Теплофизика и аэромеханика, 2015, том 22, № 6

УДК 536.24

Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале*

Е.П. Валуева, М.С. Пурдин

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: ep.valueva@gmail.com

Задача о развитом ламинарном пульсирующем течении в прямоугольном канале решена методом конечных разностей. Определены оптимальные параметры разностной схемы; получены данные по амплитуде и фазе колебаний продольной скорости, коэффициента гидравлического сопротивления, касательного напряжения на стенке. По значению безразмерной частоты колебаний выделены два характерных режима — квазистационарный и высокочастотный. В квазистационарном режиме значения всех гидродинамических величин соответствуют значениям средней по сечению скорости в данный момент времени. Показано, что в высокочастотном режиме зависимости от безразмерной частоты колебаний колеблющихся составляющих гидродинамических величин имеют одинаковый характер для прямолинейных каналов с разной формой поперечного сечения (круглой трубы, плоского и прямоугольного каналов). Проанализировано влияние соотношения сторон прямоугольного канала на гидродинамику пульсирующего потока.

Ключевые слова: гидродинамика, пульсирующее ламинарное течение, численное моделирование, микрофлюидная техника.

Введение

Ламинарное течение встречается в прямоугольных каналах систем биологических микрочипов, разработка которых активно ведется в последние годы (см., например, [1]). Эти системы предназначены для диагностики работы различных органов человека, а также для адресной и точно дозированной доставки к ним лекарственных препаратов. Гидравлические диаметры микроканалов $d_г$ варьируются по порядку величины от 1 до 100 мкм.

Для медико-биологических исследований используются пневматические микронасосы с периодическим вытеснением жидкости из свободных объемов. С целью обеспечения постоянного расхода жидкости применяются специальные устройства [2], усложняющие и удорожающие микрофлюидные установки. Поэтому можно предположить, что экономически выгодными могут быть установки с пульсирующим расходом. Однако сведения о влиянии пульсаций расхода жидкости на колебания коэффициентов гидравлического сопротивления (что важно для расчета перепада давления, необходимого для прокачки жидкости) и сопротивления трения (что важно при проведении некоторых медико-биологических исследований [3]) отсутствуют.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (гос. задание № 3.1519.2014/к).

Детальное изучение гидродинамики при ламинарном пульсирующем течении в прямоугольном канале до настоящего времени ни опытным, ни расчетным путем не проводилось. В работе [4] был выполнен эксперимент для течения воды в прямоугольном канале с гидравлическим диаметром 144 мкм, сечением 260×100 мкм, длиной $L = 20$ мм, значительно превышающей длину начального гидродинамического участка. Задавались пульсации расхода жидкости прямоугольной формы с разными значениями времен t_N и t_F, в течение которых сохранялись максимальное и минимальное значения расхода. Среднее во времени число Рейнольдса изменялось в диапазоне $\mathrm{Re}_{d_г} = 10–620$, амплитуда колебаний $A = 0{,}27$, безразмерная частота колебаний $F = d_г^2 / [\nu(t_N + t_F)]$ достигала значений 0,00365. Вычисленные по результатам измерений значения числа Пуазейля Po (в выражении $f = \mathrm{Po}/\mathrm{Re}_{d_г}$, $f = 2\Delta\overline{p} d_г / (\rho < \overline{u} >^2 L)$) оказались ниже, чем при стационарном течении, что вызывает некоторое сомнение. При развитом ламинарном течении с периодическим изменением расхода во времени значения осредненных по периоду колебаний гидродинамических характеристик должны совпадать с их значениями при стационарном течении.

Наложение колебаний на ламинарное течение в канале может привести к существенным изменениям гидродинамических характеристик потока, что подробно изучено для течения в круглой трубе и плоском канале. Впервые влияние наложенных колебаний средней по сечению скорости на профиль продольной скорости при ламинарном течении в трубе было обнаружено в экспериментах [5]. Был получен так называемый аннулярный эффект Ричардсона: при относительно высоких частотах возникает максимум на профиле колеблющейся составляющей продольной скорости в узком пристеночном слое, толщина которого уменьшается с увеличением частоты. В остальной части трубы жидкость колеблется как целое в соответствии с колебаниями средней по сечению скорости. Теоретически задача о ламинарном пульсирующем течении в трубе впервые была решена в [6], наиболее полное ее решение для круглой трубы представлено в [7]. В работе [8] решение указанной задачи выполнялось аналогично [7], но при условии, что задавалось не гармоническое колебание средней по сечению скорости, а колебание градиента давления. Выкладки, сделанные в работе [8], по своей сути являются повторением решения [7]. Из аналитического решения уравнения движения для пульсирующего течения следует, что при определенных числах Рейнольдса среднего во времени течения и относительно высоких частотах и амплитудах колебаний существуют зоны возвратных (реверсивных) течений вблизи стенки, когда местная продольная скорость направлена против среднего потока. Наличие этих зон подтверждено в работе [8] и экспериментально, причем с очень хорошим совпадением теории и эксперимента. Аналитическое решение задачи о ламинарном пульсирующем течении в плоском канале приведено также в работе [9]. Закономерности колебаний гидродинамических величин для течения в плоском канале и в круглой трубе качественно совпадают.

Расчетные исследования колеблющегося течения в прямоугольном канале весьма ограничены. В работах [10], [11] рассматривалось развитое течение, вызванное гармоническими колебаниями градиента давления. После исключения из уравнения движения нестационарного члена задача решалась с помощью разложения в ряд Фурье. В [12] аналогичная задача нахождения амплитуды и фазы колебаний скорости была сведена к решению двух уравнений Гельмгольца, выполненному методом конечных разностей. Показано, что схема второго порядка точности не уступает схемам более высокого порядка при числе разбиений 40×40. Авторы [12] отмечают, что и в прямоугольном канале наблюдается аннулярный эффект Ричардсона.

В работе [13] рассматривалось развитое колеблющееся течение в прямоугольном канале, две противоположные стенки которого были проницаемыми. Метод решения аналогичен методу, примененному в работах [10], [11]. Как указывается в [13], решение этой задачи может быть полезно при описании течения крови в фибровых мембранах, используемых для искусственных почек. Также авторами было получено аналитическое решение для развитого колеблющегося течения в треугольном [14] и в тороидальном [15] каналах. В последнем случае исследовалось влияние осцилляций на течение Дина.

