УДК 531.36 : 534.1

О ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПАНЕЛИ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

К. С. Матвийчук

(Киев)

Проблема колебаний панелей, представляющих широко распространенный конструктивный элемент, имеет важное практическое значение в механике и технике. Как известно, в сверхзвуковой области могут развиваться такие колебания панелей, которые вызывают неустойчивость конструкций. К причинам, обусловливающим колебания панелей, следует отнести прежде всего аэродинамические силы, возникающие в результате движения. Проблеме панельного флаттера, т. е. взаимодействию аэродинамических сил и движений панели, посвящены работы [1—16]. Так как эта проблема слишком сложна, то во многих исследованиях обычно делаются упрощающие предположения и свойства устойчивости в задачах о панельном флаттере изучаются на основе применения различных методов непосредственного интегрирования. Одним из эффективных методов аналитического изучения устойчивости в задачах о панельном флаттере явился прямой метод Ляпунова [8—17].

В настоящей работе получены достаточные условия технической устойчивости (ТУ) [17—24] движения двумерной панели, находящейся в сверхзвуковом потоке. Основные результаты найдены на основе метода сравнения [22—24] в комбинации со вторым методом Ляпунова [17, 21]. Согласно [8—14], процесс движения рассматриваемой системы описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных, получающимся на основе поршневой теории. Нагрузка, приложенная к панели вдоль ее краев, не зависит от времени. Область ТУ связана через посредство числа Маха с условиями положительной определенности функционала Ляпунова, малым положительным параметром и условиями регулярности решения соответствующей скалярной задачи Коши сравнения. Исследованы ТУ процесса на конечном и бесконечном промежутках времени и асимптотическая ТУ.

Достаточные условия устойчивости по Ляпунову аналогичной системы найдены в [9—16]. Результаты настоящей работы существенно отличаются от свойств устойчивости в смысле Ляпунова, указанных в [9—16], не только тем, что условия ТУ рассматриваемой системы изучаются на любом конечном и наперед заданном промежутке времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния системы не зависят от условий мажорации последующих состояний процесса в течение заданного промежутка времени. При выполнении определенных условий найденная здесь область для значений числа Маха включает аналогичные области в [12—16]. Указаны условия, при которых для исходного процесса возможна техническая неустойчивость. Предложенный в настоящей работе подход, основанный на методе сравнения в сочетании со вторым методом Ляпунова, может быть применен для исследования свойств ТУ в более сложных задачах о панельном флаттере, без упрощающих предположений, например в нелинейных задачах о панельном флаттере, в таких же задачах при наличии параметрических нагружений в случае искривленных панелей с различными способами граничных закреплений, цилиндрических, конических или усеченных конических панелей, а также в задачах о колебаниях панелей, обусловленных либо аэродинамическим шумом, либо бафтингом. При этом отсутствие условий отрицательной определенности полной производной функционала Ляпунова в силу исходной краевой задачи в этом подходе в отличие от устойчивости в смысле Ляпунова расширяет возможности для условий на параметры динамического процесса.

1. Постановка задачи и условия на функционал Ляпунова. Рассмотрим динамическое поведение двумерной панели в сверхзвуковом потоке. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: a_∞ — скорость звука в невозмущенном потоке; c — длина хорды панели; $d = D/\rho c^3 a_\infty$ — параметр изгибной жесткости; $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — изгибная жесткость; ρ — плотность невозмущенного воздуха; E — модуль Юнга; $f = F/\rho c a_\infty^2$ — параметр напряжения; F — внешнее усилие вдоль хорды, отнесенное к единице ширины панели (положительное — для растяжения, отрицательное — для сжатия); M — число Маха набегающего потока; h — толщина панели; m — масса единицы площади панели; $t = Ta_\infty/c$ — безразмерное время; T — время; U — скорость сверхзвукового воздушного потока; X — расстояние вдоль хорды панели; $x = X/c$ — безразмерное расстояние; $Z(X, T)$— смещение панели; $\mu = m/\rho c$ — отношение массы панели и массы воздуха; ν — коэффициент Пуассона.

