

AMS subject classification: 65M06, 65M12, 65M22

Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение к физическим задачам

Р.К. Моханти¹, Д. Каур²

¹Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, South Asian University, Akbar Bhawan, Chanakyapuri, New Delhi 110021, India

²Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Delhi, Delhi 110007, India

E-mails: rmohanty@sau.ac.in (Р.К. Моханти), deeptimaths15@gmail.com (Д. Каур)

Моханти Р.К., Каур Д. Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение к физическим задачам // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 1. — С. 65–82.

В данной статье используется новая двухуровневая неявная разностная формула для численного исследования одномерного нестационарного бигармонического уравнения с подходящими начальными и граничными условиями. Предлагаемая разностная схема имеет второй порядок точности по времени и третий порядок точности в пространстве на неоднородной сетке, а в случае однородной сетки она имеет второй порядок точности по времени и четвертый порядок точности в пространстве. Приближенные решения вычисляются без использования каких-либо преобразований и линеаризации. Простота предлагаемой схемы — в ее трехточечной пространственной дискретизации, которая дает блочную трехдиагональную матричную структуру без использования фиктивных узлов для обработки граничных условий. Предлагаемая схема применима к сингулярным задачам, что представляет собой основную полезность нашей работы. Показано, что этот метод является безусловно устойчивым для модельной линейной задачи для однородной сетки. Эффективность предлагаемого подхода проверена на нескольких физических задачах, включая сложные нелинейные уравнения четвертого порядка, такие как уравнение Курамото–Сивашинского и расширенное уравнение Фишера–Колмогорова, где проводится сравнение с некоторыми более ранними работами. Численные эксперименты показывают, что полученные результаты не только хорошо соответствуют точным решениям, но также конкурентоспособны с решениями, полученными в более ранних исследованиях.

DOI: 10.15372/SJNM20180105

Ключевые слова: нестационарная квазилинейная бигармоническая задача, внешаговая дискретизация, уравнение Курамото–Сивашинского, расширенное уравнение Фишера–Колмогорова, блочная трехдиагональная матричная структура, неоднородная сетка.

Mohanty R.K., Kaur D. Compact difference scheme with high accuracy for one dimensional unsteady quasi-linear biharmonic problem of second kind: Application to physical problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 1. — P. 65–82.

The present paper uses a new two level implicit difference formula for the numerical study of one dimensional unsteady biharmonic equation with appropriate initial and boundary conditions. The proposed difference scheme is second order accurate in time and third order accurate in space on a non-uniform grid and in case of a uniform mesh, it is of order two in time and four in space. The approximate solutions are computed without using any transformation and linearization. The simplicity of the proposed scheme lies in its three point spatial discretization which yields a block tri-diagonal matrix structure without the use of any fictitious nodes for handling the boundary conditions. The proposed scheme is directly applicable to singular problems, which is the main utility of our work. The method is shown to be unconditionally stable for a model

linear problem for a uniform mesh. The efficacy of the proposed approach has been tested on several physical problems, including complex fourth-order nonlinear equations like the Kuramoto–Sivashinsky equation and the extended Fisher–Kolmogorov equation, where comparison is made with some earlier work. It is clear from the numerical experiments that the obtained results are not only in good agreement with the exact solutions but also competitive with the solutions derived in earlier research studies.

Keywords: *unsteady biharmonic problem, off-step discretization, Kuramoto–Sivashinsky equation, extended Fisher–Kolmogorov equation, block tri-diagonal matrix structure, non-uniform mesh.*

1. Введение

Рассмотрим одномерное нестационарное квазилинейное бигармоническое уравнение следующего вида:

$$A(x, t, u, u_{xx}) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}), \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

$$u(a, t) = b_0(t), \quad u(b, t) = b_1(t), \quad u_{xx}(a, t) = c_0(t), \quad u_{xx}(b, t) = c_1(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где предполагается, что $u(x, t) \in C^6$ и коэффициент $A \in C^4$ для получения приемлемой локальной ошибки усечения. Кроме того, предполагается, что функции f , u_0 , b_0 , b_1 , c_0 и c_1 достаточно гладкие и существуют их производные высокого порядка, требуемые для сохранения порядка точности рассматриваемой компактной разностной схемы. Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) (1) вместе с начальными и граничными условиями (2), (3) образуют одномерную нестационарную бигармоническую задачу второго рода. Уравнение (1) описывает широкий класс физических нелинейных процессов, таких как диссипативный механизм систем реакции–диффузии, длинные волны на тонких пленках и образование структур в бистабильных системах.

Важным частным случаем (1) является обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского (ОУКС), представляющее собой модель нелинейных ДУЧП, демонстрирующих хаотическое поведение, которые часто используются при исследовании непрерывных сред следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \delta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (4)$$

где μ , ν и δ — вещественные константы. Это одно из наиболее важных нелинейных ДУЧП, первоначально полученное в середине 1970-х Курамото и Сузуки [14] для исследования диссипативной структуры реакции–диффузии и затем независимо полученное Сивашинским при анализе гидродинамической неустойчивости при распространении фронта пламени во время процесса слабого горения [24]. Оно имеет место в различных структурах, таких как неустойчивые дрейфовые волны в плазме [26], и при исследовании волн напряжений в пористых средах [23]. Для $\nu = 0$ уравнение (4) является каноническим нелинейным эволюционным уравнением, называемым уравнением Курамото–Сивашинского (КС). Уравнение КС возникает в ряде физических явлений, например при моделировании длинных волн на поверхности раздела между двумя вязкими жидкостями [11], при неустойчивости фронта пламени для стехиометрического состава горючей смеси [24], в системах реакции–диффузии, а также при исследовании неустойчивых дрейфовых волн в плазме [14].

Уравнение КС привлекло большое внимание ученых, благодаря его очень разнообразному динамическому поведению и тому, что оно может объяснить реальные события в мире. В последние годы были предложены различные методы численного исследования уравнения КС. Среди них — метод тангенс-функции [7], неявные–явные BDF методы [1], локальный разрывный метод Галеркина [28] и спектральный метод коллокаций Чебышева [13]. Затем Лай и Ма [15] построили пятискоростную решеточную модель Больцмана с поправочной функцией для уравнения ОУКС. Уддин с соавторами [27] использовал бессеточный метод коллокаций на основе радиальной базисной функции для численного решения уравнения КС. Миттал и Арора [17] реализовали В-сплайновую схему коллокации пятой степени для получения численного решения уравнения КС. Хак с соавторами [10] разработали бессеточный метод линий для ОУКС, аппроксимируя пространственные производные радиальными базисными функциями с использованием только множества рассеянных узлов. Недавно Лина Е с соавторами [29] предложили решеточную модель Больцмана на основе метода момента высокого порядка с ошибками усечения четвертого порядка точности. Ганайе с соавторами [8] использовали кубические эрмитовы функции для разработки метода коллокации для численного решения уравнения КС.

