а, в, д, ж) и распределения скоростей (б, з, е, з) для течений с потенциалами $w_k(z)$, $k = \overline{1, 4}$ при $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $L = 3, 5$:
а, б — $k = 1$, в, з — $k = 2$, д, е — $k = 3$, ж, з — $k = 4$

4. Определение циркуляций с помощью минимаксного принципа Гольдштика. Для случая обтекания гладкого контура авторы работы [18] сформулировали принцип: циркуляция должна быть выбрана таким образом, чтобы максимальная скорость на контуре была минимальной. Этот принцип естественным образом обобщает гипотезу Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке аэропрофиля. Поскольку в случае потенциальных течений максимальная скорость достигается на границе контура, принцип можно переформулировать: циркуляция выбирается таким образом, что максимальная скорость в потоке будет минимальной. Используем принцип в такой форме для поиска циркуляций в случае обтекания двух окружностей.

Обозначим через v_∞ и α_{at} соответственно модуль вектора скорости набегающего потока и угол атаки для системы двух окружностей. Тогда $U = v_\infty \cos \alpha_{at}$, $V = v_\infty \sin \alpha_{at}$. Зададим значения R_1 , R_2 , L , v_∞ , α_{at} . Тогда распределения скоростей на окружностях C_1 и C_2 принимают вид

$$v_k(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2) = v_\infty [\cos \alpha_{at} v_{k,1}(\alpha) + \sin \alpha_{at} v_{k,2}(\alpha)] + \Gamma_1 v_{k,3}(\alpha) + \Gamma_2 v_{k,4}(\alpha), \quad k = 1, 2.$$

Функции $v_k(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2)$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v_{1\min}(\Gamma_1, \Gamma_2) &= \min_{\alpha \in [0, 2\pi]} v_1(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2), & v_{1\max}(\Gamma_1, \Gamma_2) &= \max_{\alpha \in [0, 2\pi]} v_1(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2), \\ v_{2\min}(\Gamma_1, \Gamma_2) &= \min_{\alpha \in [0, 2\pi]} v_2(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2), & v_{2\max}(\Gamma_1, \Gamma_2) &= \max_{\alpha \in [0, 2\pi]} v_2(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2). \end{aligned}$$

Для выполнения принципа Гольдштика необходимо найти минимум функции двух переменных

$$v_{\max}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{k=1,2} \max [|v_{k\max}(\Gamma_1, \Gamma_2)|, |v_{k\min}(\Gamma_1, \Gamma_2)|],$$

где $v_{\max}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ — максимум модуля вектора скорости в потоке при заданных циркуляциях.

Минимум нелинейной функции $v_{\max}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ определялся численно, с помощью программы глобальной минимизации NMinimize пакета Wolfram Mathematica [21]. При этом функция $v_{\max}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ строилась следующим образом. На интервал $[0, 2\pi]$ равномерно наносились точки $\alpha_j = 2\pi(j-1)/N$, $j = \overline{1, N}$ и в этих точках вычислялись значения функций $v_k(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2)$. Далее определялись максимумы и минимумы соответствующих массивов. Все вычисления проводились при $N = 1001$.

В работе [17] решена задача об обтекании цилиндра вблизи плоской стенки, при этом циркуляция вокруг цилиндра также определялась из условия минимума максимальной скорости на поверхности цилиндра. Получена точная аналитическая формула для определения этой циркуляции. Задача об обтекании цилиндра вблизи стенки является частным случаем задачи о двух цилиндрах. В силу симметрии достаточно положить $R_1 = R_2$, $\alpha_{at} = \pi/2$, $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$. Тогда путем численной минимизации функции $v_{\max}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ получаем $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$, а найденное значение Γ совпадает с точными значениями, полученными в работе [17].

