УДК 539.3

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА СЛУЧАЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

А. Б. Нерубайло, Б. В. Нерубайло

Московский государственный авиационный институт (Технический университет),
125871 Москва
E-mail: prof_nebo@mail.ru

Получены дифференциальные уравнения общей теории трансверсально-изотропных цилиндрических оболочек, являющиеся в определенном смысле обобщением уравнений Власова и Амбарцумяна. Это позволило на основе критерия Новожилова — сравнения изменяемости напряженного состояния в главных ортогональных направлениях — произвести расчленение исходных уравнений по Гольденвейзеру на приближенные уравнения типа полубезмоментной теории, теории краевого эффекта и изгибного состояния, являющиеся также обобщением уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния изотропной оболочки. Найдены численные значения критериев сращивания приближенных уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния при асимптотическом синтезе полного напряженного состояния. Приведены примеры расчета и экспериментальные данные для оболочки с учетом и без учета деформации поперечного сдвига.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки, напряженное состояние, уравнение Власова.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки при действии нормальной нагрузки, произвольно распределенной по ее поверхности. В частном случае это может быть локально приложенная или сосредоточенная сила.

1. Оболочка предполагается изготовленной из трансверсально-изотропного материала, у которого в каждой ее точке плоскость изотропии параллельна срединной поверхности, так что главное направление упругости, перпендикулярное к плоскости изотропии, в каждой точке оболочки совпадает с соответствующей нормалью γ.

Принимаются следующие предположения:

— касательные напряжения на площадках, перпендикулярных к срединной поверхности, или соответствующие им сдвиговые деформации по толщине оболочки меняются по заданному закону;

— нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение не зависит от координаты по толщине;

— нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрегается.

Математически это означает, что

$$\begin{gathered}\tau_{\alpha\gamma} = (h^2/8 - \gamma^2/2)\varphi(\alpha,\beta), \qquad \tau_{\beta\gamma} = (h^2/8 - \gamma^2/2)\psi(\alpha,\beta), \\ \varepsilon_\gamma = 0, \qquad w = w(\alpha,\beta), \qquad \sigma_\gamma \approx 0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $w(\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$ — искомые функции безразмерных продольной (α) и окружной (β) координат.

Получены дифференциальные уравнения, являющиеся в определенном смысле обобщением уравнений Власова [1] и Амбарцумяна [2], которые могут быть названы дифференциальными уравнениями общей теории трансверсально-изотропных оболочек. Это позволило на основе критерия В. В. Новожилова [3] сравнения изменяемости напряженного состояния в главных ортогональных направлениях произвести расчленение исходных уравнений по А. Л. Гольденвейзеру [4] на приближенные уравнения, являющиеся также обобщением уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния. Сформулированные ранее методы асимптотического синтеза (МАС) напряженно-деформированного состояния [5, 6] здесь обобщаются на случай оболочек из трансверсально-изотропного материала.

В отличие от постановки задачи, принятой в [2], здесь не накладывается ограничений на длину, подъемистость оболочки, на изменяемость внешней нагрузки и напряженно-деформированного состояния. Тогда для внутренних усилий, изгибающих и крутящих моментов, с учетом принятых гипотез (1.1) получаем следующие дифференциальные зависимости, обобщающие их аналоги в работах [1, 2]:

$$\begin{gathered}
T_1 = \frac{Eh}{R}\Big[\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \nu\Big(\frac{\partial v}{\partial\beta} - w\Big) + c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\Big], \qquad T_2 = \frac{Eh}{R}\Big[\frac{\partial v}{\partial\beta} - w + \nu\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} - c^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + w\Big)\Big],\\
S_1 = \frac{Eh}{2(1+\nu)R}\Big(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\,c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Big), \qquad S_2 = \frac{Eh}{2(1+\nu)R}\Big(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha} - c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Big),\\
G_1 = -\frac{D}{R^2}\Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Big)w + \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \nu\,\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{h^2R}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \nu\,\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big)\Big],\\
G_2 = -\frac{D}{R}\Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)w + w - \frac{h^2R}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \nu\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big)\Big], \qquad (1.2)\\
G_{12} = (1-\nu)\frac{D}{R^2}\Big[\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big)\Big],\\
G_{21} = (1-\nu)\frac{D}{R^2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{\partial u}{\partial\beta}\Big) + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big)\Big],\\
Q_1 = h^3\varphi/12, \qquad Q_2 = h^3\psi/12.
\end{gathered}$$