Другая одномерная нестационарная бигармоническая задача, рассматриваемая в данном исследовании, — это расширенное уравнение Фишера–Колмогорова (РУФК):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) = 0, \quad (5)$$

где $f(u) = u^3 - u$ и γ — положительная постоянная. При $\gamma = 0$ уравнение (5) сводится к стандартному уравнению Фишера–Колмогорова. Приведенное выше РУФК (5) имеет огромную важность, поскольку с его помощью моделируются многочисленные задачи физики, связанные с образованием структур, и другие бистабильные процессы. При $\gamma > 0$ оно было впервые предложено Ди и Ван Саарлосом [5] как модельное уравнение высокого порядка для физических систем, которые являются бистабильными. РУФК широко применяется в теории неустойчивости нематических жидких кристаллов и бегущих волн в системах реакции–диффузии, обсуждавшихся Циммерманом [30] и Аронсоном [2] соответственно. Существование, единственность, регулярность и другие теоретические результаты для (5) обсуждались в [3]. Что касается численного решения, Данумджайя и Пани [4] представили численные результаты, объединив расщепление второго порядка с методом коллокации ортогональных кубических сплайнов. Смешанный конечно-элементный H^1 -метод аппроксимации кубических сплайнов Галеркина применяется для РУФК Доссом и Нандини [6] с использованием метода расщепления.

Не всегда можно получить решения в замкнутом виде для начальной граничной задачи (1)–(3) для произвольных A и f , и поэтому в прошлом было выполнено много исследований для нахождения приближенных решений таких уравнений. В 1969 г. явная схема низкого порядка для решения уравнения (1) исследовалась Митчеллом [16] для $A = 1$ и $f = 0$. В последнее время использование компактных конечно-разностных схем высокого порядка для таких нелинейных уравнений приобретает все большую популярность, благодаря их высокой точности и преимуществу использования компактной ячейки. В 1984 г. Стивенсон [25] разработал одноячеистую дискретизацию второго и четвертого порядка для бигармонических задач. В статье Моханти [18] сообщалось об использовании с дискретизацией однородной сетки и трех пространственных точек сетки двухуровневого неявного разностного метода второго порядка по времени и четвертого порядка в пространстве типа Нумерова для решения (1)–(3). Однако этот метод не работает на сингулярных точках и требует соответствующих модификаций, что приводит

к трудоемким вычислениям для решения сингулярных задач. Недавно с использованием трех пространственных точек сетки в работе Моханти с соавторами [19–22] были получены двух- и трехуровневые неявные конечно-разностные аппроксимации второго порядка по времени и третьего порядка в пространстве для различных классов нелинейных параболических ДУЧП.

В данной статье описывается новый метод, использующий конечно-разностные аппроксимации высокого порядка для численного решения начальной граничной задачи (1)–(3) на неоднородной сеточной структуре. Процедура дискретизации включает одну центральную и две соседние внешаговые пространственные точки сетки, и, таким образом, приводит к компактной формулировке. Предлагаемая схема применима к сингулярным задачам без требования каких-либо модификаций, тем самым значительно уменьшая вычислительные затраты. Статья организована следующим образом: в пункте 2 описываются наши новые стратегии дискретизации и подробно обсуждается получение схемы для неоднородной сетки; в п. 3 устойчивость линейной разностной схемы исследуется с использованием метода Неймана; в п. 4 представлены численные результаты для некоторых тестовых задач, включая нелинейное ОУКС и РУФК, с таблицами и графическими иллюстрациями; в п. 5 представлены выводы.

2. Математические детали компактной разностной схемы

Сначала рассмотрим одномерное нестационарное бигармоническое уравнение с переменными коэффициентами вида

$$A(x, t) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}), \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (6)$$

с начальными и граничными условиями (2), (3). Путем введения новой переменной $v = u_{xx}$ задачу (6) можно представить в сцепленном виде следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v, \quad a < x < b, \quad (7)$$

$$A(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u, u_x, v, v_x), \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (8)$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = u_0''(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (9)$$

$$u(a, t) = b_0(t), \quad u(b, t) = b_1(t), \quad v(a, t) = c_0(t), \quad v(b, t) = c_1(t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Для получения численной схемы мы дискретизируем область решения $\Omega = \{(x, t) \mid a < x < b, \quad t > 0\}$ таким образом, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, N — положительное целое число. Зададим шаги неоднородной пространственной сетки $h_l = x_l - x_{l-1}$, $l = 1, \dots, N+1$. Расщепим временной интервал $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_J = T$, где J — положительное целое число, и определим T как конечное время вычисления. Пусть $k = t_{j+1} - t_j > 0$, $j = 0, 1, \dots, J-1$, — временной шаг, такой что $k = T/J$. Обозначим точки сетки (x_l, t_j) , где $x_l = x_0 + \sum_{i=1}^l h_i$, $l = 1, \dots, N+1$, и $t_j = jk$, $j = 0, \dots, J$. Также обозначим параметр отношения размеров ячейки как $\eta_l = (h_{l+1}/h_l) > 0$, $l = 1, \dots, N$. Пусть $x_{l+1/2} = x_l + \frac{\eta_l h_l}{2}$ и $x_{l-1/2} = x_l - \frac{h_l}{2}$, $l = 1, \dots, N$, — это соседние внешаговые точки. Для удобства рассмотрим $\eta_l = \eta$ (постоянная $\neq 1$), $l = 1, \dots, N$, а для $\eta_l = 1$ это отношение сводится к случаю однородной сетки. Поскольку

$$\begin{aligned} b - a &= x_{N+1} - x_0 = (x_{N+1} - x_N) + (x_N - x_{N-1}) + \cdots + (x_1 - x_0) \\ &= h_{N+1} + h_N + \cdots + h_1 = h_1(1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^N), \end{aligned}$$

мы получим шаг первой сетки в направлении x :

$$h_1 = \begin{cases} \frac{(b-a)(1-\eta)}{1-\eta^{N+1}}, & \eta \neq 1, \\ \frac{(b-a)}{N+1}, & \eta = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Следовательно, для данных значений N и η мы можем определить h_1 из (11), а следующие h_l вычисляются с использованием соотношения $h_{l+1} = \eta h_l$, $l = 1, \dots, N$. Введем обозначения в точке сетки (x_l, t_j) , пусть U_l^j и V_l^j — значения точного решения $u(x, t)$ и $v(x, t)$, а u_l^j и v_l^j — значения их приближенного решения соответственно. Рассмотрим следующие аппроксимации для $r = 0, \pm 1$:

$$\bar{t}_j = t_j + \theta k, \quad 0 < \theta < 1, \quad (12)$$

$$\bar{U}_{l+r}^j = \theta U_{l+r}^{j+1} + (1-\theta)U_{l+r}^j, \quad (13)$$

$$\bar{U}_{l\pm 1/2}^j = (\bar{U}_{l\pm 1}^j + \bar{U}_l^j)/2, \quad (14)$$

$$\bar{U}_{t+r}^j = (U_{l+r}^{j+1} - U_{l+r}^j)/k, \quad (15)$$

$$\bar{U}_{x_l}^j = (\bar{U}_{l+1}^j - (1-\eta^2)\bar{U}_l^j - \eta^2\bar{U}_{l-1}^j)/(\eta(1+\eta)h_l), \quad (16)$$

$$\bar{U}_{x_{l+1/2}}^j = (\bar{U}_{l+1}^j - \bar{U}_l^j)/(\eta h_l), \quad (17)$$

$$\bar{U}_{x_{l-1/2}}^j = (\bar{U}_l^j - \bar{U}_{l-1}^j)/h_l, \quad (18)$$

$$\bar{U}_{xx_l}^j = \frac{2}{\eta(1+\eta)h_l^2} (\bar{U}_{l+1}^j - (1+\eta)\bar{U}_l^j + \eta\bar{U}_{l-1}^j), \quad (19)$$