Обозначим через H расстояние между окружностями C_1 и C_2 . Тогда $L = R_1 + R_2 + H$. Все расчеты выполнены при $R_1 = v_\infty = 1$, т. е. найденные значения циркуляций отнесены к произведению $v_\infty R_1$. При проведении расчетов параметр H изменялся от 0,02 до 2,00 с шагом 0,02, угол атаки θ — от 5 до 90° с шагом 5°, радиус R_2 — от 0,25 до 4,00 с шагом 0,25. Таким образом, общее количество численных экспериментов равно $100 \times 18 \times 16 = 28\,800$. Некоторые результаты представлены на рис. 4, 5.

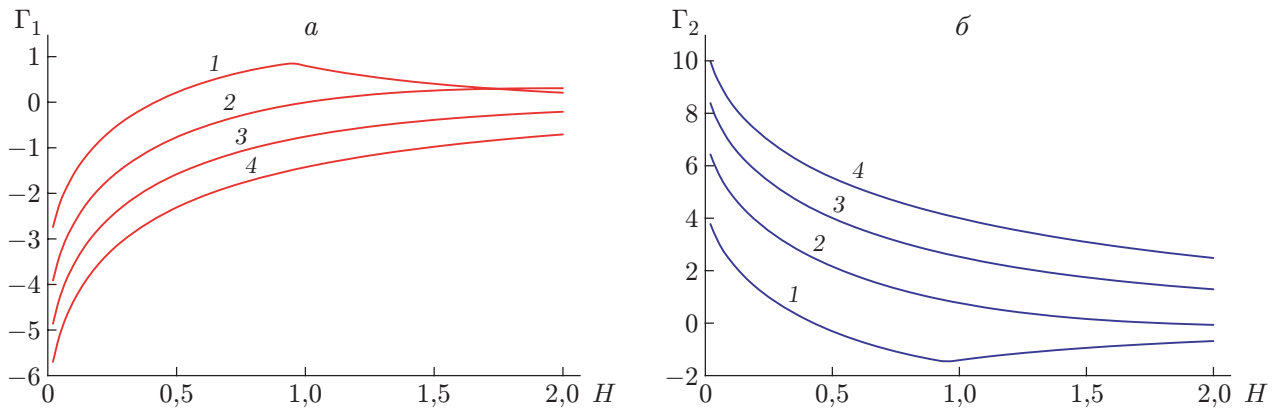


Рис. 4. Циркуляции Γ_1 (а) и Γ_2 (б), определенные с помощью минимаксного принципа как функции расстояния H между окружностями ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$) при различных значениях угла атаки:

1 — $\alpha_{at} = 30^\circ$, 2 — $\alpha_{at} = 45^\circ$, 3 — $\alpha_{at} = 60^\circ$, 4 — $\alpha_{at} = 90^\circ$

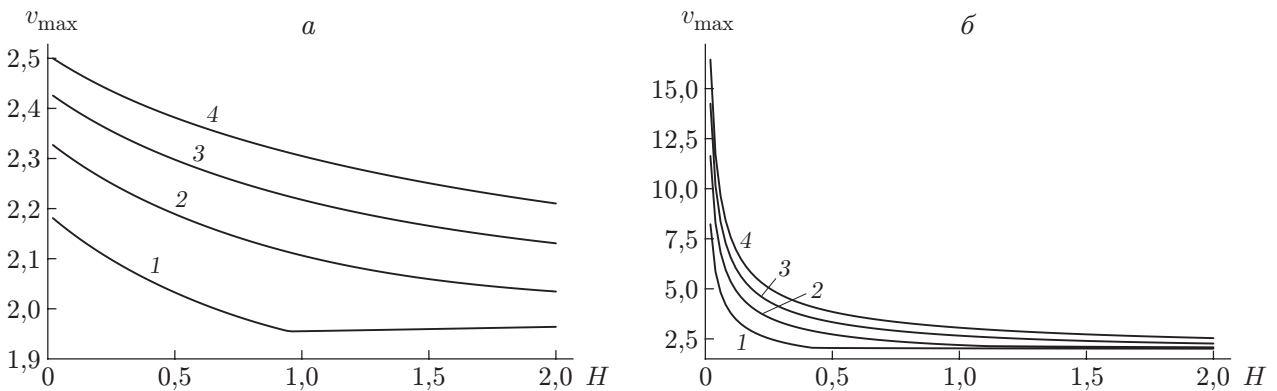


Рис. 5. Зависимость максимальной скорости $v_{\max}$ от расстояния H между окружностями при различных значениях угла атаки:

а — $\Gamma_1 = \Gamma_1(H)$, $\Gamma_2 = \Gamma_2(H)$, б — $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ (бесциркуляционное обтекание цилиндров); 1 — $\alpha_{at} = 30^\circ$, 2 — $\alpha_{at} = 45^\circ$, 3 — $\alpha_{at} = 60^\circ$, 4 — $\alpha_{at} = 90^\circ$

На рис. 4 приведены функции $\Gamma_1(H)$ и $\Gamma_2(H)$, найденные в результате минимизации $v_{\max}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, на рис. 5, а — значения максимальных скоростей при $\Gamma_1 = \Gamma_1(H)$, $\Gamma_2 = \Gamma_2(H)$. Для сравнения на рис. 5, б показаны значения максимальных скоростей при бесциркуляционном обтекании цилиндров. Видно, что путем выбора циркуляций максимальную скорость в потоке можно уменьшить в несколько раз, особенно при малых расстояниях между цилиндрами. Также на рис. 5, а видно, что минимальное значение максимальной скорости в потоке не превышает $2,5v_\infty$.

Анализ результатов проведенных численных экспериментов позволяет сделать следующие выводы.

1. Если $R_1 = R_2$, то при любом значении угла атаки α_{at} имеем

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2, \quad v_{1 \min} = -v_{1 \max} = v_{2 \min} = -v_{2 \max}. \quad (4.1)$$

2. Если $\alpha_{at} \geq 5^\circ$, $R_1 \neq R_2$, то максимальные скорости на окружностях C_1 и C_2 равны:

$$\max[|v_{1 \min}|, |v_{1 \max}|] = \max[|v_{2 \min}|, |v_{2 \max}|] \quad (4.2)$$

Таблица 1

Значения циркуляций, минимальных и максимальных скоростей на окружностях при $R_1 = R_2 = 1$, $H = 0,1$ и различных значениях угла атаки

α_{at} , град	$v_{1 \min}$	$v_{1 \max}$	$v_{2 \min}$	$v_{2 \max}$	Γ_1	Γ_2
5	-1,835 05	1,835 05	-1,835 05	1,835 05	1,243 96	-1,243 96
15	-1,983 04	1,983 04	-1,983 04	1,983 04	0,292 67	-0,292 67
30	-2,159 38	2,159 38	-2,159 38	2,159 38	-1,074 85	1,074 85
45	-2,285 06	2,285 06	-2,285 06	2,285 06	-2,274 43	2,274 43
60	-2,367 48	2,367 48	-2,367 48	2,367 48	-3,208 66	3,208 66
75	-2,413 75	2,413 75	-2,413 75	2,413 75	-3,801 37	3,801 37
90	-2,428 63	2,428 63	-2,428 63	2,428 63	-4,004 43	4,004 43

Таблица 2

Значения циркуляций, минимальных и максимальных скоростей на окружностях при $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ и различных значениях угла атаки α_{at} и расстояния H

α_{at} , град	$v_{1 \min}$	$v_{1 \max}$	$v_{2 \min}$	$v_{2 \max}$	Γ_1	Γ_2
$H = 0,1$						
30	-2,148 93	2,148 93	-2,097 77	2,148 93	-1,578 81	2,360 38
45	-2,297 51	2,297 51	-2,242 81	2,297 51	-2,673 77	4,944 21
60	-2,398 56	2,398 56	-2,341 46	2,398 56	-3,570 11	6,859 55
90	-2,475 15	2,475 14	-2,416 22	2,475 15	-4,365 01	8,425 76
$H = 1,1$						
30	-1,956 020	1,849 100	-1,956 02	1,956 02	0,692 803 0	-1,289 610
45	-2,094 610	2,094 610	-1,847 54	2,094 61	0,074 088 6	0,598 547
60	-2,205 470	2,205 470	-1,944 92	2,205 47	-0,657 734 0	2,333 700
90	-2,292 790	2,292 790	-2,023 62	2,292 79	-1,314 380 0	3,785 760