В этих соотношениях, являющихся, как уже отмечалось, обобщением уравнений общей теории изотропных оболочек [1] и уравнений пологих трансверсально-изотропных оболочек [2], приняты следующие обозначения: E — модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии; ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G^γ — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Отметим, что механические характеристики материала оболочки в ортогональных плоскостях связаны известным соотношением: $\nu^{\gamma\gamma}E^\gamma = \nu^\gamma E$, где E^γ — модуль Юнга для направлений, перпендикулярных к плоскости изотропии; ν^γ — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном к этой плоскости; $\nu^{\gamma\gamma}$ — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии при растяжении в плоскости изотропии.

После подстановки выражений (1.2) в уравнения равновесия получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций $u(\alpha,\beta)$, $V(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Big)u + \frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \Big[\nu\,\frac{\partial}{\partial\alpha} - c^2\Big(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} - \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^3}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\Big)\Big]w = 0,$$

$$\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\Big(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)v-\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{3-\nu}{2}\,c^2\,\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}\Big)w-\frac{h^3}{12}\psi=0,$$

$$\nu\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}-w-c^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+w\Big)+\frac{1-\nu^2}{12}\,\frac{h^2R}{E}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big)=-\frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh}\,p(\alpha,\beta),$$

$$(1-\nu)\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial}{\partial\beta}\,(\nabla^2 w+w)- \tag{1.3}$$

$$-\frac{h^2R}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Big)+(1-\nu^2)\,\frac{R^3}{E}\psi=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\nabla^2 w-$$

$$-\frac{h^2R}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Big)+(1-\nu^2)\,\frac{R^3}{E}\,\varphi=0.$$

Система (1.3), состоящая из пяти разрешающих уравнений десятого порядка, может быть несколько преобразована к виду, принятому в общей теории изотропных оболочек [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\nu\,\frac{\partial w}{\partial\alpha}+c^2\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}-\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}\Big)=0,$$

$$\frac{1+\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{3-\nu}{2}\,c^2\,\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{h^3}{12}\,\psi, \tag{1.4}$$

$$\nabla^2\nabla^2 w+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3}-\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}+\frac{3-\nu}{2}\,\frac{\partial^3 v}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}-$$

$$-\frac{12R^2}{h^2}\,(1-\Omega\nabla^2)\Big[\nu\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}-w-c^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+w\Big)\Big]=\frac{R^4}{D}\,(1-\Omega\nabla^2)p(\alpha,\beta),$$

где параметр $\Omega=Eh^2/(10(1-\nu^2)G^\gamma R^2)$ характеризует влияние поперечных сдвигов на напряженно-деформированное состояние оболочки; D — цилиндрическая жесткость.

К системе уравнений (1.4) необходимо присоединить систему двух дифференциальных уравнений, связывающих искомые функции φ, ψ с перемещениями u, v, w:

$$\Big[(1-\nu^2)\,\frac{R^3}{E}-\frac{h^2R}{10G^\gamma}\,\nabla^2\Big]\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big)+\nabla^2\nabla^2 w+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3}-$$

$$-\frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}+\frac{3-\nu}{2}\,\frac{\partial^3 v}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}=0, \tag{1.5}$$

$$\nu\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}-w-c^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+w\Big)+\frac{1-\nu^2}{12}\,\frac{Rh^2}{E}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big)=-\frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh}\,p(\alpha,\beta).$$

Первое из уравнений (1.5) получено на основании четвертого и пятого уравнений (1.3), а второе — это третье уравнение системы уравнений (1.3).

