

Итак, пусть задано значение функционала $H(f, \beta)$ для некоторой характеристики волнового процесса $f(z)$. Требуется найти неизвестный параметр среды β . Для решения обратной задачи использована (2.4):

$$(5.1) \quad H(V, \gamma) = \max_t |V^{ac}(0)| / \max_t |V^{ac}(l)| = h_0,$$

h_0 получаем из численного решения прямой задачи для различных упрощенных моделей; λ зафиксирована таким образом, чтобы удовлетворялись все ограничения, наложенные при введении одномерной модели стержня и упрощенных моделей среды. Параметр γ определялся из (5.1). В проведенном численном эксперименте $\gamma = 0,025$. В табл. 2 приведены найденные из (5.1) значения γ при решении обратной задачи для различных λ и относительные погрешности по сравнению с истинным γ ($l = 60$, $a = 2b$).

В заключение сформулируем основные выводы. 1. Обоснован переход от теории упругости к упрощенным моделям среды при описании нестационарных колебаний упругого стержня в полупространстве. 2. Проанализировано влияние свойств среды на характер волновой картины в стержне и показано, что основными параметрами, ответственными за затухание колебаний, являются частота возбуждаемой нагрузки, плотность и сдвиговая жесткость среды. Влияние объемной жесткости незначительно. 3. В практических расчетах можно при построении решения использовать приближенные аналитические оценки, полученные для сдвиговой модели среды.

Автор выражает благодарность Х. Б. Ткачу за постановку задачи и М. В. Степаненко за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.
2. Рахматулин Х. А. О распространении упругопластических волн в полупространстве // ПММ.— 1959.— Т. 23, вып. 3.
3. Ормонбеков Т. Взаимодействие конструкций со средой.— Фрунзе: Илим, 1983.
4. Михайлов А. М. Динамика однонаправленного стеклопластика // ПМТФ.— 1974.— № 4.
5. Степаненко М. В. О динамике разрушения однонаправленного стеклопластика // ПМТФ.— 1979.— № 4.
6. Степаненко М. В. Численный эксперимент по динамике разрушения композитного материала // Механика композит. материалов.— 1981.— № 1.
7. Outwater I. O., Jr. The mechanics of plastics reinforcement in tension // Modern Plastics.— 1956.— V. 33, N 7.
8. Михайлов А. М. Неосесимметричное динамическое нагружение оболочки с ребрами жесткости // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 1.
9. Абдукадыров С. А., Пинчукова Н. И., Степаненко М. В. Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред и конструкций // ФТПРПИ.— 1984.— № 6.

г. Новосибирск

Поступила 2/XII 1988 г.,
в окончательном варианте — 24/III 1989 г.

УДК 621.762

С. Е. Александров, Б. А. Друянов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСТАНОВИВШЕЙСЯ ЭКСТРУЗИИ УПЛОТНЯЕМОГО МАТЕРИАЛА

При прессовании пористых пластичных материалов (металлов) обработке обычно подвергается предварительно уплотненная заготовка, представляющая собой связанное, хотя и поврежденное тело (поры, микротрещины), плотность которого может составлять 90...95 % от плотности твердой фазы. Экструзия начнется, когда давление пуансона станет достаточно большим. Геометрическая схема процесса показана на рис. 1: 1 — матрица, 2 — пуансон, 3 — заготовка, 4 — контейнер. Установившееся

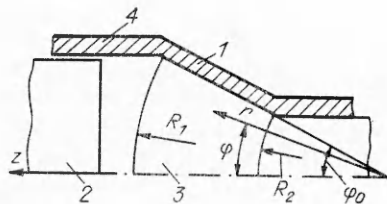


Рис. 1

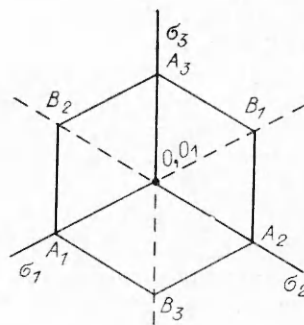


Рис. 2

течение возможно, когда начальная плотность материала ρ_0 настолько велика, что давление на пуансон, необходимое для спрессовывания материала в контейнере, больше давления, необходимого для начала экструзии. В этом случае экструзия будет происходить без уплотнения в контейнере и на вход в матрицу будет подаваться материал одной и той же плотности, равной ρ_0 . То, что такая ситуация возможна, показывает экструзия неуплотняемого материала. Добавим, что процесс установится не сразу, а только после того, как из матрицы выйдет материал, заполнявший ее вначале. Процесс установившейся экструзии уплотняемого материала рассматривался в ряде работ (например, [1, 2]).