Практический интерес представляет изучение процессов теплообмена в так называемых планарных теплообменных аппаратах, состоящих из щелевых микроканалов. Они могут применяться для охлаждения элементов электронной техники, криогенных установок, авиационной и ракетно-космической техники. Такие теплообменники обладают высоким коэффициентом компактности и большими значениями коэффициента теплоотдачи — до 130 Квт/(м^2·K) [16].

Имеющиеся результаты экспериментальных исследований теплообмена при пульсирующем ламинарном течении в микро- и макроканалах свидетельствуют о том, что наложение пульсаций расхода жидкости может привести к увеличению средней по периоду колебаний теплоотдачи по сравнению с ее значением при стационарном течении, особенно при относительно высоких амплитудах колебаний. В работе [17] экспериментально изучался теплообмен при пульсирующем ламинарном течении в прямоугольном канале с сечением (1×16) мм при числах Рейнольдса среднего во времени течения Re = 100–650. Было выявлено, что среднее по периоду число Нуссельта слабо зависит от частоты колебаний, но существенно возрастает с увеличением амплитуды колебаний A (до 40 % при A = 2,5).

Исследование теплообмена при пульсирующем ламинарном течении важно при моделировании процессов, протекающих в системе охлаждения ядерных энергетических установок, размещенных на плавучих платформах в океане. Такие установки, предназначенные, например, для обеспечения питьевой водой прибрежных районов или разработки шельфовых месторождений, являются экономически выгодными по сравнению с наземными атомными электростанциями. В этом направлении в последнее десятилетие появилось значительное количество экспериментальных и расчетно-теоретических работ (см., например, [18]).

В работе [19] задача о ламинарном пульсирующем течении и теплообмене при больших амплитудах колебаний средней по сечению скорости в круглой трубе и плоском канале решена методом конечных разностей. Были получены данные по амплитуде и фазе колебаний коэффициента гидравлического сопротивления, касательного напряжения на стенке, температуры жидкости, теплового потока на стенке q_{c} (T_{c} = const), температуры стенки T_{c} (q_{c} = const). Результаты расчета гидродинамических величин хорошо согласуются с аналитическими решениями [7, 8].

Расчетным путем теплообмен при пульсирующем течении в прямоугольных каналах не изучался. Заметим, что без детального анализа влияния наложенных пульсаций на продольную скорость жидкости исследование теплообмена затруднительно.

Целью настоящей работы является анализ особенностей гидродинамических характеристик ламинарного потока в прямоугольном канале при наложении на течение гармонических колебаний расхода и влияния на эти характеристики режимных параметров — безразмерной частоты колебаний и отношения сторон канала.

1. Постановка задачи

В последнее десятилетие проведены многочисленные экспериментальные исследования стационарного течения в микроканалах, в которых изучались коэффициент гидравлического сопротивления, профиль скорости, длина начального гидродинамического участка, критическое число Рейнольдса. Они показали, что для моделирования течения однофазной ньютоновской капельной жидкости в микроканалах с гладкими стенками можно использовать уравнения сохранения, справедливые для сплошной среды с граничным условием прилипания на стенке (см., например, [16, 20]). Нет оснований полагать, что этот вывод нельзя распространить на случай пульсирующего течения. Поэтому результаты расчетов, проведенных в настоящей работе, справедливы для течения как в макроканалах, так и в микроканалах.

Решалось уравнение движения для развитого ламинарного течения жидкости с постоянными свойствами в прямоугольном канале:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

здесь u — скорость вдоль продольной оси x, p — давление, t — время, y и z — декартовы координаты, отсчитываемые от оси канала вдоль его ширины a и высоты h; ρ и ν — плотность и кинематический коэффициент вязкости.

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид. На стенках канала при $y = a/2$, $z = 0 \div h/2$; $z = h/2$, $y = 0 \div a/2$ выполняется условие прилипания: $u = 0$. На осях канала выполняется условие симметрии: при $y = 0$, $z = 0 \div h/2$ $\partial u/\partial y = 0$; при $z = 0$, $y = 0 \div a/2$ $\partial u/\partial z = 0$. Задано, что средняя по сечению скорость изменяется во времени по гармоническому закону:

$$< u > = < \overline{u} > [1 + A\sin(\omega t)], \tag{2}$$

где A — амплитуда колебаний, ω — круговая частота, черта сверху означает осреднение по времени.

Приведем уравнение (1) к безразмерному виду:

$$4S^2\frac{\partial U}{\partial t_\omega} = P + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}, \tag{3}$$

где $U = u/<\overline{u}>$ и $t_\omega = \omega t$ — безразмерные продольная скорость и время; $Y = y/d_г$, $Z = z/d_г$ — безразмерные координаты, отсчитываемые от оси канала; $d_г = 2h/(1 + h/a)$ — гидравлический диаметр канала, a и h — ширина и высота канала, $P = -\dfrac{dp}{dx}\left(\dfrac{2d_г}{\rho<\overline{u}>^2}\right)\dfrac{\mathrm{Re}}{2}$ — безразмерный градиент давления, $\mathrm{Re} = <\overline{u}> d_г/\nu$ — число Рейнольдса для среднего течения, $\mathrm{S} = (d_г/2)\sqrt{\omega/\nu}$ — число Стокса (безразмерная частота колебаний). Заметим, что в работах, которые авторы ведут по данной тематике с конца прошлого века (см., например, [21]), для обозначения безразмерной частоты колебаний используется термин «число Стокса», заимствованный из работ [22, 23]. В последние годы некоторые зарубежные авторы упомянутую частоту называют числом Womersley.

Поскольку уравнение (3) является линейным, его можно представить как сумму уравнений для скорости колеблющегося и среднего во времени течений: $U(Y, Z, t_\omega) = \overline{U}(Y, Z) + \tilde{U}(Y, Z)\exp[\hat{i}(t_\omega + \varphi_u)]$, $\tilde{U}(Y, Z) = A_u\overline{U}(Y, Z)$, где $A_u(Y, Z)$ и $\varphi_u(Y, Z)$ — амплитуда и сдвиг фазы колебаний относительно фазы колебаний средней по сечению скорости.