Для получения приближенных уравнений, отвечающих наперед заданной изменяемости напряженно-деформированного состояния, представляет несомненный интерес сведе́ние системы уравнений (1.4) к классическому виду, предложенному Власовым [7]:

$$\nabla^2\nabla^2 u=-\nu\,\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}+c^2\Big(\frac{\partial^5 w}{\partial\alpha^5}-\frac{\partial^5 w}{\partial\alpha\,\partial\beta^4}\Big),$$

$$\nabla^2\nabla^2 v = -(2+\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta} - \frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3} + 2c^2\Big(\frac{\partial^5 w}{\partial\alpha^4\,\partial\beta} + \frac{\partial^5 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^3}\Big), \tag{1.6}$$

$$\nabla^2\nabla^2(\nabla^2+1)^2 w - 2(1-\nu)\Big(\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}\Big)\nabla^2 w + \frac{1-\nu^2}{c^2}\,(1-\Omega\nabla^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} = \frac{R^4}{D}\,(1-\Omega\nabla^2)\nabla^2\nabla^2 p(\alpha,\beta).$$

Как нетрудно заметить, первые два уравнения системы (1.6) полностью совпадают с уравнениями Власова [7], а третье содержит дополнительные члены, учитывающие деформацию поперечного сдвига в оболочке.

2. Полученная система уравнений (1.6) пригодна для решения задач о расчете трансверсально-изотропных цилиндрических оболочек при произвольно распределенной по поверхности оболочки нагрузке (без ограничений на размеры оболочки и на изменяемость нагрузки).

Рассмотрим упрощенные по критерию изменяемости нагрузки уравнения, которые могут давать пригодные результаты при анализе частных задач.

В случае напряженно-деформированного состояния, отвечающего критерию $|\partial^2 f/\partial\beta^2| \gg |\partial^2 f/\partial\alpha^2|$ (f — любая искомая функция: перемещение, усилие, момент и т. д.), на основании (1.6) получаем следующее уравнение относительно радиального перемещения $w(\alpha,\beta)$:

$$\Big(1-\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Big)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2}\,\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\Big)^2 w = \frac{R^2}{Eh}\Big(1-\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Big)\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\,p(\alpha,\beta). \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что в предлагаемой здесь механико-математической модели трансверсально-изотропной оболочки радиальное перемещение является разрешающей функцией, через которую с помощью дифференциальных операторов выражаются все силовые и деформационные факторы оболочки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \frac{\partial w}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial v}{\partial\beta} = w; \tag{2.2}$$

$$T_1 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R}\Big[\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \nu\Big(\frac{\partial v}{\partial\beta} - w\Big)\Big], \qquad T_2 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\Big(\frac{\partial v}{\partial\beta} - w + \nu\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\Big),$$

$$S_1 = S_2 = S = \frac{Eh}{2(1+\nu)R}\Big(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\Big),$$

$$G_1 = -\frac{D}{R^2}\Big[\nu\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+w\Big) - \frac{h^2R^2}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\nu\,\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big)\Big], \quad G_2 = -\frac{D}{R^2}\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+w - \frac{h^2R^2}{10G^\gamma}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\nu\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big)\Big], \tag{2.3}$$

$$Q_1 = h^3\varphi/12, \qquad Q_2 = h^3\psi/12.$$

Вместо (1.5) дифференциальные уравнения, связывающие φ и ψ с перемещениями, теперь принимают вид

$$\Big[(1-\nu^2)\,\frac{R^3}{E} - \frac{h^2R}{10G^\gamma}\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Big]\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big) + \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} = 0,$$

$$\nu\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial v}{\partial\beta} - w + \frac{1-\nu^2}{12}\,\frac{h^2R}{E}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\Big) = -\frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh}\,p(\alpha,\beta). \tag{2.4}$$

Напряженное состояние, удовлетворяющее критерию $|\partial^2 f/\partial\alpha^2| \gg |\partial^2 f/\partial\beta^2|$, может быть описано с помощью дифференциального уравнения, полученного посредством применения этого сильного неравенства к последнему уравнению (1.6):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \frac{1-\nu^2}{c^2}\,\Big(1-\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)w = \frac{R^4}{D}\Big(1-\Omega\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)p(\alpha,\beta). \tag{2.5}$$

Выражения для перемещений (1.6) и силовых факторов (1.2) также упрощаются.