Условие текучести. Простейшим обобщением условия текучести Треска на уплотняемые материалы является условие, которому в пространстве главных напряжений соответствуют правильные шестиугольные пирамиды с общим основанием, лежащим в девиаторной плоскости [3], и вершинами на гидростатической оси (рис. 2). Это условие текучести запишем в виде

$$|\sigma_i - \sigma_j|/(2\tau_s) + |\sigma|/p_s = 1.$$

Здесь σ_i, σ_j — главные напряжения; σ — среднее напряжение; τ_s и p_s — пределы текучести на сдвиг и всестороннее равномерное сжатие, при этом τ_s и p_s — известные функции плотности ρ (ρ — плотность материала, отнесенная к плотности твердой фазы). Бесконечная пирамида с такими гранями рассмотрена в [4].

Определение плотности прессования. Примем, что матрица — это усеченный круговой конус с углом раствора φ_0 . Используем сферическую систему координат r, φ, θ (см. рис. 1). Пусть v_r, v_φ, v_θ — проекции скорости на соответствующие координатные направления.

Ограничимся случаем, когда на вход в матрицу поступает однородный материал плотности ρ_0 , а сама матрица неподвижна. Тогда в силу симметрии относительно оси матрицы можно положить $v_\theta = 0$. Так как $v_\varphi = 0$ на оси симметрии матрицы и ее стенках, то характер течения близок к пространственному радиальному течению. Следовательно, можно сказать, что $v_\varphi = 0$. Конечно, это выполняется, если матрица не слишком коротка. Предположим также, как это обычно делается в аналогичных ситуациях, что влияние контактного трения сказывается только вблизи стенок матрицы, так что сдвигами в основной массе материала можно пренебречь. Примем, что радиальная скорость зависит только от полярного радиуса: $v_r = v(r)$.

При свободном истечении сыпучих материалов через коническую воронку наблюдалось завихрение потока, т. е. потеря осевой симметрии [5]. Однако при прессовании скомпактированных заготовок такие явления не обнаружены. Поэтому предположение об осевой симметрии потока представляется обоснованным.

Компоненты скоростей деформаций: $\epsilon_r = dv/dr$, $\epsilon_\varphi = \epsilon_\theta = v/r$. Остальные компоненты равны нулю. Так как $v < 0$, то $\epsilon_\varphi < 0$, $\epsilon_\theta < 0$. Чтобы установить знак ϵ_r , заметим, что для несжимаемого, а следовательно, и для достаточно плотных сжимаемых материалов $\epsilon_r > 0$. Этим требованиям отвечает ребро O_1A_1 условия текучести (см. рис. 2), причем

направлениям r, φ, θ соответствуют направления 1, 2, 3. Вершина пирамиды O_1 лежит в полупространстве $\sigma < 0$.

Уравнения ребра O_1A_1 запишем в форме

$$(1) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\tau_s} - \frac{\sigma}{p_s} = 1, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\tau_s} - \frac{\sigma}{p_s} = 1.$$

Положим в (1) $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 = \sigma_\varphi, \sigma_3 = \sigma_\theta$. Из (1) следует, что $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, отсюда

$$(2) \quad \sigma_r/\alpha - \sigma_\varphi/\beta = 1, \quad \sigma_\varphi - \sigma_\theta = 0,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{6\tau_s p_s}{3p_s - 2\tau_s}, \quad \beta = \frac{6\tau_s p_s}{3p_s + 4\tau_s}.$$

Применяя к (2) ассоциированный закон течения, получаем $\varepsilon_r = \lambda/\alpha, \varepsilon_\varphi = -\lambda/2\beta$. Исключая λ из этих уравнений, приходим к соотношению $\varepsilon_r(3p_s + 4\tau_s) + 2\varepsilon_\varphi(3p_s - 2\tau_s) = 0$. Подставляя выражения для ε_r и ε_φ , имеем

$$(3) \quad (3p_s + 4\tau_s)(dv/dr) + 2(3p_s - 2\tau_s)(v/r) = 0.$$

Примем $p_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\rho^2 k}{(1-\rho)^{1/2}}, \tau_s = \rho^{3/2} k$ [6]. Тогда уравнение (3) будет

иметь вид

$$(4) \quad (dv/dr) [\sqrt{3}\rho^{1/2} + 2(1-\rho)^{1/2}] + 2(v/r) [\sqrt{3}\rho^{1/2} - (1-\rho)^{1/2}] = 0.$$

Уравнение неразрывности при сделанных предположениях и в силу установившегося характера течения представляет собой $(v/\rho)(d\rho/dr) + dv/dr + 2v/r = 0$. Оно имеет интеграл $\rho v r^2 = c_1$. Константа c_1 определяется из условий на входе в матрицу ($v = v_1, \rho = \rho_1$ при $r = R_1$): $c_1 = \rho_1 v_1 R_1^2$. Таким образом, $v = \rho_1 v_1 R_1^2 / (\rho r^2)$. Подставляя это v в (4), получаем уравнение относительной плотности

$$(5) \quad \frac{dr}{r} + \frac{2}{3} g(\rho) d\rho = 0 \left(g(\rho) = \frac{\sqrt{3}\rho^{1/2} + 2(1-\rho)^{1/2}}{4\rho(1-\rho)^{1/2}} \right).$$