$\bar{A}_l^j = A(x_l, \bar{t}_j)$, $\bar{A}_{x_l}^j = A_x(x_l, \bar{t}_j)$ и т. д. Заменяя в приведенных выше выражениях U на V , определим подобные аппроксимации \bar{V}_{l+r}^j , $\bar{V}_{l\pm 1/2}^j$, $\bar{V}_{x_l}^j$, $\bar{V}_{x_{l\pm 1/2}}^j$ и $\bar{V}_{xx_l}^j$ для переменной решения V_l^j . Используя приведенные выше аппроксимации, определим

$$\bar{F}_{l\pm 1/2}^j = f(x_{l\pm 1/2}, \bar{t}_j, \bar{U}_{l\pm 1/2}^j, \bar{U}_{x_{l\pm 1/2}}^j, \bar{V}_{l\pm 1/2}^j, \bar{V}_{x_{l\pm 1/2}}^j). \quad (20)$$

В точке сетки (x_l, t_j) для $S = A, U$ и V обозначим:

$$S_{ab} = \frac{\partial^{a+b} S}{\partial x^a \partial t^b}, \quad a, b = 0, 1, \dots, \quad \alpha_l^j = \frac{\partial f}{\partial U}, \quad \beta_l^j = \frac{\partial f}{\partial V}, \quad \gamma_l^j = \frac{\partial f}{\partial U_x}, \quad \delta_l^j = \frac{\partial f}{\partial V_x}, \quad \xi_l^j = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Дифференциальные уравнения (7), (8) в точке сетки (x_l, t_j) можно записать как

$$U_{20} = V_{00}, \quad (21)$$

$$A_{00}V_{20} + U_{01} = f(x_l, t_j, U_l^j, U_{x_l}^j, V_l^j, V_{x_l}^j) \equiv F_l^j. \quad (22)$$

Дифференцируя уравнения (7), (8) по t , мы получим следующие соотношения в точке сетки (x_l, t_j) :

$$U_{21} = V_{01}, \quad (23)$$

$$A_{00}V_{21} + A_{01}V_{20} + U_{02} = \xi_l^j + \alpha_l^j U_{01} + \beta_l^j V_{01} + \gamma_l^j U_{11} + \delta_l^j V_{11}. \quad (24)$$

Включив аппроксимации (12)–(19) в (20) и используя разложение в ряд Тейлора, найдем

$$\begin{aligned} \bar{F}_{l+1/2}^j &= F_{l+1/2}^j + \theta k \left[\xi_l^j + U_{01} \alpha_l^j + V_{01} \beta_l^j + U_{11} \gamma_l^j + V_{11} \delta_l^j \right] + \\ &\quad \frac{\eta^2 h_l^2}{24} \left[3U_{20} \alpha_l^j + 3V_{20} \beta_l^j + U_{30} \gamma_l^j + V_{30} \delta_l^j \right] + O(k^2 + kh_l + h_l^3), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{l-1/2}^j &= F_{l-1/2}^j + \theta k \left[\xi_l^j + U_{01} \alpha_l^j + V_{01} \beta_l^j + U_{11} \gamma_l^j + V_{11} \delta_l^j \right] + \\ &\quad \frac{h_l^2}{24} \left[3U_{20} \alpha_l^j + 3V_{20} \beta_l^j + U_{30} \gamma_l^j + V_{30} \delta_l^j \right] + O(k^2 + kh_l + h_l^3). \end{aligned} \quad (26)$$

Чтобы достичь высокой точности переменных решения и их частных производных первого порядка, рассмотрим следующие линейные комбинации на центральной сетке:

$$\bar{\bar{U}}_l^j = \bar{U}_l^j + p_1 h_l^2 \bar{U}_{xxl}^j, \quad (27)$$

$$\bar{\bar{V}}_l^j = \bar{V}_l^j + q_1 h_l^2 \bar{V}_{xxl}^j, \quad (28)$$

$$\bar{\bar{U}}_{x_l}^j = \bar{U}_{x_l}^j + r_1 h_l \left(\bar{V}_{l+1}^j - \bar{V}_{l-1}^j \right), \quad (29)$$

$$\bar{\bar{V}}_{x_l}^j = \bar{V}_{x_l}^j + s_1 h_l \left(\bar{F}_{l+1/2}^j - \bar{F}_{l-1/2}^j \right) + s_2 h_l \left(\bar{U}_{t_{l+1}}^j - \bar{U}_{t_{l-1}}^j \right) + s_3 h_l^2 \bar{V}_{xxl}^j, \quad (30)$$

где p_1 , q_1 , r_1 , s_1 , s_2 и s_3 — параметры, которые необходимо определить. С помощью аппроксимаций (13)–(19) и (25), (26) из (27)–(30) получим

$$\bar{\bar{U}}_l^j = U_l^j + \theta k U_{01} + h_l^2 p_1 U_{20} + O(k^2 + h_l^3), \quad (31)$$

$$\bar{\bar{V}}_l^j = V_l^j + \theta k V_{01} + h_l^2 q_1 V_{20} + O(k^2 + h_l^3), \quad (32)$$

$$\bar{\bar{U}}_{x_l}^j = U_{x_l}^j + \theta k U_{11} + \frac{h_l^2}{6} (\eta + 6r_1(1 + \eta)) U_{30} + O(k^2 + kh_l + h_l^3), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{V}}_{x_l}^j &= V_{x_l}^j + \frac{h_l^2}{6} \left[(\eta + 3s_1(1 + \eta) \bar{A}_l^j) V_{30} + 6(1 + \eta) \left(\frac{s_1}{2} + s_2 \right) U_{11} + \right. \\ &\quad \left. 3(s_1(1 + \eta) \bar{A}_{x_l}^j + 2s_3) V_{20} \right] + \theta k V_{11} + O(k^2 + kh_l + h_l^3). \end{aligned} \quad (34)$$

И, наконец, пусть

$$\bar{\bar{F}}_l^j = f(x_l, \bar{t}_j, \bar{\bar{U}}_l^j, \bar{\bar{U}}_{x_l}^j, \bar{\bar{V}}_l^j, \bar{\bar{V}}_{x_l}^j). \quad (35)$$

Используя (31)–(34), получим

$$\bar{\bar{F}}_l^j = F_l^j + \theta k \left[\xi_l^j + \alpha_l^j U_{01} + \beta_l^j V_{01} + \gamma_l^j U_{11} + \delta_l^j V_{11} \right] + \frac{h_l^2}{6} T_0 + O(k^2 + kh_l + h_l^3), \quad (36)$$

где

$$T_0 = 6p_1 U_{20} \alpha_l^j + 6q_1 V_{20} \beta_l^j + (\eta + 6r_1(1 + \eta)) U_{30} \gamma_l^j + \\ \left[(\eta + 3s_1(1 + \eta) \bar{A}_l^j) V_{30} + 6(1 + \eta) \left(\frac{s_1}{2} + s_2 \right) U_{11} + 3(s_1(1 + \eta) \bar{A}_{x_l}^j + 2s_3) V_{20} \right] \delta_l^j.$$

Тогда численный метод для предлагаемых дифференциальных уравнений (7), (8) можно записать следующим образом:

$$\bar{U}_{l+1}^j - (1 + \eta) \bar{U}_l^j + \eta \bar{U}_{l-1}^j = \frac{h_l^2}{12} \left[(\eta^2 + \eta - 1) \bar{V}_{l+1}^j + (1 + \eta)(1 + 3\eta + \eta^2) \bar{V}_l^j + \right. \\ \left. \eta(1 + \eta - \eta^2) \bar{V}_{l-1}^j \right] + \bar{T}_l^{j(1)}, \quad (37)$$

$$\left(\bar{A}_l^j + h_l P_{1l} \bar{A}_{x_l}^j + h_l^2 P_{2l} \bar{A}_{xx_l}^j \right) \left(\bar{V}_{l+1}^j - (1 + \eta) \bar{V}_l^j + \eta \bar{V}_{l-1}^j \right) + \frac{h_l^2}{12} \left[P_l \bar{U}_{l+1}^j + Q_l \bar{U}_l^j + R_l \bar{U}_{l-1}^j \right] \\ = \frac{h_l^2}{3} \left[P_l^* \bar{F}_{l+1/2}^j + Q_l^* \bar{F}_l^j + R_l^* \bar{F}_{l-1/2}^j \right] + \bar{T}_l^{j(2)}, \quad (38)$$

$$\eta \neq 1, \quad l = 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1,$$