Критерию $|\partial^2 f/\partial\alpha^2| \approx |\partial^2 f/\partial\alpha^2| \gg f$, соответствующему случаю приблизительно одинаковой изменяемости напряженно-деформированного состояния в направлениях α и β, отвечает следующая система уравнений:

$$\begin{gathered}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + \frac{1-\nu^2}{c^2}\,(1-\Omega\nabla^2)\,\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} = \frac{R^4}{D}\,(1-\Omega\nabla^2)\nabla^2\nabla^2 p(\alpha,\beta),\\ \nabla^2\nabla^2 u = -\nu\,\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}, \qquad \nabla^2\nabla^2 v = -(2+\nu)\,\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\,\beta} - \frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Когда изменяемость напряженного состояния оболочки настолько велика, что в разрешающем уравнении (1.6) можно пренебречь всеми членами по сравнению с членами, содержащими старшие производные, имеем разрешающее уравнение

$$\nabla^2\nabla^2 w = (R^4/D)(1-\Omega\nabla^2)p(\alpha,\beta). \tag{2.7}$$

Таким образом, полученные здесь уравнения (2.1)–(2.5), (2.6), (2.7) обобщают уравнения полубезмоментной теории, теории краевого эффекта и изгибного состояния на случай трансверсально-изотропных оболочек.

3. В качестве примера применения некоторых из полученных здесь уравнений рассмотрим действие на бесконечно длинную оболочку радиальной нагрузки, кусочно-постоянной в продольном направлении и косинусоидальной вдоль контура:

$$p(\alpha,\beta) = p_0\theta(\alpha)\cos n\beta \qquad (n = 0, 2, 3, 4, \dots), \tag{3.1}$$

где p_0 — амплитудное значение давления; $\theta(\alpha) = 1$ при $|\alpha| \leqslant \alpha_0$; $\theta(\alpha) = 0$ при $|\alpha| > \alpha_0$.

Представим функцию $\theta(\alpha)$ в форме интеграла Фурье, тогда

$$p(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi}\,p_0\cos n\beta\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda}\,\sin\alpha_0\lambda\cos\alpha\lambda\,d\lambda. \tag{3.2}$$

Решение уравнений (1.6) общей теории трансверсально-изотропных оболочек ищем в виде

$$u(\alpha,\beta) = \cos n\beta\int\limits_0^\infty U_n(\lambda)\sin\alpha\lambda\,d\lambda,$$

$$v(\alpha,\beta) = \sin n\beta\int\limits_0^\infty V_n(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda, \qquad w(\alpha,\beta) = \cos n\beta\int\limits_0^\infty W_n(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda.$$

Неизвестные коэффициенты $U_n(\lambda)$, $V_n(\lambda)$, $W_n(\lambda)$ найдем в результате подстановки этих разложений в (1.6), а затем могут быть записаны и выражения в виде несобственных интегралов для всех интересующих нас усилий и моментов. Ограничимся лишь записью радиального перемещения:

$$w(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{p_0R^4}{D}\,\cos n\beta\int\limits_0^\infty \frac{\tilde{w}_n(\lambda)}{\lambda\tilde{L}_n(\lambda)}\,\sin\alpha_0\lambda\cos\alpha\lambda\,d\lambda; \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\tilde{w}_n(\lambda) = [1+\Omega(\lambda^2+n^2)](\lambda^2+n^2)^2,\\ \tilde{L}_n(\lambda) = (\lambda^2+n^2)^2(\lambda^2+n^2-1)^2 + 2(1-\nu)\lambda^2(\lambda^2-n^4) + \frac{1-\nu^2}{c^2}\,[1+\Omega(\lambda^2+n^2)]\lambda^4.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Решение, построенное на основе уравнений общей теории, позволяет найти напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной оболочки с достаточной степенью точности. Но если рассматривать нагрузки локального характера, то реализация таких решений требует трудоемкой вычислительной работы, и, видимо, полностью исключается возможность получения удобных для априорных оценок формул.