В силу линейности уравнений (1), (3) все гидродинамические величины изменяются во времени по гармоническому закону с одной частотой ω. Режимными параметрами, от которых зависит решение для колеблющегося течения, являются число Стокса S и отношение сторон прямоугольного канала h/a.

Проинтегрировав по сечению канала уравнение (3), получим баланс импульса

$$\xi^p = \xi^t + < \xi^\tau, \tag{4}$$

где $\xi^p = -\frac{dp}{dx}\left(\frac{2d_\text{г}}{\rho < \bar{u} >^2}\right)$ — коэффициент гидравлического сопротивления, $< \xi^\tau > = -\frac{8 < \tau_\text{c} >}{\rho < \bar{u} >^2}$ — средний по периметру коэффициент сопротивления трения, $\xi^t = \frac{2d_\text{г}}{< \bar{u} >^2} \cdot \frac{d < u >}{dt}$ — коэффициент сопротивления, обусловленного нестационарностью течения.

Среднее по периметру касательное напряжение на стенках вычисляется следующим образом:

$$< \tau_c > = \frac{2\mu}{a+h}\left[\int_0^{h/2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=a/2} dz + \int_0^{a/2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h/2} dy\right].$$

Аналитическое решение уравнения движения для стационарного течения в прямоугольном канале было выполнено в работе [24]. В области развитого течения $\bar{\xi}^p = < \bar{\xi}^\tau > = \text{Po}/\text{Re}$, где число Пуазейля Po является функцией отношения сторон h/a.

Введем местный коэффициент сопротивления трения $\xi^\tau = -8\tau_\text{c} \big/ \rho < \bar{u} >^2$, здесь $\tau_\text{c} = \mu\left(\partial u / \partial n\right)_{n=0}$ — касательное напряжение на стенке, n — нормаль к внешней поверхности стенки. Местное число Пуазейля описывает изменение среднего во времени местного коэффициента сопротивления трения $\bar{\xi}^\tau = \text{Po}/\text{Re}$ вдоль стенок канала.

Для пульсирующего течения значение безразмерной частоты колебаний определяет два характерных режима: квазистационарный ($\text{S} < 1$) и высокочастотный ($\text{S} \to \infty$). В квазистационарном режиме значения всех гидродинамических величин соответствуют значениям средней по времени скорости в данный момент времени. Относительные амплитуды их колебаний равны A, а фазы — нулю.

Анализ колебаний давления в высокочастотном режиме можно провести, пренебрегая вязким членом в уравнении движения для колеблющегося течения, осредненного по сечению канала: $\hat{\imath} A\text{S}^2\,(8/\text{Re}) = \tilde{\xi}^p \exp(\hat{\imath}\varphi_p)$. Из этого уравнения, справедливого для прямолинейного канала с любой формой поперечного сечения, следует, что $\tilde{\xi}^p = 8A\text{S}^2/\text{Re}$. Фаза колебаний давления стремится к значению $-\pi/2$. Заметим, что колебания давления запаздывают по отношению к колебаниям средней по сечению скорости для любых S. Амплитуда колебаний $A_p = 8A\text{S}^2/\text{Po}$. В частности, для плоского канала $A_p = A\text{S}^2/12$, для круглой трубы $A_p = A\text{S}^2/8$.

Можно показать, что в высокочастотном режиме для прямолинейного канала с любой формой поперечного сечения амплитуда колебаний среднего по периметру коэффициента сопротивления трения пропорциональна AS. Коэффициент пропорциональности зависит от отношения сторон; для плоского канала он равен 1/6, для круглой трубы — 1/4. Фаза колебаний стремится к значению $-\pi/4$. Колебания трения на стенке запаздывают по отношению к колебаниям средней по сечению скорости, но в меньшей степени, чем к колебаниям давления.

2. Метод численного решения

Уравнение (3) решалось методом конечных разностей. Использовалась безусловно устойчивая неявная шеститочечная схема первого порядка точности по t_ω (двухслойная) и второго — по Y, Z. Применялась равномерная сетка по Y, Z с числом точек 80×80. Число точек по периоду было выбрано равным 1800 (при этом абсолютная погрешность вычисления фазы колебаний составляла не менее 0,0035).

Для исключения безразмерного градиента давления P система разностных уравнений, аппроксимирующих (3), на каждом слое по времени расщеплялась на две системы пятиточечных уравнений, которые решались итерационным методом Гаусса–Зайделя. Сходимость итераций обеспечивалась строгим диагональным преобладанием в матрице коэффициентов систем разностных уравнений.

Для нахождения функции P использовалось уравнение (2). Сходимость итераций на каждом слое по времени, а также установление решения по периоду колебаний (с абсолютной погрешностью, ограниченной значением машинного нуля, равного $1{,}2\cdot10^{-7}$ для языка Си++) контролировалась по значениям U в каждой точке сетки и по амплитуде колебания давления. При малых числах Стокса (S = 1) решение устанавливалось за три периода, при S = 20 для установления решения требовалось около двадцати периодов.

В ходе решения проверялись баланс импульса (4), погрешность которого не превышала 2 % (ее максимальное значение наблюдалась в нулевой фазе колебания средней по сечению скорости), соблюдение равенства $\bar{\xi}^{p} = <\bar{\xi}^{\tau}>$ (погрешность не превышала 0,3 %), а также равенства расчетного и вычисленного аналитическим путем [24] значения числа Пуазейля для осредненного по периоду колебаний и по периметру коэффициента сопротивления трения (погрешность не превышала 1 %).