где

$$P_{1l} = \frac{(\eta - 1)}{3} - \frac{h_l}{18} (1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}, \quad P_{2l} = \frac{1 - \eta + \eta^2}{12}, \\ P_l = \eta^2 + \eta - 1 - \frac{h_l}{3} (1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}, \quad P_l^* = \eta^2 - \frac{h_l}{6} (1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}, \\ Q_l = (1 + \eta)(1 + 3\eta + \eta^2) + \frac{h_l}{3} (1 - \eta^2)(1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}, \\ Q_l^* = \frac{\eta(1 + \eta)}{2} + \frac{h_l}{6} (1 - \eta^2)(1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}, \\ R_l = \eta(1 + \eta - \eta^2) + \frac{h_l}{3} \eta^2 (1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}, \quad R_l^* = \eta + \frac{h_l}{6} \eta^2 (1 + \eta + \eta^2) \frac{\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j}.$$

Для $\theta = 1/2$ локальные ошибки усечения задаются при помощи $\bar{T}_l^{j(1)} = O(k^2 h_l^2 + k h_l^3 + h_l^5)$ и $\bar{T}_l^{j(2)} = O(k^2 h_l^2 + k h_l^3 + h_l^5)$ при условии, что $\eta \neq 1$.

Подставляя соотношение (23) и аппроксимации (13) в (37), получаем локальную ошибку усечения $\bar{T}_l^{j(1)}$, связанную с (37), в виде $\bar{T}_l^{j(1)} = O(k^2 h_l^2 + k h_l^3 + h_l^5)$ для произвольного θ . Теперь с помощью аппроксимаций (25), (26), (36) и соотношения (24) локальная ошибка усечения $\bar{T}_l^{j(2)}$, связанная с (38), принимает вид:

$$\bar{T}_l^{j(2)} = \frac{h_l^4}{72} \eta (1 + \eta) \left[(1 - \eta + \eta^2) \left(3U_{20} \alpha_l^j + 3V_{20} \beta_l^j + U_{30} \gamma_l^j + V_{30} \delta_l^j \right) + 2T_0 \right] + \\ \frac{\eta}{2} (1 + \eta) k h_l^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \right) U_{02} + O(k^2 h_l^2 + k h_l^3 + h_l^5). \quad (39)$$

Чтобы предлагаемая разностная схема (38) имела порядок $O(k^2 + kh_l + h_l^3)$, коэффициенты h_l^4 и kh_l^2 в (39) должны быть нулевыми. Мы получим $\theta = 1/2$ и

$$(1 - \eta + \eta^2)(3U_{20}\alpha_l^j + 3V_{20}\beta_l^j + U_{30}\gamma_l^j + V_{30}\delta_l^j) + 2T_0 = 0,$$

из которого получаются следующие значения параметров:

$$p_1 = q_1 = -\frac{(1 - \eta + \eta^2)}{4}, \quad r_1 = -\frac{(1 + \eta + \eta^2)}{12(1 + \eta)},$$

$$s_1 = -\frac{(1 + \eta + \eta^2)}{6(1 + \eta)\bar{A}_l^j}, \quad s_2 = \frac{(1 + \eta + \eta^2)}{12(1 + \eta)\bar{A}_l^j}, \quad s_3 = \frac{(1 + \eta + \eta^2)\bar{A}_{x_l}^j}{12\bar{A}_l^j},$$

и, таким образом, для приведенного выше набора параметров локальная ошибка усечения, связанная с (38), сводится к $\bar{T}_l^{j(2)} = O(k^2h_l^2 + kh_l^3 + h_l^5)$ при условии, что $\eta \neq 1$.

Когда коэффициент $A = A(x, t, u, u_{xx})$, т.е. для квазилинейного уравнения (1), разностную схему (37), (38) необходимо модифицировать. Для этого используем следующие значения аппроксимации:

$$\bar{A}_{x_l}^j = \frac{\bar{A}_{l+1}^j - (1 - \eta^2)\bar{A}_l^j - \eta^2\bar{A}_{l-1}^j}{\eta(1 + \eta)h_l}, \quad \bar{A}_{xx_l}^j = \frac{2(\bar{A}_{l+1}^j - (1 + \eta)\bar{A}_l^j + \eta\bar{A}_{l-1}^j)}{\eta(1 + \eta)h_l^2},$$

где $\bar{A}_l^j = A(x_l, \bar{t}_j, \bar{U}_l^j, \bar{V}_l^j)$, $\bar{A}_{l\pm 1}^j = A(x_{l\pm 1}, \bar{t}_j, \bar{U}_{l\pm 1}^j, \bar{V}_{l\pm 1}^j)$ в (37), (38). При включении начальных и граничных условий трехточечная компактная разностная схема имеет блочную трехдиагональную матричную структуру, к которой можно применить подходящие итерационные методы. Если дифференциальное уравнение (1) является линейным, мы можем решить линейную систему с использованием блочного итерационного метода Гаусса–Зейделя; в нелинейном случае мы можем использовать нелинейный блочный итерационный метод Ньютона (см. работы Келли [12] и Хейгемана и Янга [9]).

При $\eta = 1$ (случай однородной сетки), т.е. для $h_{l+1} = h_l = h$, $l = 1, \dots, N$, соответствующая схема для решения дифференциальных уравнений (7), (8) точности $O(k^2 + kh^2 + h^4)$ для $\theta = 1/2$ имеет следующий вид:

$$\delta_x^2 \bar{U}_l^j = \frac{h^2}{12} [\bar{V}_{l+1}^j + 10\bar{V}_l^j + \bar{V}_{l-1}^j] + O(k^2h^2 + kh^4 + h^6), \quad (40)$$

$$\left[\bar{A}_l^j + \frac{h^2}{12} \left(\bar{A}_{xx_l}^j - \frac{2\bar{A}_{x_l}^{j2}}{\bar{A}_l^j} \right) \right] \delta_x^2 \bar{V}_l^j + \frac{h^2}{12} \left[\left(1 - \frac{h\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j} \right) \bar{U}_{l+1}^j + 10\bar{U}_l^j + \left(1 + \frac{h\bar{A}_{x_l}^j}{\bar{A}_l^j} \right) \bar{U}_{l-1}^j \right]$$

$$= \frac{h^2}{3} \left[\left(1 - \frac{h\bar{A}_{x_l}^j}{2\bar{A}_l^j} \right) \bar{F}_{l+1/2}^j + \bar{F}_l^j + \left(1 + \frac{h\bar{A}_{x_l}^j}{2\bar{A}_l^j} \right) \bar{F}_{l-1/2}^j \right] + O(k^2h^2 + kh^4 + h^6), \quad (41)$$

$$l = 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1.$$

3. Исследование устойчивости

Обсудим устойчивость полученной схемы, используя анализ устойчивости по фон Нейману для линеаризованного уравнения КС:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (42)$$