Поэтому рассмотрим применение методов асимптотического синтеза напряженного состояния, в которых полученные здесь системы уравнений могут играть роль основного состояния (2.1)–(2.3), краевого эффекта (2.5), напряженного состояния с высокой изменяемостью (2.6) и изгибного состояния (2.7).

При переходе от уравнений общей теории (1.6) к уравнениям модифицированной полубезмоментной теориии (2.1)–(2.3) и теории краевого эффекта (2.5) полученный ранее критерий [6], основанный на обеспечении минимума асимптотической погрешности, следует признать справедливым.

Что же касается перехода от уравнений общей теории (1.6) к (2.6), то в последнем соотношении (3.4) следует положить

$$\bar{L}_n(\lambda) \approx (\lambda^2 + n^2)^4 + (1 - \nu^2)[(1 + \Omega(\lambda^2 + n^2)]\lambda^4/c^2,$$

а затем найти значение n, при котором можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, т. е. когда

$$(\lambda^2 + n^2)^4 \gg (1 - \nu^2)[1 + \Omega(\lambda^2 + n^2)]/c^2. \qquad (3.5)$$

Далее, если принять, как это было сделано в [8] в соответствии с [3], что $\sqrt{R/h} \gg 1$, а не $R/h \gg 1$, как в общей теории оболочек, то вместо сильного неравенства (3.5) получаем равенство

$$\lambda^8 + 4\lambda^6 n^2 + 6\lambda^4 n^4 + 4\lambda^2 n^6 + n^8 \cong 12(1 - \nu^2)(R/h)^2 \sqrt{R/h}\,[1 + \Omega(\lambda^2 + n^2)]\lambda^4. \qquad (3.6)$$

Для отыскания критериального значения n^* следует, как это было сделано в [6], приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ.

Тогда получаем

$$n = \sqrt{A\Omega + \sqrt{A^2\Omega^2 + 24A}}\,/(2\sqrt{3}), \qquad A = 12(1 - \nu^2)(R/h)^{5/2}. \qquad (3.7)$$

Округленное до ближайшего целого числа n, найденное по формуле (3.7), дает искомое значение номера гармоники $n = n^*$, обобщающее аналогичное значение в МАС теории изотропных оболочек.

4. В качестве иллюстрации эффективности применения рассматриваемого подхода обратимся к случаю действия на бесконечно длинную оболочку самоуравновешенной системы локальных радиальных нагрузок. Тогда вместо (3.2) имеем

$$p(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi}\, p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\lambda}\, \sin \alpha_0\lambda \cos \alpha\lambda\, d\lambda, \qquad (4.1)$$

где $\theta_n = k\beta_0/\pi$ $(n = 0)$, $\theta_n = 2 \sin kn\beta_0/(\pi n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$; k — число нагруженных областей, равномерно распределенных по контуру оболочки при $\alpha = 0$.

Решение, построенное для n-го номера ряда в форме (3.3), (3.4) на основе уравнений общей теории, может быть легко обобщено на рассматриваемый здесь случай локального воздействия: для этого достаточно подставить в него значение коэффициента θ_n из (4.1) и предусмотреть операцию суммирования по n.

Здесь мы остановимся только на радиальном перемещении. Получим его на основе уравнений модифицированной полубезмоментной теории (2.1). Оно почти автоматически вытекает из (3.4), если принять во внимание (4.1):

$$w(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi}\, p_0\, \frac{k^4R^2}{Eh} \sum_{n=1}^{n^*} n^4\theta_n \cos kn\beta \int\limits_0^\infty \frac{(1+\Omega k^2n^2)\sin\alpha_0\lambda}{\lambda[(1+\Omega k^2n^2)\lambda^4 + 4\bar{\mu}_n^4]}\, \cos\alpha\lambda\, d\lambda, \tag{4.2}$$

где $4\bar{\mu}_n^4 = (c^2/(1-\nu^2))k^4n^4(k^2n^2-1)^2$.