Тестирование метода численного решения и компьютерной программы проводилось путем сравнения расчетных данных для осредненных по периоду колебаний продольной скорости и числа Пуазейля Po с результатами аналитического решения [24] для стационарного течения. Это сравнение иллюстрируют рис. 1, 2. Наблюдается хорошее согласование результатов расчета и решения [24] (погрешность менее 0,3 %). Максимум

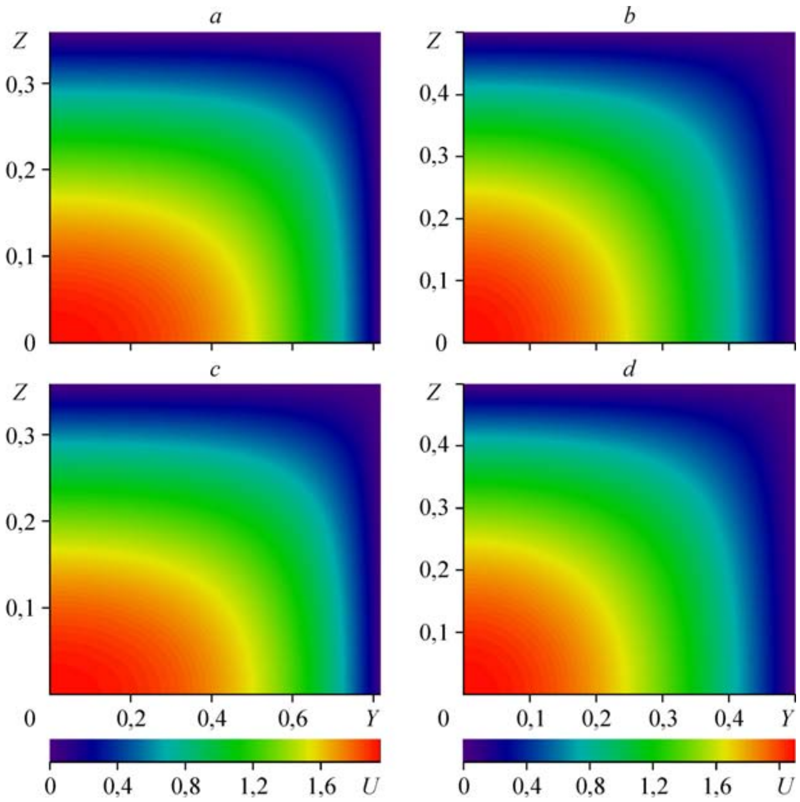

Рис. 1. Изотахи для стационарного течения.
h/a = 0,439 (*a*, *c*), 1 (*b*, *d*); *a*, *b* — результаты расчета, *c*, *d* — аналитическое решение [24].

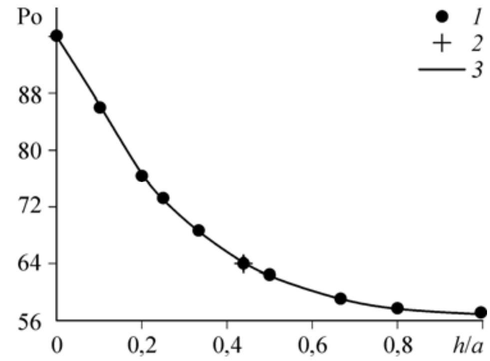

Рис. 2. Зависимость числа Пуазейля от соотношения сторон прямоугольного канала.
1 — результаты расчета, *2* — Po для круглой трубы, *3* — аналитическое решение [24].

продольной скорости расположен на осях канала. Число Пуазейля уменьшается с увеличением отношения h/a. В соответствии с теорией [9] для плоского канала Po = 96, для круглой трубы Po = 64, последнее значение имеет место при течении в прямоугольном канале с $h/a = 0{,}439$.

3. Результаты расчетов

На рис. 3 показано изменение по периметру прямоугольного канала местного числа Пуазейля для стационарного течения. Следует обратить внимание на неравномерность этого распределения, в наибольшей степени проявляющуюся для канала с квадратной формой поперечного сечения. В угловой точке канала трение на стенке падает практически до нуля. Заметим, что угловая точка является особой: в ней не выполняется уравнение движения. Однако при численном моделировании можно сколь угодно приблизиться к этой точке, уменьшая шаги сетки.

На рис. 4, 5 для пульсирующего течения при разных соотношениях сторон прямоугольного канала показано изменение амплитуды и фазы колебаний коэффициентов гидравлического сопротивления и среднего по периметру сопротивления трения в зависимости от частоты колебаний. Фаза колебаний давления (рис. 4) слабо зависит от отношения сторон, а относительная амплитуда возрастает при увеличении h/a, что соответствует приведенному выше анализу для высокочастотных колебаний. Наблюдается более заметное влияние h/a на фазу колебаний осредненного по сечению трения на стенках (рис. 5).

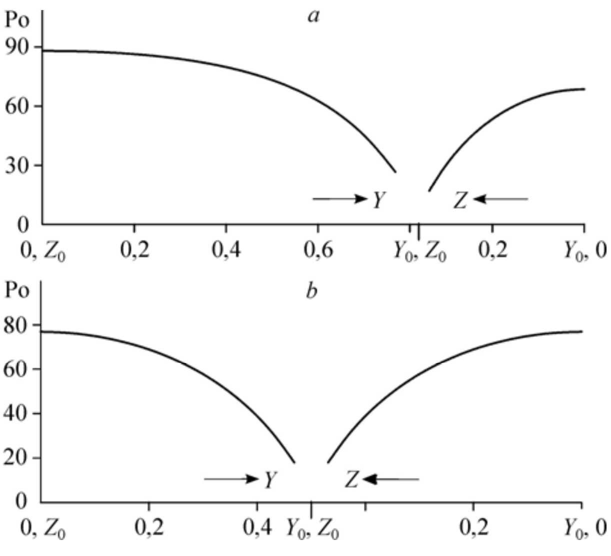

Рис. 3. Распределение местного числа Пуазейля по периметру канала.
$h/a = 0{,}439$ (*a*), 1 (*b*).