Движение панели, находящейся в сверхзвуковом потоке и подвергающейся действию нагрузки F, приложенной вдоль свободно опертых краев панели, описывается краевой задачей в безразмерной форме

$$d\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - f\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0; \tag{1.1}$$

$$z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, t) = 0; \tag{1.2}$$

$$z(x, t)\big|_{t=t_0} = u_0(x), \quad \frac{\partial z(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = u_1(t), \tag{1.3}$$

где $z = Z/c$; $x \in [0, 1]$; $t \in K \subset I = [t_0, +\infty)$; K — конечный промежуток времени; $t_0 \geqslant 0$; $u_0(x)$, $u_1(x)$— начальные распределения смещений и скоростей панели, удовлетворяющие по предположению условиям, обеспечивающим однозначное решение краевой задачи (1.1)—(1.3) в классе непрерывных функций по x, t, имеющие непрерывные производные по x, t необходимых порядков [25]. Коэффициенты d, μ, M положительные, коэффициент f может быть положительным или отрицательным.

Ставится задача — исследовать техническую устойчивость движения двумерной панели в сверхзвуковом потоке, описываемого краевой задачей (1.1)—(1.3). Рассмотрим функционал Ляпунова

$$V[z, t] = \int_0^1 dx\left[\mu\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + f\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \mathrm{M}\left(z^2 + 2\mu z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]. \tag{1.4}$$

Используем неравенства [4, 10, 12—16]

$$\int_0^1 dx\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)^2 \geqslant \pi^2\int_0^1 dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 \geqslant \pi^4\int_0^1 dx\,(\Phi)^2, \tag{1.5}$$

где непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. При $f + \pi^2 d \geqslant 0$ функционал V имеет оценку снизу:

$$V[z, t] \geqslant \int_0^1\left[z^2(\mathrm{M} + \pi^2 f + \pi^4 d) + 2\mathrm{M}\mu z\frac{\partial z}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right]dx. \tag{1.6}$$

Квадратичная форма в (1.6) относительно z, $\partial z/\partial t$ положительно определена, если выполняются условия

$$\mathrm{M} + \pi^2 f + \pi^4 d > 0, \quad \mu(\mathrm{M} + \pi^2 f + \pi^4 d) > \mathrm{M}^2\mu^2. \tag{1.7}$$

Первое неравенство в (1.7) следует из второго. Поэтому условием положительной определенности для (1.4) будет

$$\mu(\mathrm{M} + \pi^2 f + \pi^4 d) - \mathrm{M}^2\mu^2 > 0. \tag{1.8}$$

Найдем для трехчлена $\mathcal{F}(\mathrm{M}) = -\mathrm{M}^2\mu^2 + \mathrm{M}\mu + \mu(\pi^2 f + \pi^4 d)$ область значений, при которых имеет место (1.8). Обозначим $r = \pi^2 f + \pi^4 d$. Рассмотрим уравнение

$$-\mathrm{M}^2\mu + \mathrm{M} + r = 0, \tag{1.9}$$

корни которого равны

$$\mathrm{M}_{1,2} = (2\mu)^{-1}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4\mu^2(\pi^2 f + \pi^4 d)}\right). \tag{1.10}$$

Следовательно, при

$$\mathrm{M}_2 < \mathrm{M} < \mathrm{M}_1 \tag{1.11}$$

существует неравенство (1.8), т. е. функционал $V[z, t]$ положительно определен при выполнении (1.11). Если ограничимся значениями $\mathrm{M}_1 >$

$> \mathrm{M} \geqslant 0$, то оценка сверху для M^2 есть

(1.12) $$\mathrm{M}^2 < Q \equiv \frac{f+\pi^2 d}{\mu}\left(\pi^2\mu + \frac{1+\sqrt{1+4\mu^2(\pi^2 f+\pi^4 d)}}{2\mu(f+\pi^2 d)}\right).$$

Обозначим второй сомножитель в (1.12) через R_1. Если $R_1 \geqslant 1$, то (1.12) включает аналогичное условие для M^2, входящее в систему достаточных условий устойчивости по Ляпунову, полученных в [12—16]. Из (1.10) находим

(1.13) $$f > -[1/(4\mu^2\pi^2) + \pi^2 d],$$

откуда следует, что f может принимать отрицательные значения, но не меньше $-[1/(4\mu^2\pi^2) + \pi^2 d]$ и, значит, отлично от подобного условия в [4, 8, 12—15] первым слагаемым.