Интеграл этого уравнения, удовлетворяющий условию $\rho = \rho_1$ при $r = R_1$, записывается как

$$(6) \quad \ln(r/R_1) + (2/3) G(\rho_1, \rho) = 0,$$

$$\text{где } G(\rho_1, \rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} g(\rho) d\rho = (\sqrt{3}/2) (\arcsin \rho^{1/2} - \arcsin \rho_1^{1/2}) + (1/2) \ln(\rho/\rho_1).$$

Видно, что при некотором $r = \bar{R}_* > 0$ частицы материала достигают предельной плотности $\rho = 1$. Случай $R_2 < R_*$ требует специального изучения и здесь не рассматривается, т. е. считаем $R_2 \geq R_*$.

Полагая $\rho = \rho_2$ при $r = R_2$ в (6), получаем уравнение, определяющее плотность ρ_2 на выходе из матрицы:

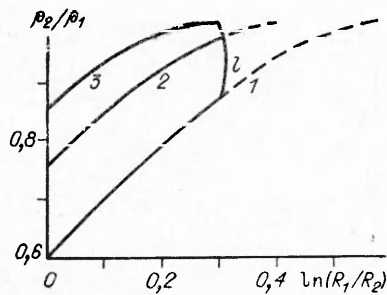
$$(7) \quad \ln(R_1/R_2) - (2/3) G(\rho_1, \rho_2) = 0.$$

Так как течение установившееся, то $\rho_1 = \text{const}$.

На рис. 3 ($1-3 - \rho_1 = 0,85; 0,75; 0,6$) показаны графики зависимости ρ_2/ρ_1 для различных ρ_1 от величины редукиции, за которую принят $\ln(R_1/R_2)$.

Расчет давления прессования. Уравнение равновесия составим по методу Хилла [7]. Уравнение виртуальных мощностей при сделанных предположениях о характере течения дает

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\varphi_0} \left(r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \sin \varphi + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{r\varphi} \sin \varphi) \right) v r d\varphi dr = 0.$$



Р и с. 3

Предположим, что нормальные напряжения зависят только от полярного радиуса r , и выполним интегрирование по φ . Учитывая, что v — произвольная функция r , получаем уравнение равновесия

$$(8) \quad d\sigma_r/dr + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi)/r + (\tau_{r\varphi}/r) \operatorname{ctg}(\varphi_0/2) = 0.$$

Величина $\tau_{r\varphi}$ определяется из условий трения на поверхности матрицы. По закону трения Кулона $\tau_{r\varphi} = f|\sigma_\varphi| = -f\sigma_\varphi$. После подстановки этого выражения (8) принимает вид

$$(9) \quad rd\sigma_r/dr + 2\sigma_r - 2a\sigma_\varphi = 0, \quad a = 1 + 0,5f \operatorname{ctg}(\varphi_0/2).$$

Выражая σ_φ через σ_r из (2) и подставляя в (9), приходим к дифференциальному уравнению относительно σ_r . Используя (5), перейдем от независимого переменного r к аргументу ρ . После преобразований получим дифференциальное уравнение

$$(10) \quad \frac{d\sigma_r}{\frac{r}{\rho} d\rho} - h(\rho) \frac{\sigma_r}{\rho} = h_0(\rho),$$

где $h(\rho) = [a(\sqrt{3}\rho^{1/2} - (1 - \rho)^{1/2}) - (\sqrt{3}\rho^{1/2} + 2(1 - \rho)^{1/2})]/[3\rho(1 - \rho)^{1/2}]$, $h_0(\rho) = 2\rho a/[\sqrt{3}(1 - \rho)^{1/2}]$. Решение (10), удовлетворяющее условию $\sigma_r = 0$ при $r = R_2$, имеет вид

$$(11) \quad \frac{\sigma_r}{k} = \exp(H(\rho)) \int_{\rho_2}^{\rho} h_0(\rho) \exp(-H(\rho)) d\rho \quad \left(H(\rho) = \int_{\rho_2}^{\rho} h(\rho) d\rho \right).$$

Давление p_1 у входа в матрицу, необходимое для установившейся экструзии, определяется формулой (11) при $\rho = \rho_1$:

$$(12) \quad \frac{p_1}{k} = \exp(H(\rho_1)) \int_{\rho_1}^{\rho_2} h_0(\rho) \exp(-H(\rho)) d\rho.$$