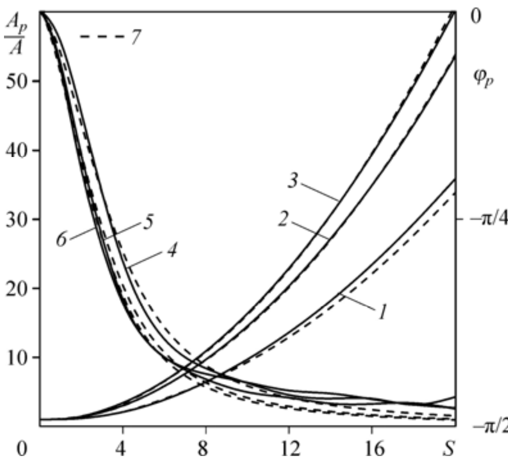

Рис. 4. Амплитуда и фаза колебаний коэффициента гидравлического сопротивления.
1, 2, 3 — амплитуда, *4, 5, 6* — фаза; *h*/*a* = 0 (*1, 4*), 0,439 (*2, 5*), 1 (*3, 6*); *7* — расчет по аппроксимирующим зависимостям.

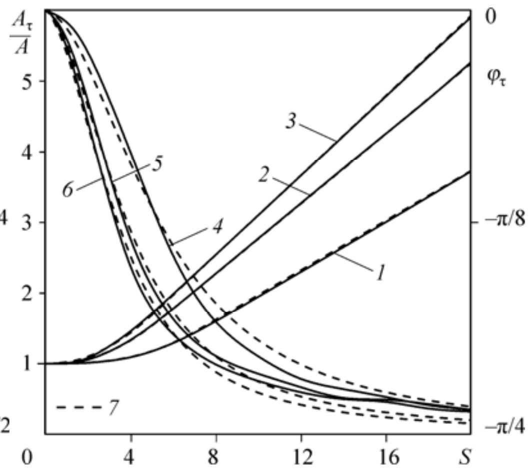

Рис. 5. Амплитуда и фаза колебаний среднего по периметру коэффициента сопротивления трения.
1, 2, 3 — амплитуда, *4, 5, 6* — фаза; *h*/*a* = 0 (*1, 4*), 0,439 (*2, 5*), 1 (*3, 6*); *7* — расчет по аппроксимирующим зависимостям.

На рис. 4, 5 приведены также результаты расчетов по предложенным в работе аппроксимирующим зависимостям, которые могут быть использованы в практических приложениях. Эти зависимости имеют следующий вид:

$$A_p = \mathrm{S}^{n_p}/a_p + 1, \quad \varphi_p = -\pi/2 + 1/(\mathrm{S}^2/b_p + 2/\pi),$$

$$A_\tau = \mathrm{S}^{n_\tau}/a_\tau + c, \quad \varphi_\tau = -\pi/4 + 1/(\mathrm{S}^2/b_\tau + 4/\pi).$$

Для прямоугольного канала:

$\mathrm{S} = 0-6$: $n_p = 2{,}5 + 0{,}48/(4{,}7h/a + 1)$, $a_p = 12{,}1 + 58{,}7/(9{,}55h/a + 1)$; $\delta A_p = 5{,}6\,\%$.

$n_\tau = 2{,}12 + 1{,}38/(5h/a + 1)$, $a_\tau = 21{,}5 + 1926{,}5/(41{,}4h/a + 1)$, $c = 1$; $\delta A_\tau = 3{,}1\,\%$.

$\mathrm{S} = 6-20$: $n_p = 2$, $a_p = 5{,}65 + 6{,}55/(5{,}5h/a + 1)$; $\delta A_p = 6\,\%$.

$n_\tau = 1$, $a_\tau = 2{,}93 + 2{,}77/(3{,}45h/a + 1)$, $c = 0{,}285 - 0{,}082/(150h/a + 1)$;
$\delta A_\tau = 0{,}95\,\%$.

$\mathrm{S} = 0-20$: $b_p = 8{,}4 + 7{,}94/(4{,}3h/a + 1)$; $\Delta\varphi_p = 0{,}075$.

$b_\tau = 5{,}25 + 16{,}65/(4{,}55h/a + 1)$; $\Delta\varphi_\tau = 0{,}04$.

Для плоского канала:

$\mathrm{S} = 0-10$: $n_p = 2{,}55$, $a_p = 38{,}7$; $\delta A_p = 6{,}2\,\%$.

$n_\tau = 2{,}65$, $a_\tau = 471$, $c = 1$; $\delta A_\tau = 2{,}6\,\%$.

$\mathrm{S} = 10-20$: $n_p = 2$, $a_p = 11{,}6$, $\delta A_p = 0{,}7\,\%$.

$n_\tau = 1$, $a_\tau = 6$, $c = 0{,}232$; $\delta A_\tau = 0{,}13\,\%$.

$\mathrm{S} = 0-20$: $b_p = 16{,}44$; $\Delta\varphi_p = 0{,}061$.

$b_\tau = 24$; $\Delta\varphi_\tau = 0{,}031$.

Для круглой трубы:

$S = 0-5$: $n_p = 2{,}8$, $a_p = 27{,}5$; $\delta A_p = 3{,}7$ %.

$n_\tau = 2{,}9$, $a_\tau = 200$, $c = 1$; $\delta A_\tau = 2$ %.

$S = 5-20$: $n_p = 2$, $a_p = 7{,}7$; $\delta A_p = 2{,}7$ %.

$n_\tau = 1$, $a_\tau = 4$, $c = 0{,}278$; $\delta A_\tau = 0{,}4$ %.

$S = 0-20$: $b_p = 10{,}85$; $\Delta\varphi_p = 0{,}056$.

$b_\tau = 10{,}65$; $\Delta\varphi_\tau = 0{,}029$.

В приведенных выше выражениях δ и Δ — максимальные относительная и абсолютная погрешности аппроксимации результатов численного моделирования.

На рис. 6 представлены рассчитанные в работе [19] профили амплитуд и фаз колебаний скорости при течении в круглой трубе и плоском канале (для плоского канала характерный геометрический размер в выражении для числа Стокса выбран равным не высоте, а половине высоты канала $h/2$).