Введем малый положительный параметр $\varepsilon \in (0, 1)$. Считаем, что границы максимально допустимых значений смещения и других величин, характеризующих динамическое поведение рассматриваемой системы, являются ограниченными функциями времени и малого параметра ε. Обозначим через $L > 0$ максимально возможное значение величины справа в неравенстве (1.12): $L = \max\limits_{f,d}\{Q\}$. Исследуемый конечный промежуток времени K зададим с помощью малого параметра ε: $K = [t_0, L\varepsilon^{-1}]$. Под технической устойчивостью этой системы будем понимать свойства устойчивости согласно определениям [22—24].

Определение 1. Динамическая система, описываемая краевой задачей (1.1)—(1.3), называется технически устойчивой на конечном промежутке времени $K \subset I$, если вдоль возмущенного решения $z(x, t)$ краевой задачи (1.1)—(1.3) для положительно определенного функционала $V[z, t]$ выполняется условие

(1.14) $$V[z(x, t), t] \leqslant P(t), \ t \in K,$$

лишь только $V[z(x, t_0), t_0] \leqslant a$, где наперед выбранная постоянная $a = \mathrm{const} > 0$ и наперед заданная ограниченная функция $P(t)$ на заранее указанном интервале времени $K \subset I$ удовлетворяют неравенству

(1.15) $$P(t_0) \geqslant a, \ t_0 \in K.$$

Определение 2. Если условия определения 1 выполняются при любом $K \subseteq I$, то динамическая система, характеризующаяся краевой задачей (1.1)—(1.3), называется технически устойчивой на бесконечном промежутке времени I. Если, кроме того, вдоль решения $z(x, t)$ задачи (1.1)—(1.3) $\lim\limits_{t\to+\infty} V[z(x, t), t] = 0$, то динамическая система асимптотически технически устойчива.

Обозначим величину справа в (1.6) через $\rho(z; \xi)$, где $\xi = (\mathrm{M}, f, d, \mu)$; $\rho(z; \xi)$ назовем мерой динамического процесса (1.1)—(1.3). Легко видеть, что из определений 1, 2 следуют определения ТУ исходной системы относительно меры $\rho(z; \xi)$.

2. Достаточные условия ТУ в задаче о панельном флаттере на основе метода сравнения. Здесь получены достаточные условия ТУ на конечном и бесконечном промежутках времени и асимптотической ТУ с помощью скалярной задачи Коши сравнения, решения которой существенно зависят от параметров динамического процесса (1.1)—(1.3).

Итак, построим соответствующее скалярное уравнение сравнения. Вычислим производную dV/dt вдоль решения $z(x, t)$ задачи (1.1)—(1.3)

(2.1) $$\frac{dV[z(x,t),t]}{dt} = \int_0^1 dx\left\{-2\left(\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -2\mathrm{M}\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} + \mathrm{M}\left[2\mu\left(\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right)^2 - 2f\left(\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2d\left(\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]\right\}.$$

Используя свойство монотонности произведения для любых натуральных величин, из (1.6) вдоль решения задачи (1.1)—(1.3) получаем неравенство

$$\frac{1}{(\varepsilon+t)^2} V[z(x, t), t] \geqslant \frac{1}{(\varepsilon+t)^2} \rho(z(x, t); \xi). \tag{2.2}$$

Правая часть в (2.1) представляет регулярную функцию по t, получающуюся после интегрирования по переменному $x \in [0, 1]$ вдоль решения исходной краевой задачи (1.1)—(1.3). Кроме того, эта функция не превышает

$$\begin{aligned} N(t; \xi) = 2 \int_0^1 dx \Big[(\mathrm{M}\mu - 1) \left(\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \\ - \mathrm{M} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} - \mathrm{M}(f + \pi^2 d) \left(\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \right)^2 \Big]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подынтегральное выражение функции $N(t; \xi)$ представляет знаконеопределенную квадратичную форму относительно $\partial z/\partial t$, $\partial z/\partial x$. Используя (2.2), (2.3), образуем функцию

$$\widetilde{\Phi}(t; \xi) = N(t; \xi) - \frac{1}{(\varepsilon+t)^2} \rho(z(x, t); \xi). \tag{2.4}$$