где α , μ и $\delta > 0$ — постоянные. Предлагаемую схему (40), (41), примененную к уравнению (42), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & 12(u_{l-1}^{j+1} - 2u_l^{j+1} + u_{l+1}^{j+1}) - h^2(v_{l-1}^{j+1} + 10v_l^{j+1} + v_{l+1}^{j+1}) \\ & = -12(u_{l-1}^j - 2u_l^j + u_{l+1}^j) + h^2(v_{l-1}^j + 10v_l^j + v_{l+1}^j), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & (1 - 3\alpha\lambda h)u_{l-1}^{j+1} + 10u_l^{j+1} + (1 + 3\alpha\lambda h)u_{l+1}^{j+1} + \\ & \lambda \left[\left(6\delta + \frac{\mu h^2}{2} + \frac{\alpha h^3}{4}\right)v_{l-1}^{j+1} + (-12\delta + 5\mu h^2)v_l^{j+1} + \left(6\delta + \frac{\mu h^2}{2} - \frac{\alpha h^3}{4}\right)v_{l+1}^{j+1} \right] \\ & = (1 + 3\alpha\lambda h)u_{l-1}^j + 10u_l^j + (1 - 3\alpha\lambda h)u_{l+1}^j - \\ & \lambda \left[\left(6\delta + \frac{\mu h^2}{2} + \frac{\alpha h^3}{4}\right)v_{l-1}^j + (-12\delta + 5\mu h^2)v_l^j + \left(6\delta + \frac{\mu h^2}{2} - \frac{\alpha h^3}{4}\right)v_{l+1}^j \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Для использования метода фон Неймана предположим, что решения задаются путем $u_l^j = \xi^j e^{i\beta l}$ и $v_l^j = \eta^j e^{i\beta l}$ для $i = \sqrt{-1}$, ξ , η в качестве коэффициентов усиления и β в качестве фазового угла. Используя этот факт в схеме (43), (44), мы получим следующую матрицу:

$$\mathbf{z}^{j+1} = \mathbf{M} \mathbf{z}^j, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^t, & \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a & -b \\ c^* & -d \end{bmatrix}, \\ a &= -\sin^2 \frac{\beta}{2}, & b &= -\frac{h^2}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right), \\ c &= 1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\lambda h}{2} i \sin \beta, & c^* &= c - i\alpha\lambda h \sin \beta, \\ d &= -2\lambda\delta \sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{\mu\lambda h^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\alpha\lambda h^3}{24} i \sin \beta. \end{aligned}$$

Необходимое условие фон Неймана для обеспечения устойчивости системы (45) состоит в том, что максимальные модули собственных значений матрицы усиления \mathbf{M} должны быть меньше или равны единице. С помощью прямого вычисления получаем собственные значения матрицы \mathbf{M} :

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = \frac{bc^* + ad}{bc - ad} = \frac{X + iY}{X^* - iY}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}
X &= -\frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^2 - \lambda \sin^2 \frac{\beta}{2} \left[\mu h^2 \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) - 4\delta \sin^2 \frac{\beta}{2} \right], \\
X^* &= -\frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^2 + \lambda \sin^2 \frac{\beta}{2} \left[\mu h^2 \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) - 4\delta \sin^2 \frac{\beta}{2} \right], \\
Y &= \frac{\alpha \lambda h^3}{4} \sin \beta.
\end{aligned}$$

Ясно, что $|\rho_1| = 1$ и $|\rho_2| \leq 1$, если

$$2\lambda h^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^2 \left[\mu h^2 \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) - 4\delta \sin^2 \frac{\beta}{2} \right] \leq 0. \quad (47)$$

Если фазовый угол $\beta = 0$ или 2π , то условие (47) тривиально верно. Для $\beta \in (0, 2\pi)$ условие (47) сводится к

$$\mu h^2 \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) \leq 4\delta \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (48)$$

Теперь мы имеем два случая:

- $\mu \leq 0$: условие (48) верно для любого выбора $\beta \in (0, 2\pi)$ и для всех значений параметра отношения размеров ячейки $\lambda > 0$, а это означает, что предлагаемая схема (40), (41) является безусловно устойчивой;
- $\mu > 0$: условие (48) верно для любого выбора $\beta \in (0, 2\pi)$ для достаточно малого h и $\lambda > 0$, а это означает, что предлагаемая схема (40), (41) является устойчивой также в этом случае.

4. Численные примеры

Для $\eta_0 = 1 + \eta$, $\eta_1 = \eta - 1$, $\eta_2 = (1 + \eta)(1 + \eta + \eta^2)$, $\eta_3 = \eta^2(\eta - 1)$, $\eta_4 = (1 + \eta)(1 - \frac{\eta}{2} + \eta^2)$, $\eta \neq 1$, рассмотрим следующую схему на неоднородной сетке точности $O(k^2 + h_l^2)$ с использованием внешних узловых точек для решения дифференциальных уравнений (7), (8):

$$\bar{U}_{l+1}^j - \eta_0 \bar{U}_l^j + \eta \bar{U}_{l-1}^j = \frac{h_l^2}{6} \left[\eta_1 \bar{V}_{l+1}^j + \eta_2 \bar{V}_l^j - \eta_3 \bar{V}_{l-1}^j \right] + O(k^2 h_l^2 + k h_l^3 + h_l^4), \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{A}_l^j + \frac{\eta_1}{3} h_l \bar{A}_{x_l}^j \right) \left(\bar{V}_{l+1}^j - \eta_0 \bar{V}_l^j + \eta \bar{V}_{l-1}^j \right) + \frac{h_l^2}{6} \left[\eta_1 \bar{U}_{l+1}^j + \eta_2 \bar{U}_l^j - \eta_3 \bar{U}_{l-1}^j \right] \\
& = \frac{h_l^2}{3} \left[\eta_1 \bar{F}_{l+1/2}^j + \eta_4 \bar{F}_l^j - \eta_3 \bar{F}_{l-1/2}^j \right] + O(k^2 h_l^2 + k h_l^3 + h_l^4), \quad (50)
\end{aligned}$$

$$l = 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1.$$

В данном пункте численные эксперименты были выполнены с нелинейными задачами, возникающими в различных научных дисциплинах, для поддержки нашего теоретического обсуждения. Представим некоторые численные примеры для уравнения КС. Рассматриваемые примеры представляют собой стандартные задачи, широко используемые

в литературе для тестирования различных схем для этих моделей уравнений [10, 15, 17]. Итерационная процедура выполняется до тех пор, пока не будет достигнута допустимая граница абсолютной устойчивости к ошибкам $\leq 10^{-12}$. В таблицах Itr означает число итераций, необходимое при конечном временном шаге. Там, где не указано, временной шаг $k = 1.6/(N + 1)^2$ используется для нахождения решения при $t = 1$.

Пример 1. Для $\mu = 1$, $\delta = 1$ и $\nu = 0$ уравнение (4) принимает вид уравнения КС:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{51}$$

с точным решением

$$u(x, t) = b + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \left(-9 \tanh(K(x - bt - x_0)) + 11 \tanh^3(K(x - bt - x_0)) \right).$$

Для численного расчета возьмем те же теоретические параметры, что и в [10, 15, 17]: $b = 5$, $K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}$, $x_0 = -12$, а область решения $[-30, 30]$ с числом разделений $N + 1 = 120$ и временным шагом $k = 0.001$. Глобальная относительная ошибка (ГОО) вычисляется при $t = 1, 2, 3, 4$ с использованием метода (40), (41). В табл. 1 результаты сравниваются с результатами использования метода прямых с мультиквадратичными радиальными базисными функциями Хака с соавторами [10] с временным шагом $k = 0.001$ с использованием 121 узла и метода решеточных уравнений Больцмана, предложенного Лаем и Ма в [15] с временным шагом $k = 0.0001$ и 600 сетками. В табл. 2 значение ГОО сравнивается для различного числа разделений для различных временных уровней с результатами статьи Миттала и Ароры [17], чтобы представить эффект изменения числа точек сетки. Численные результаты показывают, что наша компактная схема работает лучше, чем схемы, представленные в [10, 15, 17].