При малых S $A_u / A = 1$, поэтому $\tilde{U} / A = A_u \bar{U} / A = \bar{U}$. Для плоского канала $\bar{U} = 1{,}5(1 - Z^2)$, для круглой трубы $\bar{U} = 2(1 - Z^2)$, Z — безразмерная радиальная координата. Фазы колебаний в этом случае равны нулю. С увеличением числа Стокса на профиле амплитуды вблизи стенки появляется максимум. Фаза колебаний скорости имеет отрицательное значение, которое у стенки стремится к значению фазы колебаний касательного напряжения на стенке. Вблизи оси амплитуда и абсолютное значение фазы уменьшаются, причем фаза колебаний принимает малые положительные значения. При дальнейшем росте S в большей части сечения, кроме области вблизи стенки, профиль колеблющейся составляющей скорости становится равномерным, а фаза колебаний скорости стремится к нулю, т.е. наблюдается упомянутый выше эффект Ричардсона.

Аналогичное влияние оказывают пульсации средней по сечению скорости на колебания скорости в прямоугольном канале, результаты расчета которых представлены на рис. 7, 8. Видно, что с увеличением частоты колебаний максимум на профиле скорости сдвигается к стенкам канала, а фаза колебаний при приближении к центру канала сначала

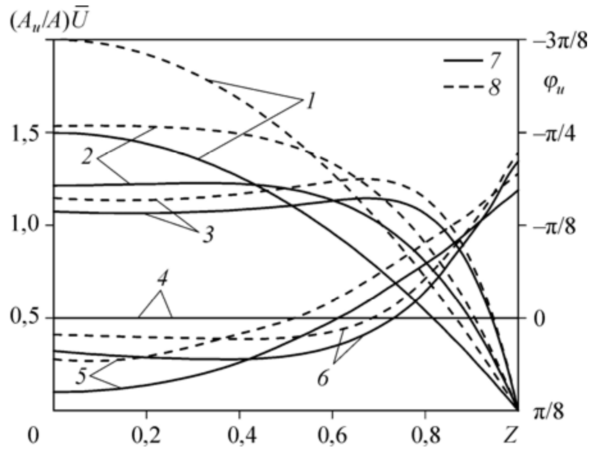

Рис. 6. Профили амплитуды и фазы колебаний скорости.
1, *2*, *3* — амплитуда, *4*, *5*, *6* — фаза; S = 0,01 (*1*, *4*), 5 (*2*, *5*), 10 (*3*, *6*);
7 — для плоского канала, *8* — для круглой трубы.

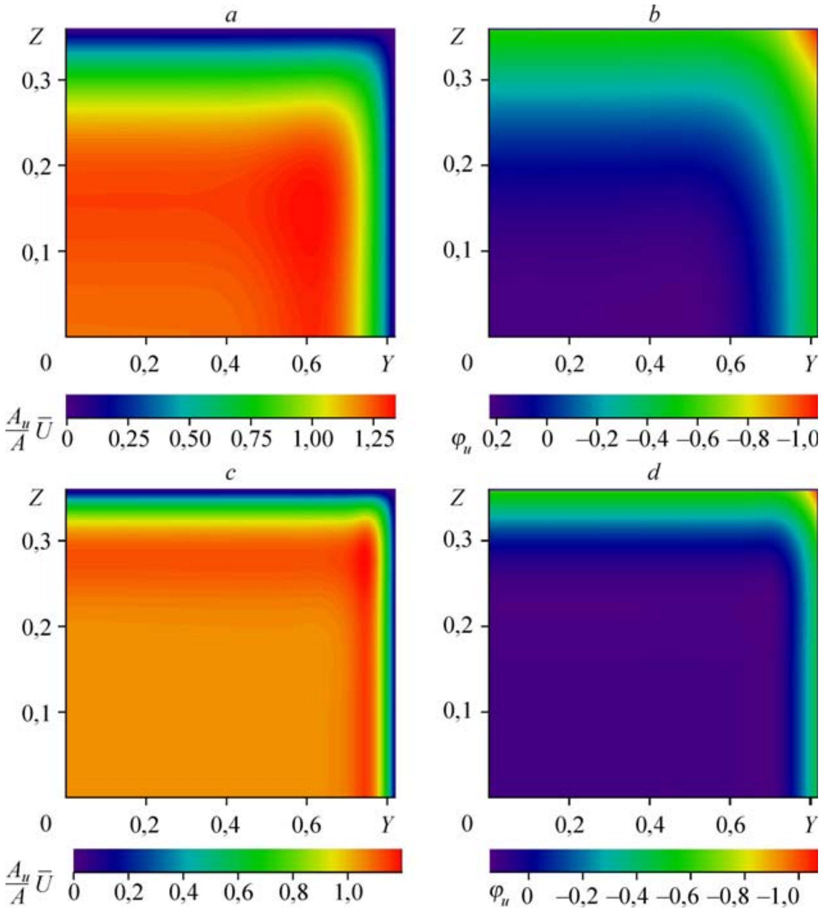

Рис. 7. Распределение амплитуды и фазы колебаний скорости по сечению канала для h/a = 0,439. a, c — амплитуда, b, d — фаза; S = 8 (a, b), 20 (c, d).

увеличивается до нуля, а затем становится положительной. Понятно, что фаза колебаний на стенках канала равна нулю, т. к. должно выполняться условие прилипания. Однако вблизи угловой точки она стремится к фазе колебаний давления, что следует из уравнения движения. При больших числах Стокса колебания жидкости сосредоточены у стенок. С уменьшением отношения сторон линии постоянных амплитуд и фаз, выделенные цветом, вытягиваются. В предельном случае колебаний в плоском канале эти линии становятся горизонтальными.

На рис. 9 показаны изменения по периметру канала амплитуды и фазы колебаний касательного напряжения на стенке. Максимальные значения этих величин наблюдаются вблизи угловой точки канала и приближаются к значениям амплитуды и фазы колебаний давления.