Имеет место неравенство $N(t; \xi) - \frac{1}{(\varepsilon+t)^2} V[z(x, t), t] \leqslant \widetilde{\Phi}(t; \xi)$. У функции $\widetilde{\Phi}(t; \xi)$ есть мажоранта

$$\widetilde{\Phi}(t; \xi) \leqslant N(t; \xi) - \frac{\mu}{(\varepsilon+t)^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx. \tag{2.5}$$

Правую часть в (2.5) вдоль решения задачи (1.1)—(1.3) обозначим через $\Phi(t; \xi)$. Отметим, что величины в (2.2)—(2.5) зависят от М, f, d, μ как от параметров, удовлетворяющих условиям (1.7)—(1.13). Вдоль решения краевой задачи (1.1)—(1.3)

$$dV[z(x, t), t]/dt \leqslant (\varepsilon + t)^{-2} V[z(x, t), t] + \Phi(t; \xi). \tag{2.6}$$

Рассмотрим вдоль решения задачи (1.1)—(1.3) функцию $\sigma(t; \xi) = \int_0^1 \Phi(\tau; \xi)\, d\tau$, по условию задачи непрерывную на заданном промежутке K. Примем $k(t) = V[z(x, t), t] - \sigma(t; \xi)$. Тогда неравенство (2.6) запишем в форме

$$dk(t)/dt \leqslant (\varepsilon + t)^{-2} [k(t) + \sigma(t; \xi)]. \tag{2.7}$$

Функция $\Phi(t; \xi)$ содержит в своих коэффициентах время в явном виде. При этом не при всех значениях $t \in K$ ее подынтегральное выражение является знакоопределенным. Легко убедиться, что лишь при условиях

$$t > \Theta \geqslant t_0, \quad \Theta \equiv \sqrt{\frac{2\mu(f + \pi^2 d)}{\mathrm{M} + \mu - 4(f + \pi^2 d)}} - \varepsilon, \\ \max\{0; 4(f + \pi^2 d) - \mu\} < \mathrm{M} < \mathrm{M}_1 \tag{2.8}$$

подынтегральная функция в $\Phi(t; \xi)$ отрицательно определенная как квадратичная форма относительно $\partial z/\partial t$, $\partial z/\partial x$. Следовательно, функция $\sigma(t; \xi)$— также знакоопределенная ограниченная функция в области K лишь при условиях (2.8). Исходя из неравенства (2.7), рассмотрим дифференциальное уравнение сравнения

$$dy/dt = (\varepsilon + t)^{-2} [y + \sigma(t; \xi)], \; t \in K \tag{2.9}$$

при начальных условиях

$$y(t_0) = y_0 \geqslant V[z(t_0), t_0], \tag{2.10}$$

где

$$V[z(t_0), t_0] = \int_0^1 dx \left[\mu u_1^2(x) + \right. \tag{2.11}$$

$$\left. + f\left(\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right)^2 + d\left(\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2}\right)^2 + \mathrm{M}\left(u_0^2(x) + 2\mu u_0(x)\, u_1(x)\right)\right].$$

Общее решение задачи Коши (2.9), (2.10) запишем как

$$y(t, t_0) = y_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon + t_0} - \frac{1}{\varepsilon + t}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon + t}\right) \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon + \tau}\right) \Phi(\tau; \xi)\, d\tau - \sigma(t; \xi).$$

Из (2.7), (2.10), учитывая, что $V[z(t_0), t_0] \equiv k(t_0)$, по известной теореме о дифференциальных неравенствах [22—24, 26] для функционала Ляпунова (1.4) вдоль решения задачи (1.1)—(1.3) получаем оценку

$$V[z(x, t), t] \leqslant P(t; \xi, \varepsilon) \equiv y_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon + t_0} - \frac{1}{\varepsilon + t}\right) + \tag{2.12}$$

$$+ \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon + t}\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\tau + \varepsilon}\right) \Phi(\tau; \varepsilon)\, d\tau \quad \forall t \in K.$$

С учетом свойства непрерывности функции $P(t;\ \xi,\ \varepsilon)$ на заданном промежутке времени K при произвольных $\varepsilon \in (0, 1)$ и вышеуказанных параметрах ξ из (2.12) следует ТУ рассматриваемой системы на конечном промежутке времени.