Таблица 1. Сравнение ГОО для примера 1 в различное время

t	Itr	$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)	метод из [10]	метод из [15]
1	15	$1.0196 \cdot 10^{-4}$	$2.0528 \cdot 10^{-4}$	$6.7923 \cdot 10^{-4}$
2	15	$1.5572 \cdot 10^{-4}$	$3.7496 \cdot 10^{-4}$	$1.1503 \cdot 10^{-3}$
3	15	$2.0438 \cdot 10^{-4}$	$5.6925 \cdot 10^{-4}$	$1.5941 \cdot 10^{-3}$
4	15	$2.9001 \cdot 10^{-4}$	$8.0226 \cdot 10^{-4}$	$2.0075 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2. Сравнение ГОО при изменении числа разделений в различное время для примера 1

t	$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)	метод из [17]	$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)	метод из [17]	$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)	метод из [17]
	$N + 1 = 150$		$N + 1 = 200$		$N + 1 = 300$	
1	$5.9883 \cdot 10^{-5}$	$3.8173 \cdot 10^{-4}$	$3.3238 \cdot 10^{-5}$	$2.1335 \cdot 10^{-4}$	$2.4349 \cdot 10^{-5}$	$1.2335 \cdot 10^{-4}$
2	$9.7381 \cdot 10^{-5}$	$5.5114 \cdot 10^{-4}$	$5.7738 \cdot 10^{-5}$	$3.0874 \cdot 10^{-4}$	$4.4851 \cdot 10^{-5}$	$1.6780 \cdot 10^{-4}$
3	$1.2820 \cdot 10^{-4}$	$7.0398 \cdot 10^{-4}$	$7.9119 \cdot 10^{-5}$	$3.9500 \cdot 10^{-4}$	$6.3961 \cdot 10^{-5}$	$2.0791 \cdot 10^{-4}$
4	$1.5800 \cdot 10^{-4}$	$8.6366 \cdot 10^{-4}$	$9.7036 \cdot 10^{-5}$	$4.8474 \cdot 10^{-4}$	$8.1105 \cdot 10^{-5}$	$2.5018 \cdot 10^{-4}$

Пример 2. Для $\mu = -1$, $\delta = 1$ и $\nu = 0$ уравнение (4) принимает вид уравнения КС:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (52)$$

с точным решением

$$u(x, t) = b + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left(-3 \tanh(K(x - bt - x_0)) + \tanh^3(K(x - bt - x_0)) \right).$$

Для сравнения результатов с результатами из [15, 17] примем $b = 5$, $K = \frac{1}{2\sqrt{19}}$, $x_0 = -25$, а область решения $[-50, 50]$ с числом разделений 200 и $k = 0.01$. В табл. 3 представлено сравнение ГОО, найденной методом (40), (41) и методами В-сплайновой коллокации из [17] при $k = 0.01$ с использованием 200 сеток и решеточных уравнений Больцмана из [15] при $k = 0.0001$ с использованием 1000 сеток.

Таблица 3. Сравнение ГОО для примера 2 в различное время

t	Itr	$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)	метод из [17]	метод из [15]
6	18	$3.9017 \cdot 10^{-7}$	$6.5093 \cdot 10^{-6}$	$7.8808 \cdot 10^{-6}$
8	18	$4.6209 \cdot 10^{-7}$	$7.1315 \cdot 10^{-6}$	$9.5324 \cdot 10^{-6}$
10	18	$5.1828 \cdot 10^{-7}$	$7.3103 \cdot 10^{-6}$	$1.0891 \cdot 10^{-5}$
12	18	$5.5744 \cdot 10^{-7}$	$8.7766 \cdot 10^{-6}$	$1.1793 \cdot 10^{-5}$

Пример 3. Рассмотрим обобщенное уравнение КС (4) при $\mu = 1$, $\delta = 1$ и $\nu = 4$ с точным решением

$$u(x, t) = b + 9 - 15 \left(\tanh(K(x - bt - x_0)) + \tanh^2(K(x - bt - x_0)) - \tanh^3(K(x - bt - x_0)) \right).$$

Для численного расчета возьмем те же теоретические параметры, что и в [15]: $b = 6$, $K = \frac{1}{2}$ и $x_0 = -10$, а область решения $[-30, 30]$ с числом разделений $N + 1 = 300$ и $k = 0.001$. Для проверки точности ГОО представлена в табл. 4 для времени $t = 1, 2, 3$ и 4 с использованием конечно-разностного метода (40), (41), и результаты сравниваются с результатами использования метода решеточных уравнений Больцмана из [15] при $k = 0.0001$ и использовании 600 сеток. На рисунке 1 представлено двумерное сравнение точного и численного решений при различных временных интервалах.

Таблица 4. Сравнение ГОО для примера 3 в различное время

t	Itr	$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)	метод из [15]
1	69	$1.8737 \cdot 10^{-4}$	$2.5945 \cdot 10^{-2}$
2	71	$6.0942 \cdot 10^{-4}$	$2.7959 \cdot 10^{-2}$
3	73	$1.2561 \cdot 10^{-3}$	$2.6701 \cdot 10^{-2}$
4	75	$2.0729 \cdot 10^{-3}$	$3.5172 \cdot 10^{-2}$

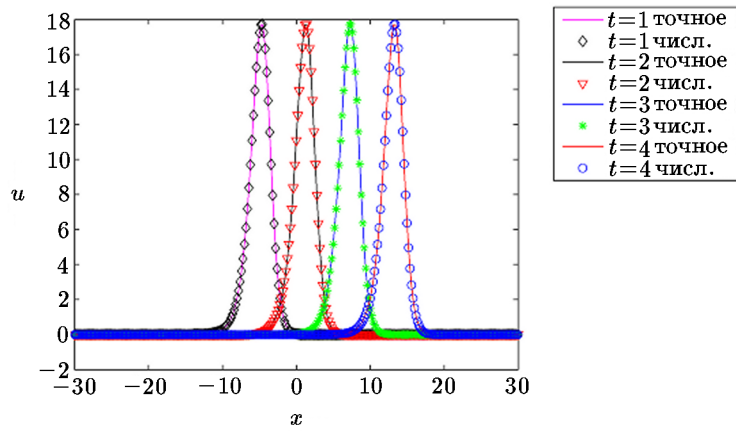


Рис. 1. Пример 3: сравнение численного и точного решений в различные время

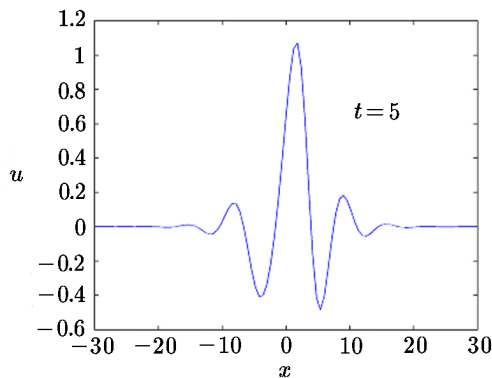
Пример 4. Рассмотрим уравнение КС (51), которое представляет собой самое простое нелинейное ДУЧП, имеющее хаотическое поведение в конечной пространственной области, с гауссовым начальным условием

$$u(x, 0) = \exp(-x^2) \tag{53}$$

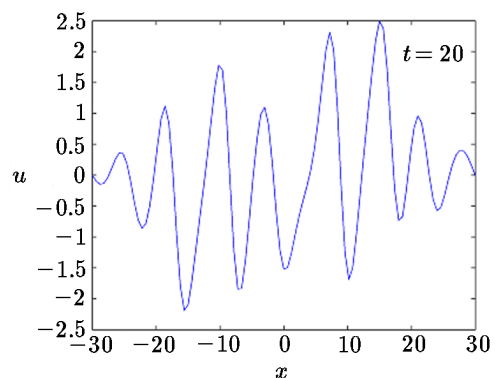
и граничными условиями:

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad u_{xx}(a, t) = 0, \quad u_{xx}(b, t) = 0. \tag{54}$$

Возьмем вычислительную область $[a, b] = [-30, 30]$ с $k = 0.01$ и числом разделений 100. На рис. 2 представлены численные результаты, демонстрирующие полное хаотическое поведение. Мы можем утверждать, что этот результат имеет такие же характеристики, что и в [10, 17].



а) численное решение при $t = 5$



б) численное решение при $t = 20$

Рис. 2. Пример 4: хаотическое решение уравнения КС (51) с гауссовым начальным условием (53) при $t = 5$ и $t = 20$

Пример 5. Рассмотрим следующее неоднородное расширенное уравнение ФК:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) = \phi(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (55)$$

где $f(u) = u^3 - u$. Точное решение приведенного выше уравнения $u(x, t) = e^{-t} \sin(2\pi x)$. Максимальные абсолютные ошибки (МАО) при использовании метода (40), (41) в сравнении с N показаны на рис. 3 на двух различных временных уровнях: $t = 1$ и 5 для различных значений γ для $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. Для каждого шага пространственной сетки h возьмем соответствующий временной шаг $k \propto h^2$. При таком выборе временного шага метод (40), (41) имеет четвертый порядок точности в пространстве, как показано на рис. 3.

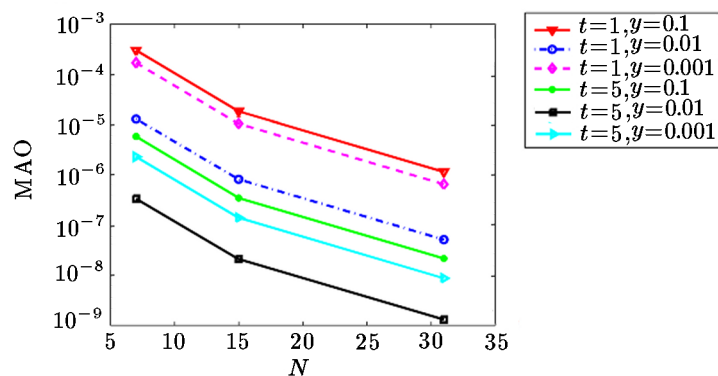


Рис. 3. Кривые максимальной абсолютной ошибки в зависимости от N для примера 5 при $\eta = 1$, $t = 1$ и 5 для различных значений γ

Пример 6. Рассмотрим класс одномерных линейных сингулярных нестационарных бигармонических уравнений следующего вида:

$$\nabla^4 u + \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} = g(r, t), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0,$$

или эквивалентно

$$\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{-2\alpha}{r} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{\alpha(2-\alpha)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha(\alpha-2)}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + g(r, t), \quad 0 < r < 1, \quad t > 0. \quad (56)$$

Для $\alpha = 1$ и 2 :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

является одномерным оператором Лапласа в цилиндрических и сферических координатах соответственно. Точное решение $u = e^{-t r^4} \sin r$. Среднеквадратичные ошибки (СКО) в u , u_{rr} при $\eta = 1$ (однородная сетка) в табл. 5 при $t = 1$ для $\alpha = 1$ и 2 сравниваются с результатами, представленными в [18]. Мы видим, что полученные нами результаты лучше результатов, представленных в [18]. В нашем следующем вычислении возьмем $\eta = 1.06$ и представим МАО в u и u_{rr} в сравнении с N при наличии от 9 до 33 узловых точек (см. рис. 4) для $\alpha = 1$ и 2 при $t = 1$, показывающую порядок сходимости схемы (37), (38).

Таблица 5. Сравнение СКО для примера 6 при $t = 1$ для $\eta = 1$

h	решения	Предлагаемый $O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)				$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод, обсуждаемый в [18]	
		$\alpha = 1$		$\alpha = 2$		$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
		Itr	СКО	Itr	СКО	СКО	СКО
1/8	u	81	$0.6410 \cdot 10^{-5}$	86	$0.2278 \cdot 10^{-4}$	$0.2892 \cdot 10^{-4}$	$0.8677 \cdot 10^{-4}$
	u_{rr}		$0.3042 \cdot 10^{-3}$		$0.4977 \cdot 10^{-3}$	$0.6764 \cdot 10^{-3}$	$0.2357 \cdot 10^{-2}$
1/16	u	265	$0.4767 \cdot 10^{-6}$	279	$0.1530 \cdot 10^{-5}$	$0.2012 \cdot 10^{-5}$	$0.6024 \cdot 10^{-5}$
	u_{rr}		$0.2306 \cdot 10^{-4}$		$0.4141 \cdot 10^{-4}$	$0.5805 \cdot 10^{-4}$	$0.1318 \cdot 10^{-3}$
1/32	u	852	$0.3275 \cdot 10^{-7}$	919	$0.9632 \cdot 10^{-7}$	$0.1313 \cdot 10^{-6}$	$0.3877 \cdot 10^{-6}$
	u_{rr}		$0.1840 \cdot 10^{-5}$		$0.3627 \cdot 10^{-5}$	$0.5092 \cdot 10^{-5}$	$0.1050 \cdot 10^{-4}$

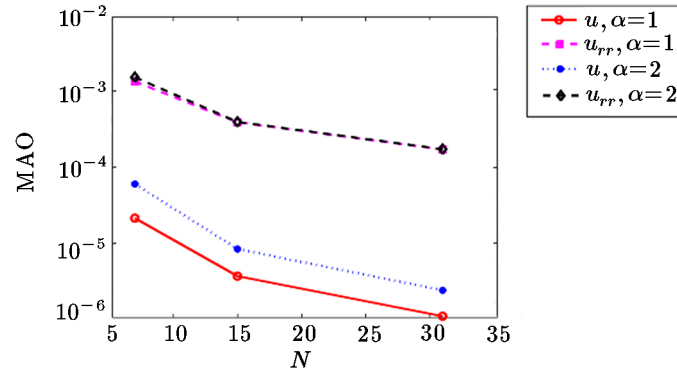


Рис. 4. Кривые максимальной абсолютной ошибки в зависимости от N для примера 6 при $\eta = 1.06$ и $t = 1$ для $\alpha = 1$ и 2

Пример 7. Рассмотрим следующее уравнение:

$$(1 + u^2 + u_{xx}^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u(u_x - u_{xx}) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \quad (57)$$

Точное решение $u(x, t) = e^{-t} \cos(\pi x)$. СКО в u и u_{xx} при $\eta = 1$ представлена в табл. 6 при $t = 1$ для различных значений α . Результаты сравниваются с результатами имеющейся компактной схемы четвертого порядка [18].