Представляют интерес значения режимных параметров (A, S), при которых наблюдаются возвратные течения. Эти течения в первую очередь возникают около стенки вблизи угловых точек канала, где амплитуда колебаний скорости максимальна. Критерием появления возвратных течений может служить отрицательное значение касательного напряжения на стенке, когда $A_\tau > 1$ (для прямоугольного канала $A_p > 1$). На рис. 10 для каналов с разной формой поперечного сечения построены линии A(S), ниже которых

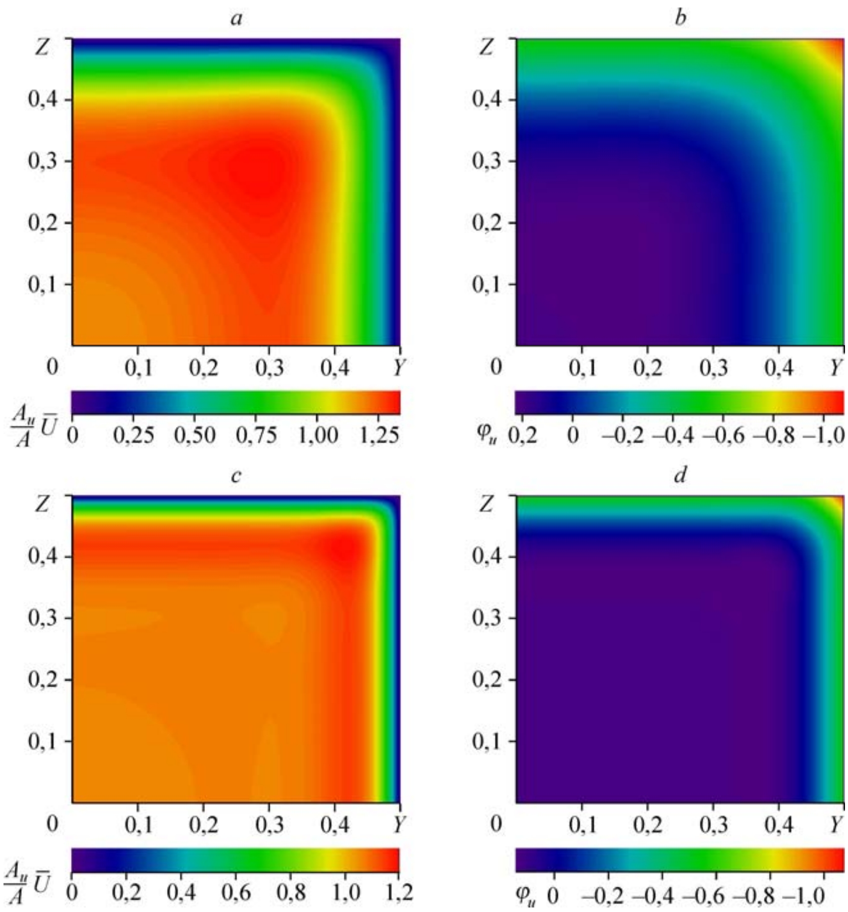

Рис. 8. Распределение амплитуды и фазы колебаний скорости по сечению канала для $h/a = 1$.
a, *c* — амплитуда, *b*, *d* — фаза; S = 8 (*a*, *b*), 20 (*c*, *d*).

возвратные течения отсутствуют. При построении указанных линий использованы корреляционные зависимости для A_τ, A_p, приведенные выше. Результаты хорошо согласуются с данными [8] для круглой трубы. На рис. 10 достаточно четко видна граница квазистационарной области S < 1.

Заключение

Разработана разностная схема и компьютерная программа для численного моделирования пульсирующего ламинарного течения в прямоугольном канале, которые в дальнейшем могут быть использованы для случая (распространенного на практике), когда наложенные колебания не являются гармоническими.

Проанализировано влияние частоты колебаний средней по сечению скорости и отношения сторон прямоугольного канала на колебания гидродинамических характеристик потока. Определены границы квазистационарной и высокочастотной областей; в последней из этих областей амплитуда колебаний касательного напряжения на стенке возрастает пропорционально числу Стокса, а амплитуда колебаний давления — квадрату этого числа. При переходе от плоского канала к каналу квадратного сечения указанные амплитуды возрастают. Влияние отношения сторон на фазы колебаний менее значительно, чем на амплитуды.

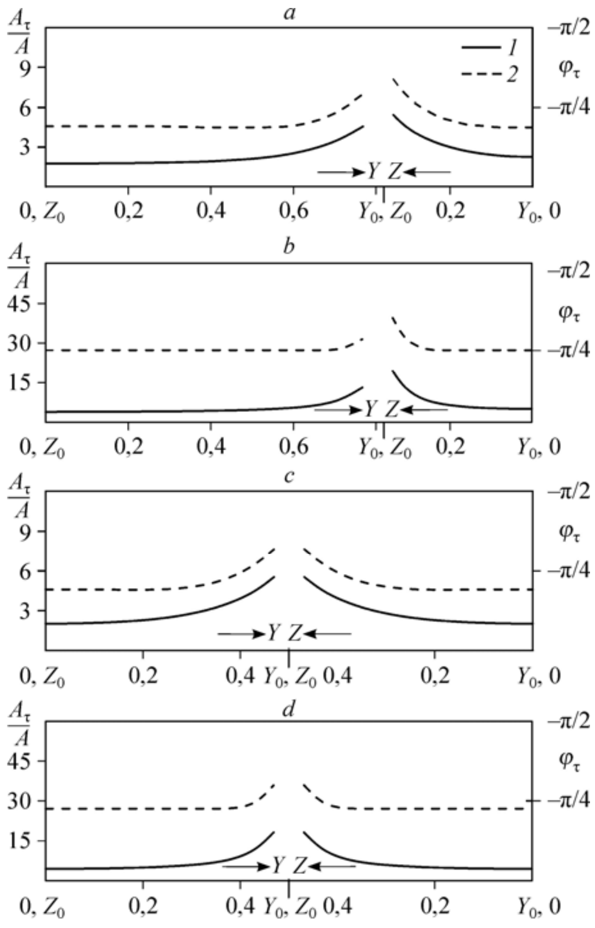

Рис. 9. Распределение по периметру канала амплитуды и фазы колебаний коэффициента сопротивления трения.

1 — амплитуда, *2* — фаза; h/a = 0,439 (*a*, *b*), 1 (*c*, *d*); S = 8 (*a*, *c*), 20 (*b*, *d*).