Действительно, пусть заранее известна постоянная $C = \mathrm{const} > 0$ такая, что имеет место оценка

$$|\sigma(t;\ \xi)| \leqslant C \quad \forall t \in K \tag{2.13}$$

при вышеуказанных условиях на параметры ξ. Тогда, используя интегрирование по частям и мажорируя, находим неравенство

$$P(t;\ \xi,\ \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon + t}\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon + t_0}\right) (y_0 + C). \tag{2.14}$$

Функция справа в (2.14) в течение промежутка K не превышает

$$\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon + L\varepsilon^{-1}}\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon + t_0}\right) (y_0 + C). \tag{2.15}$$

Отсюда с учетом условия (2.10) следует техническая устойчивость движения двумерной панели на конечном промежутке времени K, находящейся в сверхзвуковом потоке и подвергающейся воздействию силовой нагрузки вдоль ее свободных краев.

Если функция $\Phi(t;\ \xi)$ такая, что интеграл $\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon + \tau}\right) \Phi(\tau;\ \xi)\, d\tau$ является непрерывной ограниченной функцией на любом временном промежутке $K \subseteq I$ и имеет рост на каждом $K \subseteq I$ не быстрее, чем функция $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon + t}\right)$, то, как вытекает из (2.12), исходная система (1.1)—(1.3), определенная на каждом промежутке $K \subseteq I$, технически устойчива на бесконечном промежутке времени, т. е. в этом случае можно указать наперед заданную непрерывную ограниченную функцию $B(t)$, найденную на каждом $K \subseteq I$, такую, что будет выполняться оценка

$$\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+\tau}\right) \Phi(\tau; \xi)\, d\tau \leqslant B(t) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t}\right), \quad t \in K \subseteq I \tag{2.16}$$

при условии $B(t) + y_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t_0}\right) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+t}\right) \geqslant 0$, $t \in K \subseteq I$. В частности, условие (2.16) может быть вида $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t}\right) \geqslant \int_t^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t}\right) \Phi(\tau; \xi)\, d\tau$ при всех $K \subseteq I$. В этом случае при $t \to +\infty$ имеем $P(t; \xi, \varepsilon) \leqslant y_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t_0}\right) + 1$.

Используя условие (2.13) при всех $K \subseteq I$, из неравенства (2.14) получим оценку

$$P(t; \xi, \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t_0}\right)(y_0 + C) \quad \forall t \in I. \tag{2.17}$$

Отсюда с учетом (2.10), (2.12) следует ТУ движения панели в сверхзвуковом потоке на бесконечном промежутке времени при условии (2.13) для всех $K \subseteq I$. При этом, как видно из (2.15), промежутки K можно определить с помощью малого параметра $\varepsilon \to 0$. Тогда из (2.15) при $\varepsilon \to 0$ находим $\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+L}\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t_0}\right)(y_0 + C) \to \exp\left(\frac{1}{t_0}\right)(y_0 + C)$, $t_0 \neq 0$. Так как в данном случае $\varepsilon \neq 0$, то вместо (2.17) имеем строгое неравенство $P(t; \xi, \varepsilon) < \exp\left(\frac{1}{t_0}\right)(y_0 + C)$.

Если исходная система (1.1)—(1.3) технически устойчива на I и, кроме того, выполняется условие

$$P(t; \xi, \varepsilon) \to 0 \text{ при } t \to +\infty \tag{2.18}$$

при заданных ξ, ε, то система (1.1)—(1.3) технически асимптотически устойчива. В частности, условие (2.18) будет выполнено, если справедливо условие $\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+\tau}\right) \Phi(\tau; \xi)\, d\tau \to -y_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon+t_0}\right)$.

Из (1.12) вытекает, что выполнение неравенства $\mathrm{M}^2 \geqslant Q$ влечет нарушение положительной определенности функционала (1.4). Однако этого недостаточно, чтобы говорить о ТУ исходной системы. Очевидно, исходный процесс (1.1)—(1.3) будет технически неустойчивым при заданных параметрах, если имеет место неравенство $V[z(x, t), t] > P(t; \xi, \varepsilon)$ хотя бы для одного момента t в рассматриваемом (конечном или бесконечном) промежутке времени. Как следует из оценки (2.12), одно из условий технической неустойчивости процесса (1.1)—(1.3)— условие $\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\tau+\varepsilon}\right) \times \Phi(\tau, \xi)\, d\tau \to +\infty$ соответственно при $t \in K$ или $t \in I$. При этом за критическое значение числа Маха примем $\mathrm{M}_{\text{к}} = \mathrm{M}_1$, где M_1 задано согласно (1.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Нелинейный флаттер пластин и оболочек // Инженерный сб.— М., 1960.— Т. 28.
2. **Болотин В. В.** О критических скоростях в нелинейных задачах теории аэроупругости // Науч. докл. высш. шк. Сер. Машиностроение и приборостроение.— 1958.— № 3.
3. **Копзон Г. И.** Вибрации пологого крыла-оболочки в потоке газа // ДАН СССР.— 1956.— Т. 107, № 3.
4. **Miles J. W.** On the aerodynamic instability of thin panels // J. Aeronaut. Sci.— 1956.— V. 23, N 8.