Поделим числитель и знаменатель на $(1+\Omega k^2n^2)$ и, приняв во внимание, что $p_0 = P/(4\alpha_0\beta_0R^2)$, где P — полная нагрузка на одну область, получим

$$\frac{ER}{P}\, w(\alpha,\beta) = \frac{k^4}{2\pi\alpha_0\beta_0}\, \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{n^*} n^4\theta_n \cos kn\beta \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha_0\lambda\cos\alpha\lambda\, d\lambda}{\lambda(\lambda^4+4\mu_n^4)}, \tag{4.3}$$

где $4\mu_n^4 = (c^2/(1-\nu^2))k^2n^2(k^2n^2-1)^2/(1+\Omega k^2n^2)$.

В отличие от радиального перемещения (3.4), найденного по общей теории трансверсально-изотропных оболочек, полученное на основе модифицированных уравнений полубезмоментной теории перемещение (4.3) может быть записано (после взятия интеграла) в форме простого аналитического выражения:

$$\frac{ER}{P}\, w(\alpha,\beta) = \frac{k^4}{16\pi\alpha_0\beta_0}\, \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n^3}{\mu_n^4}\, \sin kn\beta_0 f_n(\alpha) \cos kn\beta, \tag{4.4}$$

где $f_n(\alpha) = 2 - \zeta(\alpha_0-\alpha) - \zeta(\alpha_0+\alpha)$, $\alpha \leqslant \alpha_0$; $f_n(\alpha) = \zeta(\alpha-\alpha_0) - \zeta(\alpha+\alpha_0)$, $\alpha > \alpha_0$; $\zeta(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mu_n\alpha}\cos\mu_n\alpha$.

В качестве примера расчета принималась бесконечно длинная оболочка радиусом $R = 27{,}25$ мм и толщиной $h = 0{,}82$ мм. Нагруженная область характеризовалась параметрами $\alpha_0 = \beta_0 = 0{,}005$, а степень анизотропии — отношением $E/G^\gamma = 80$. На оболочку действуют две противоположно направленные по диаметру силы, так что $k = 2$.

Представим результаты расчета по формуле (4.3) радиального перемещения под силой: $(ER/P)w(0,0) = 4659$ при $\Omega = 0$, т. е. без учета поперечного сдвига, и $(ER/P)w(0,0) = 5275$ с учетом поперечного сдвига.

В данном случае учет поперечного сдвига приводит к увеличению радиального перемещения примерно на 12 %. Отметим, что трудоемкость предложенного решения несоизмеримо меньше, чем по общей теории оболочек. Локальный краевой эффект здесь лишь незначительно корректирует перемещение, а роль изгибного состояния практически не заметна.

Представляет интерес сравнение перемещения, найденного по формуле (4.3) при $\Omega = 0$ ($w(0,0) = 0{,}0854$ мм), с решением по общей теории также при $\Omega = 0$ ($w(0,0) = 0{,}0879$ мм) и с прецизионным экспериментом [8] для оболочки с приведенными выше размерами ($w(0,0) = 0{,}0900$ мм).

Отметим, что значение перемещения, найденного по формуле (4.3), при $E/G^\gamma = 80$ для этой же оболочки $w(0,0) = 0{,}0967$ мм. Это говорит о хорошей корреляции всех полученных числовых результатов и достоверности предложенных уравнений и методов их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике // Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

2. **Амбарцумян С. А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
3. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
4. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
5. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991.
6. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.** О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // Докл. АН СССР. 1983. № 3. С. 54–56.
7. **Власов В. З.** Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек // Прикл. математика и механика. 1944. Т. 5, вып. 2.
8. **Нерубайло Б. В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983.

Поступила в редакцию 22/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 28/VI 2004 г.