и на одной из окружностей C_1 или C_2 обязательно выполняется условие

$$v_{k \min} + v_{k \max} = 0, \quad k = 1 \quad \text{или} \quad k = 2, \quad (4.3)$$

т. е. на одной из окружностей максимальное положительное значение скорости равно минимальному отрицательному, взятому с обратным знаком (табл. 1, 2).

На рис. 6 показаны распределения скоростей по окружностям при $H = 0,1$, $R_1 = R_2 = 1$ и различных значениях угла атаки α_{at} . Следует отметить, что, несмотря на “симметричную” закономерность (4.1), функции $v_1(\alpha)$, $v_2(\alpha)$ не являются симметричными, за исключением случая $\alpha_{at} = \pi/2$.

Данные табл. 2 позволяют объяснить наличие точки разрыва производной на кривых 1 на рис. 4, 5, а, построенных при $\alpha_{at} = 30^\circ$. Действительно, при $\alpha_{at} = 30^\circ$ и $H = 0,1$ условие (4.3) выполняется на окружности C_1 ($k = 1$), а при том же угле атаки и $H = 1,1$ это условие выполняется на окружности C_2 ($k = 2$). Этот скачкообразный переход в (4.3) с левой окружности на правую при некотором значении H приводит к разрыву производной для кривой 1. Расчеты показывают, что переход происходит при $H = 0,950\,208$, при этом значении H условие (4.3) выполняется на обеих окружностях. Поскольку закономерность (4.2) всегда справедлива, при указанном значении H получаем $v_{1 \max} = -v_{1 \min} = v_{2 \max} = -v_{2 \min} = 1,954\,82$, $\Gamma_1 = 0,860\,182$, $\Gamma_2 = -1,479\,51$.

Результаты дополнительных численных экспериментов, проведенных при $\alpha_{at} < 5^\circ$, показывают, что выражения (4.1), сформулированные для случая $R_1 = R_2$, справедливы при любых углах атаки и в случае $\alpha_{at} = 0$ $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. Однако при $\alpha_{at} < 5^\circ$, $R_1 \neq R_2$