5. **Jordan P. F.** The physical nature of panel flutter // Aero Digest.— 1956.— V. 72, N 2.
6. **Shen S. F.** An approximate analysis of nonlinear flutter problem // J. Aerospace Sci.— 1959.— V. 26, N 1.
7. **Григолюк Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г.** Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Сер. Механика.— М.: ВИНИТИ, 1965.
8. **Johns D. J.** Some panel flutter studies using piston theory // J. Aerospace Sci.— 1958.— V. 25.— P. 679.
9. **Мовчан А. А.** О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ.— 1956.— Т. 20, № 2.
10. **Мовчан А. А.** О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ.— 1959.— Т. 23, № 3.
11. **Новиков Ю. Н.** Об устойчивости решений в задаче о флаттере панелей // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 4.
12. **Parks P. C.** A stability criterion for a panel flutter via the second method of Liapunov // AIAA J.— 1966.— V. 4, N 1.
13. **Webb E. R., Bass B. R. et al.** Further study of a stability criterion for a panel flutter via the second method of Liapunov // AIAA J.— 1967.— V. 5, N 11.
14. **Parks P. C.** Liapunov functionals for aeroelastic problems // J. Franklin Institute.— 1967.— V. 283, N 5.
15. **Parks P. C., Pritchard A. J.** On the construction and use of Liapunov functionals // IFAC, Techn. session. Stability, NOT.— Warszawa, 1969.— V. 20.— P. 59.
16. **Leipholz H.** Stability of elastic systems.— Alphen aan Rijn: Sijthoff et Noordhoff, 1980.
17. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
18. **Кириченко Н. Ф.** Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения.— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972.
19. **Байрамов Ф. Д.** О технической устойчивости систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1974.— № 2.
20. **Сиразетдинов Т. К.** Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последствием // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения.— Новосибирск: Наука, 1981.
21. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1976.
22. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 2.
23. **Матвийчук К. С.** К вопросу о технической устойчивости систем с элементами демпфирования // ПМ.— 1983.— Т. 19, № 5.
24. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Дифференц. уравнения. —1986. —Т. 22, № 11.
25. **Скоробогатько В. Я.** Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев: Наук. думка, 1980.
26. **Szarski J.** Differential inequalities.— Warszawa: PWN, 1967.

Поступила 8/IX 1987 г.

УДК 534.222.2

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО СФЕРОИДА

К. П. Рождественский, Л. А. Толоконников

(Тула)

Известно, что в поле звуковой волны около различных препятствий могут возникать стационарные вихревые потоки (акустические течения). Данное явление исследовалось в ряде работ, часть из которых рассмотрена в обзорах [1—3], где наиболее пристальное внимание уделено течениям около тел правильной геометрической формы (плоскость, труба, цилиндр, сфера) в поле стоячих волн без учета теплопроводности. Влияние теплопроводности на возникновение потоков в пограничном слое при наклонном падении бегущей звуковой волны на плоскость рассмотрено в [4].

В настоящей работе определяются акустические течения в пограничном слое, возникающие в реальной среде под воздействием плоской бегущей звуковой волны, падающей вдоль оси вращения вытянутого сфероида.

Решение для скорости акустических течений может быть получено из основных уравнений движения вязкой жидкости методом последовательных приближений. Оно имеет вид [1]

$$\mu\nabla^2\mathbf{V}_2 = \nabla p_2 - \mathbf{F}; \tag{1}$$

$$\mathbf{F} = -\rho_0 \langle(\mathbf{V}_1\nabla)\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1\nabla\mathbf{V}_1\rangle, \tag{2}$$