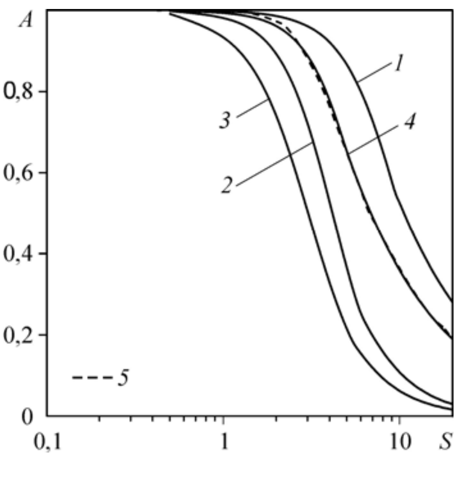

Рис. 10. Условия существования возвратных течений.

1 — плоский канал, *2* — h/a = 0,439; *3* — h/a = 1, *4* — круглая труба, *5* — данные работы [8].

Предложены аппроксимирующие зависимости для амплитуд и фаз колебаний коэффициентов гидравлического сопротивления и сопротивления трения при пульсирующем течении в прямоугольном, плоском каналах и в круглой трубе, которые дают возможность рассчитать потери давления и распределение сопротивления трения в системах микроканалов, что важно для практических приложений.

Полученные расчетные данные по распределению продольной скорости в поперечном сечении канала в зависимости от времени и режимных параметров в будущем могут быть использованы для численного моделирования процесса теплообмена при ламинарном пульсирующем течении в прямоугольном канале и для объяснения особенностей этого процесса.

Список литературы

1. **Marx U., Walles H., Hoffmann S., Linder G., Horland R., Sonntag F., Klotzbach U., Sakharov D., Tonevitsky A., Louster R. "**Human-on-a-chip" developments: a translational cutting-edge alternative to systemic safety assessment and efficiency evaluation of substances in laboratory animals and man? // ATLA. 2012. Vol. 40. P. 235–257.
2. **Inman W., Domansky K., Serdy J., Owens B., Trimper D., Griffith L.G.** Desing, modeling and fabrication of a constant flow pneumatic micropump // J. Micromech. Microeng. 2007. Vol. 17. P. 891–899.
3. **Pasirayi G., Auger V., Scott S.M., Ranman P.K.S.M., Islam M., O'Hare, Ali Z.** Microfluidic bioreactors for cell culturing: a review // Micro and Nanosystems. 2011. Vol. 3, No. 2. P. 137–160.
4. **Tikekar M., Sing S.G., Agrawal A.** Measurement and modeling of pulsatile flow in microchannel // Microfluid Nanofluid. 2010. Vol. 94. P. 1225–1240.
5. **Richardson E.G., Tyler E.** The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established // Proc. Phys. Soc. London. 1929. Vol. 42, No. 1. P. 7–14.
6. **Sexl T., Uber E.G**. Richardson entdeckten "annular effekt" // Z. Phys. 1930. Vol. 61, No. 6/7. P. 349–362.
7. **Uchida S.** The pulsating viscous flow superposed on the stead laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe // ZAMP. 1956. Vol. 7, No. 5. P. 403–422.
8. **Ünsal B., Ray S., Durst F., Ertunç Ö.** Pulsating laminar pipe flows with sinusoidal mass flux variations // Fluid Dynamics Research. 2005. Vol. 37. P. 317–333.
9. **Зигель Р., Перлмуттер М.** Теплоотдача при пульсирующем ламинарном течении в канале // Теплопередача. 1962. № 2. С. 18–32.
10. **Drake D.G.** On the flow in a channel due to a periodic pressure gradient // Q. J. Mech. Appl. Math. 1965. Vol. 18. P. 1–10.
11. **Fan C., Chao B.-T.** Unsteady, laminar, incompressible flow through rectangular ducts // ZAMP. 1965. Vol. 16. P. 351–360.
12. **Yakhot A., Arad M., Ben-Dor G.** Numerical investigation of a laminar pulsing flow in a rectangular duct // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1999. Vol. 29. P. 935–950.
13. **Tsangaris S., Vlachakis N.W.** Exact solution of the Navier–Stokes equations for the fully developed, pulsing flow in a rectangular duct with a constant cross-sectional velocity // J. Fluids Eng. 2003. Vol. 125. P. 382–385.
14. **Tsangaris S., Vlachakis N.W.** Exact solution of the Navier–Stokes equations for the oscillating flow in a duct of a cross-section of right-angled isosceles triangle // ZAMP. 2003. Vol. 54. P. 1094–1100.
15. **Tsangaris S., Vlachakis N.W.** Exact solution for the pulsating finite gap Dean flow // Appl. Math. Modelling. 2007. Vol. 31. P. 1899–1906.
16. **Минаков А.В., Лобасов А.С., Дектерев А.А.** Моделирование гидродинамики и конвективного теплообмена в микроканалах // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 481–488.
17. **Persoons T., Saenen T., Van Oevelen T., Baelmans M.** Effect of flow pulsation on the heat transfer performance of a minichantel heat sink // J. Heat Transfer. 2012. Vol. 134. P. 1–7.
18. **Yan B.H., Yang Y.H.** Forced convection with laminar pulsating flow in a tube // J. Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 47. P. 197–202.
19. **Валуева Е.П., Пурдин М.С.** Гидродинамика и теплообмен пульсирующего ламинарного потока в каналах // Теплоэнергетика. 2015. № 9. С. 24–33.
20. **Анискин В.М., Адаменко К.В., Маслов А.А.** Измерение давления внутри микроканалов различной формы // Наносистемы: Физика, Химия, Математика. 2012. Т. 3, № 2. С. 37–46.
21. **Валуева Е.П., Попов В.Н.** Математическое моделирование пульсирующего турбулентного течения жидкости в круглой трубе // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 1. С. 44–47.
22. **Tujdeman N.** On the propagation of sound waves in cylindrical tubes // J. Sound and Vibration. 1975. Vol. 39, No. 1. P. 1–33.
23. **Гликман Б.Ф.** Математические модели пневногидравлических систем. М.: Наука, 1976. 552 с.
24. **Han L.S.** Hydrodynamic entrance lengths for incompressible laminar flow in rectangular ducts // Trans. ASME Ser. E. Appl. Mech. 1960. Vol. 27, No. 3. P. 403–409.

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2015 г.,
после доработки — 14 мая 2015 г.