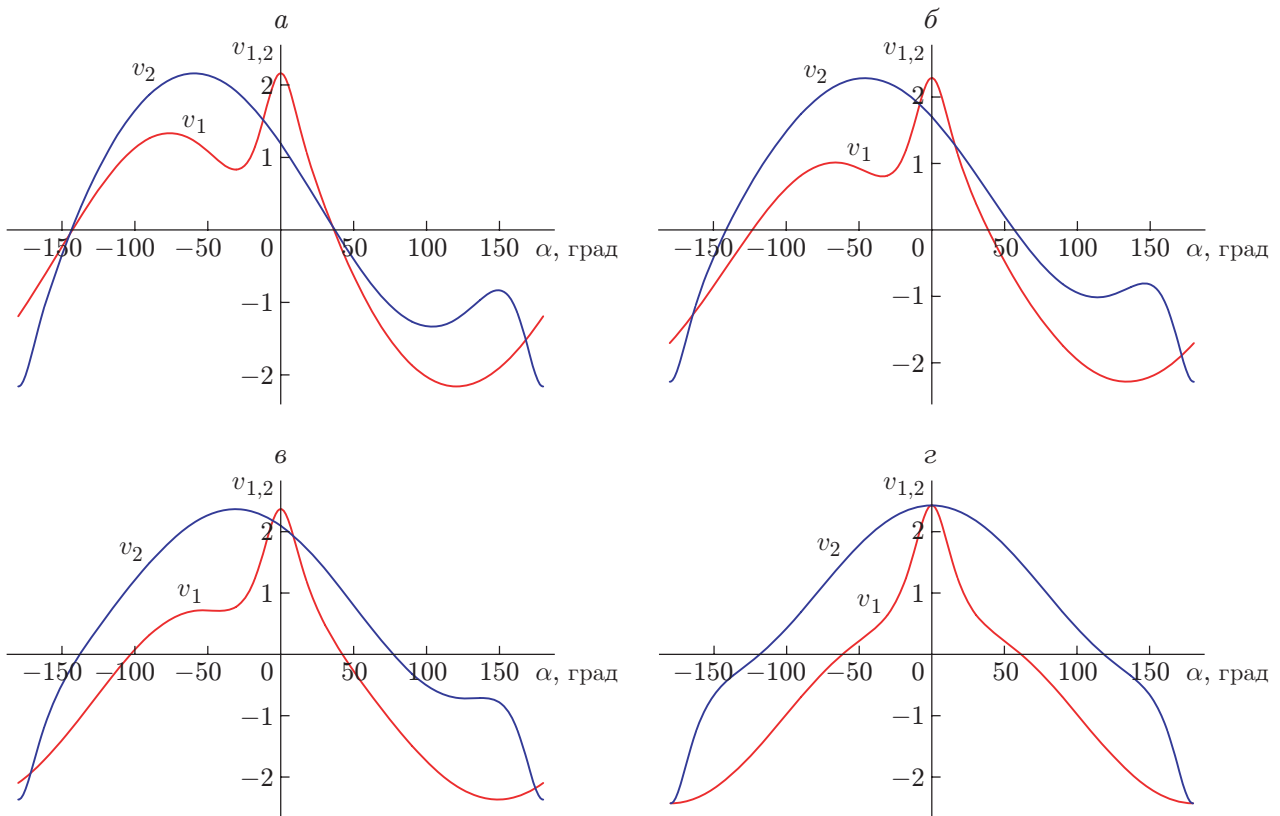


Рис. 6. Распределение скоростей по окружностям C_1 и C_2 при $R_1 = R_2 = 1$, $H = 0,1$ и различных значениях угла атаки:
 а — $\alpha_{at} = 30^\circ$, б — $\alpha_{at} = 45^\circ$, в — $\alpha_{at} = 60^\circ$, г — $\alpha_{at} = 90^\circ$

выражения (4.2), (4.3) становятся неверными, но при $\alpha_{at} = 0$ с увеличением числа точек N массива полярных углов $\alpha_j = 2\pi(j-1)/N$ ($j = \overline{1, N}$), в которых вычислялись значения функций $v_k(\alpha, \Gamma_1, \Gamma_2)$, наблюдается тенденция $\Gamma_1 \rightarrow 0$, $\Gamma_2 \rightarrow 0$.

5. Парадокс бесконечного радиуса. В работе [17] решена задача об обтекании цилиндра вблизи плоской стенки и для расхода Q_w жидкости между цилиндром и стенкой получена следующая формула:

$$Q_w = Va - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{H + R - a}{R}. \quad (5.1)$$

Здесь V — скорость набегающего потока; R — радиус цилиндра; H — расстояние от цилиндра до стенки,

$$a = \sqrt{H(H + 2R)}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим два цилиндра с одинаковыми радиусами $R_1 = R_2 = R$, находящихся на расстоянии $2H$ друг от друга и обтекаемых на бесконечности со скоростью iV при равных, но противоположных по знаку циркуляциях $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$. Тогда $L = 2(R + H)$ и с помощью формул (1.2), (1.3), (2.13) получаем $Q_f = 2Q_w$. В силу симметрии рассматриваемого течения относительно оси ординат этот результат подтверждает корректность формул (2.13) и (5.1).