Так как ρ_1 связано с ρ_2 соотношением (7), то формула (12) выражает давление у входа в матрицу p_1 через плотность материала ρ_1 в этом же месте. При установившейся экструзии на вход в матрицу должен подаваться материал одной и той же плотности, что возможно только при достаточно большой начальной плотности, когда этап спрессовывания в контейнере отсутствует. Если пренебречь упругими деформациями материала, то при отсутствии спрессовывания давление под пуансоном p равно давлению на входе в матрицу p_1 . Значение p , при котором в контейнере начинается спрессовывание, выражается через начальную плотность [8] как

$$(13) \quad \frac{p}{k} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{3}(1 - \rho_0)^{1/2}}.$$

Спрессовывание будет отсутствовать, если p будет больше p_1 , определяемого (12). Максимальное значение начальной плотности ρ_0 , при которой спрессовывание в контейнере еще имеет место, удовлетворяет уравнению

$$(14) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0)^{1/2}} = \exp(H(\rho_0)) \int_{\rho_0}^{\rho_2} h_0(\rho) \exp(-H(\rho)) d\rho,$$

которое получается, если приравнять правые части формул (12) и (13), заменив в них ρ_1 и ρ_0 на ρ_0 . Уравнения (14) и (7), в которых также надо заменить ρ_1 на ρ_0 , определяют ρ_0 в зависимости от $\ln(R_1/R_2)$.

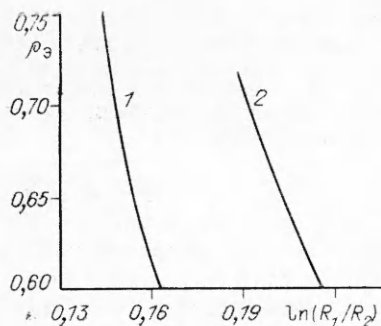


Рис. 4

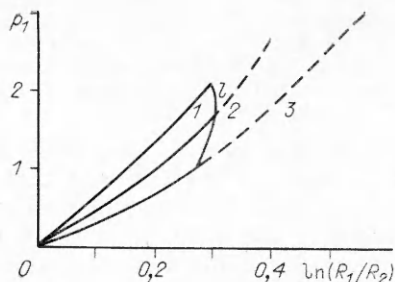


Рис. 5

Графики этой зависимости для $a = 2,72$ (кривая 1) и $2,15$ (кривая 2) показаны на рис. 4. На рис. 5 представлены графики зависимости давления на входе в матрицу от редукции при $\rho_1 = 0,85; 0,75; 0,6$ (кривые 1—3 соответственно) и $a = 2,72$.

Рассмотренное решение справедливо, только если $0 \leq |\sigma| \leq p_s$ [2]. Так как величина $|\sigma|$ уменьшается по мере продвижения частицы к выходу из очага деформации, а плотность растет, то достаточно проверять условие $p_1 \leq p_s$ у входа в матрицу. Его выполнимость зависит от начальной плотности и величины редукции. На рис. 3 и 5 линия l определяет максимальную величину редукции $\ln(R_1/R_2)$ в зависимости от начальной плотности.

Сплошными линиями выделены участки графиков, где имеет силу приведенное выше решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Г. Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. — М.: Металлургия, 1988.
2. Друянов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. — М.: Машиностроение, 1989.
3. Друянов Б. А., Вишняков Л. Р., Александров С. Е. О расчетах процессов деформирования сжимаемых анизотропных тел // Технологическая и конструкционная пластичность порошковых материалов. — Киев: Наук. думка, 1988.
4. Drucker D. C. Limit analysis of two and three-dimensional soil mechanics problems // J. Mech. Phys. Solids. — 1953. — V. 1, N 4.
5. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // ДАН СССР. — 1979. — Т. 246, № 3.
6. Скорород В. В., Тучинский Л. И. Условие пластичности пористых тел // Порошковая металлургия. — 1978. — № 11.
7. Хилл Р. Общий метод анализа процессов металлообработки // Механика: Сб. пер. иностр. лит-ры. — 1964. — № 3.
8. Александров С. Е., Друянов Б. А. Спрессовывание уплотняемых материалов в закрытой прессформе // ПМТФ. — 1990. — № 1.

г. Москва

Поступила 8/VIII 1988 г.,
в окончательном варианте — 21/II 1989 г.

УДК 531:539.3

И. И. Кудиш

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ УСТАЛОСТНОГО ИЗНАШИВАНИЯ И ВЫКРАШИВАНИЯ

В [1, 2] проведен анализ поведения коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах поверхностных трещин, расположенных в упругой преднапряженной полуплоскости, на границу которой действуют нормальные и касательные контактные напряжения. Коэффициенты интенсивности напряжений определяют развитие тре-

© 1990 Кудиш И. И.

10 ПМТФ № 4, 1990 г.

145