Зададим расстояние H между цилиндрами, а также радиус левого цилиндра и циркуляцию вокруг него, положив $R_1 = R$, $\Gamma_1 = \Gamma$. Тогда $L = R_1 + R_2 + H$. Циркуляция Γ_2 вокруг правого цилиндра и скорость на бесконечности iV являются произвольными фиксированными величинами. Будем полагать, что радиус правого цилиндра R_2 стремится

к бесконечности. Получаем, что величина a стремится к значению, определяемому формулой (5.2), $r_2/R_2 \rightarrow 1$,

$$Q_f = 2Va - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{H + R - a}{R}. \quad (5.3)$$

Сравнивая формулы (5.1) и (5.3), можно сделать вывод, что в результате предельного перехода $R_2 \rightarrow \infty$ от окружности к прямой слагаемое, пропорциональное скорости набегающего потока, увеличилось в два раза. Этот парадокс объясняется следующим образом. При $R_2 \rightarrow \infty$ часть окружности C_2 вблизи точки N стремится к вертикальной прямой. Поскольку окружность C_2 обтекается со скоростью V на бесконечности, скорость вблизи точки N стремится к $2V$. Вследствие этого получаем формулу (5.3). Для того чтобы этого избежать, необходимо на окружность C_2 наложить циркуляцию $\Gamma_2 = 2\pi R_2$, т. е. такую циркуляцию, при которой скорость в точке N при обтекании окружности C_2 равна V , а не $2V$. Это подтверждается соотношением

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} R_2 \ln \frac{r_2}{R_2} = -\sqrt{H(H + 2R_1)}.$$

Следует отметить, что при $\Gamma_2 = 2\pi R_2$, $R_2 \rightarrow \infty$ аналитические формулы для потенциала и комплексно-сопряженной скорости, полученные в настоящей работе, переходят в соответствующие формулы, приведенные в работе [17].

6. Обсуждение результатов. Как известно, круговые цилиндры являются плохо обтекаемыми телами. Безотрывное обтекание возможно лишь при внезапном приведении цилиндров в движение на небольшом начальном отрезке времени (см. рис. 5.11.3 в [22]). При установившемся обтекании давление на круговом цилиндре не совпадает с расчетным значением, полученным по модели потенциального обтекания. Отличие показано на рис. 5.11.5 в работе [22], где представлена зависимость от угла θ теоретического коэффициента давления $c_p = 1 - v^2/U^2$ ($v = 2U \sin \theta$), рассчитанного по модели потенциального обтекания при нулевой циркуляции, а также экспериментальные распределения коэффициента давления при различных значениях числа Рейнольдса $Re = 2aU/\nu$. Угол θ отсчитывался от критической точки. Значениям числа Рейнольдса $Re = 1,1 \cdot 10^5$, $8,4 \cdot 10^6$, $6,7 \cdot 10^5$ соответствовали угловые значения точек отрыва 80° , 105° , 120° . Чем дальше точка отрыва, тем больше диапазон значений угла θ , в котором теоретическая кривая приближается экспериментальные точки. Заметим, что нулевая циркуляция соответствует принципу Гольдштика. При других значениях циркуляции теоретическое давление отличается от полученного в эксперименте еще существеннее.

Очевидно, такое поведение будет наблюдаться и в случае обтекания двух цилиндров. При выборе циркуляций по принципу Гольдштика распределение давлений на цилиндре, видимо, будет лучше соответствовать экспериментальному. В работе [17] показано, что в случае обтекания кругового цилиндра вблизи плоскости выбор циркуляции в соответствии с постулатом Гольдштика приводит к наилучшему согласованию распределения давления на наветренной поверхности цилиндра с экспериментальными данными.

Используя найденное распределение скорости на цилиндре, точки отрыва можно приближенно находить с помощью простых аналитических методов Кочина, Лойцянского, Бам-Зеликовича и др. [23, 24]. В отрывной области давление близко к постоянному значению (см. рис. 5.11.5 в [22]). Поэтому полученное решение сложной многопараметрической задачи имеет большое значение даже в случае, когда безотрывное течение не реализуется на практике. Исследование отрывного обтекания двух цилиндров для полных уравнений Навье — Стокса возможно лишь с использованием численных методов. При этом для одной заданной геометрии расчеты требуется проводить при различных значениях числа Рейнольдса и по разным схемам для ламинарного и турбулентного режимов.

Полученные результаты можно применить к электростатической задаче определения напряженности электрического поля для двух цилиндрических проводников, помещенных в однородное электростатическое поле. В этой задаче отсутствует проблема отрыва, которая в гидродинамике возникает вследствие вязкости, существующей в реальной жидкости. Линии тока, показанные на рис. 3, *a, в, д, ж*, в электростатике являются эквипотенциальными линиями. Распределениям скоростей v_1 и v_2 на поверхностях цилиндров соответствуют распределения напряженности электрического поля на поверхностях проводников. Векторы напряженности на проводниках направлены по нормали к поверхности. Выводы 1, 2, сформулированные в п. 4, в электростатике означают, что за счет выбора зарядов на проводниках можно свести к минимуму значения напряженности на их поверхностях и тем самым уменьшить порог пробоя диэлектрика между проводниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hicks W. M.** On the motion of two cylinders in a fluid // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1879. V. 16. P. 113–140, 193–219.
2. **Greenhill A. G.** Functional images in cartesians // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1882. V. 18. P. 356–362.
3. **Basset A. B.** *Treatise on hydrodynamics.* Cambridge: Deighton, Bell and Co, 1888.
4. **Lagally M.** Die Strömung im Aussengebiet zweier Kreise // *Z. angew. Math. Mech.* 1929. Bd 9. S. 299–305.
5. **Мазур В. Ю.** Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1966. № 3. С. 75–79.
6. **Burton D. A., Gratus J., Tucker R. W.** Hydrodynamic forces on two moving discs // *Theoret. Appl. Mech.* 2004. V. 31. P. 153–187.
7. **Wang Q. X.** Interaction of two circular cylinders in inviscid fluid // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16, N 12. P. 4412–4425.
8. **Alassar R. S., El-Gebeily M. A.** Inviscid flow past two cylinders // *Trans. ASME. J. Fluids Engng.* 2009. V. 131. 054501.
9. **Crowdy D. G., Surana A., Yick K.-Y.** The irrotational motion generated by two planar stirrers in inviscid fluid // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. 018103.
10. **Tchieu A. A., Crowdy D., Leonard A.** Fluid-structure interaction of two bodies in an inviscid fluid // *Phys. Fluids.* 2010. V. 22. 107101.
11. **Седов Л. И.** *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.* М.: Физматлит, 1980.
12. **Johnson E. R., McDonald N. R.** The motion of a vortex near two circular cylinders // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 2004. V. 460. P. 939–954.
13. **Vasconcelos G. L., Moura M.** Vortex motion around a circular cylinder above a plane // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29. 083603.
14. **Dalton C., Helfinstine R. A.** Potential flow past a group of circular cylinders // *Trans. ASME. J. Fluids Engng.* 1971. V. 93, N 4. P. 636–642.
15. **Crowdy D. G.** Analytical solution for uniform potential flow past multiple cylinders // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2006. V. 25. P. 459–470.
16. **Милн-Томсон Л. М.** *Теоретическая гидродинамика.* М.: Мир, 1964.
17. **Петров А. Г., Маклаков Д. В.** Об определении циркуляции вокруг цилиндра, обтекаемого вблизи плоскости // *Прикл. математика и механика.* 2022. Т. 3. С. 351–363.
18. **Гольдштик М. А., Ханин В. М.** Взаимодействие цилиндра со свободной поверхностью и струей // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1977. № 5. С. 50–58.

19. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
20. **Уиттекер Э. Т.** Курс современного анализа. Ч. 2 / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. М.: Физматгиз, 1963.
21. **Wolfram S.** The mathematica book. 5th ed. N. Y.: Wolfram Media, 2003.
22. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
23. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
24. **Елизаров А. М.** Задачи оптимизации формы в аэродинамике / А. М. Елизаров, А. Р. Касимов, Д. В. Маклаков. М.: Физматлит, 2009.

*Поступила в редакцию 18/X 2022 г.,
после доработки — 18/X 2022 г.
Принята к публикации 28/XI 2022 г.*