Таблица 6. Сравнение СКО для примера 7 при $t = 1$ для $\eta = 1$

h	решения	Предлагаемый $O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод (40), (41)				$O(k^2 + kh^2 + h^4)$ -метод, обсуждаемый в [18]	
		$\alpha = 10$		$\alpha = 20$		$\alpha = 10$	$\alpha = 20$
		Itr	СКО	Itr	СКО	СКО	СКО
1/8	u	121	$0.2164 \cdot 10^{-3}$	118	$0.2176 \cdot 10^{-3}$	$0.6955 \cdot 10^{-3}$	$0.6973 \cdot 10^{-3}$
	u_{xx}		$0.1063 \cdot 10^{-1}$		$0.1065 \cdot 10^{-1}$	$0.3438 \cdot 10^{-1}$	$0.3432 \cdot 10^{-1}$
1/16	u	376	$0.6550 \cdot 10^{-5}$	374	$0.6677 \cdot 10^{-5}$	$0.2380 \cdot 10^{-4}$	$0.2424 \cdot 10^{-4}$
	u_{xx}		$0.6258 \cdot 10^{-3}$		$0.6274 \cdot 10^{-3}$	$0.2457 \cdot 10^{-2}$	$0.2455 \cdot 10^{-2}$
1/32	u	921	$0.2380 \cdot 10^{-6}$	1030	$0.2487 \cdot 10^{-6}$	$0.8301 \cdot 10^{-6}$	$0.8770 \cdot 10^{-6}$
	u_{xx}		$0.1652 \cdot 10^{-4}$		$0.1660 \cdot 10^{-4}$	$0.6432 \cdot 10^{-4}$	$0.6424 \cdot 10^{-4}$

5. Выводы

В существующей двухуровневой неявной разностной формуле порядка $O(k^2 + kh^2 + h^4)$, полученной в [18], используются трехмерные однородные точки сетки для численного решения некоторых одномерных “слабо” квазилинейных бигармонических задач второго рода. Однако этот метод не работает при сингулярных точках ввиду наличия членов типа $1/r_{l-1}$, что создает трудности при $l = 1$, где $r_0 = 0$. Поэтому для решения сингулярных задач была необходима специальная обработка. В данной статье разработана новая двухуровневая неявная разностная схема на неоднородной сетке с использованием такого же числа точек сетки. Она включает внешаговые узловые точки, что приводит к членам вида $1/r_{l-1/2}$. Следовательно, она прямо применима к одномерным нестационарным бигармоническим уравнениям в полярных координатах, что значительно сокращает объем вычислений. Не требуются фиктивные точки вне области решения для включения граничных условий. Установлено с использованием метода фон Неймана, что этот метод является безусловно устойчивым для линеаризованного уравнения КС для $\mu \leq 0$. Так же получено численное решение для пространственной производной второго порядка u_{xx} такой же точности, что часто представляет интерес для различных прикладных задач. Характеристики новой схемы проверены для рассмотренных тестовых задач, включая нелинейное уравнение КС и расширенное уравнение ФК. Численные результаты показывают, что предлагаемая схема дает лучшие результаты, чем в других известных работах. Наш подход имеет преимущество, поскольку он легко применим для решения нелинейных ДУЧП без линеаризации нелинейных членов и дает точные результаты при использовании значительно меньшего числа узлов и, следовательно, сокращает число вычислений. Метод, обсуждавшийся в данной работе, может быть расширен до двумерного случая.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить благодарность рецензентам за конструктивные комментарии и замечания, которые позволили улучшить качество работы.

Литература

1. **Akrivis G., Smyrlis Y.-S.** Implicit–explicit BDF methods for the Kuramoto–Sivashinsky equation // Appl. Numer. Math. — 2004. — Vol. 51. — P. 151–169.
2. **Aronson D.G., Weinberger H.F.** Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics // Adv. Math. — 1978. — Vol. 30. — P. 33–76.
3. **Danumjaya P., Pani A.K.** Finite element methods for the extended Fisher–Kolmogorov (EFK) equation. — Industrial Mathematics Group, Department of Mathematics, IIT Bombay, 2002. — (Research Report: IMG-RR-2002-3).
4. **Danumjaya P., Pani A.K.** Orthogonal cubic spline collocation method for the extended Fisher–Kolmogorov equation // J. Comput. Appl. Math. — 2005. — Vol. 174. — P. 101–117.
5. **Dee G.T., van Saarloos W.** Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 60. — P. 2641–2644.
6. **Doss L.J.T., Nandini A.P.** An H^1 -Galerkin mixed finite element method for the extended Fisher–Kolmogorov equation // Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B. — 2012. — Vol. 3. — P. 460–485.
7. **Fan E.** Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Phys. Lett. A. — 2000. — Vol. 277. — P. 212–218.

8. **Ganaie I.A., Arora S., and Kukreja V.K.** Cubic Hermite collocation solution of Kuramoto–Sivashinsky equation // Int. J. Comput. Math.—2016.— Vol. 93.— P. 223–235.
9. **Hageman L.A., Young D.M.** Applied Iterative Methods.—New York: Dover Publication, 2004.
10. **Haq Sirajul, Bibi Nagina, Tirmizi S.I.A., and Usman M.** Meshless method of lines for the numerical solution of generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Appl. Math. Comput.—2010.— Vol. 217.— P. 2404–2413.
11. **Hooper A.P., Grimshaw R.** Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids.—1985.— Vol. 28.— P. 37–45.
12. **Kelley C.T.** Iterative Methods for Linear and Non-linear Equations.—Philadelphia: SIAM Publications, 1995.
13. **Khater A.H., Temsah R.S.** Numerical solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation by Chebyshev spectral collocation methods // Comput. Math. Appl.—2008.— Vol. 56.— P. 1465–1472.
14. **Kuramoto Y., Tsuzuki T.** Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys.—1976.— Vol. 55.— P. 356–569.
15. **Lai Huilin, Ma Changfeng.** Lattice Boltzmann method for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Phys. A.—2009.— Vol. 388.— P. 1405–1412.
16. **Mitchell A.R.** Computational Methods in Partial Differential Equations.—New York: John Wiley & Sons, 1969.
17. **Mittal R.C., Arora G.** Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the Kuramoto–Sivashinsky equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.—2010.— Vol. 15.— P. 2798–2808.
18. **Mohanty R.K.** An accurate three spatial grid-point discretization of $O(k^2+h^4)$ for the numerical solution of one-space dimensional unsteady quasi-linear biharmonic problem of second kind // Appl. Math. Comput.—2003.— Vol. 140.— P. 1–14.
19. **Mohanty R.K., Kaur Deepti.** High accuracy implicit variable mesh methods for numerical study of special types of fourth order non-linear parabolic equations // Appl. Math. Comput.—2016.— Vol. 273.— P. 678–696.
20. **Mohanty R.K., Kaur Deepti.** A class of quasi-variable mesh methods based on off-step discretization for the numerical solution of fourth-order quasi-linear parabolic partial differential equations // Adv. Difference Equ.—2016.— Vol. 326.— URL: <https://doi.org/10.1186/s13662-016-1048-3>.
21. **Mohanty R.K., Kaur Deepti.** Numerov type variable mesh approximations for 1D unsteady quasi-linear biharmonic problem: application to Kuramoto–Sivashinsky equation // Numer. Algor.—2017.— Vol. 74.— P. 427–459.
22. **Mohanty R.K., McKee Sean, and Kaur Deepti.** A class of two-level implicit unconditionally stable methods for a fourth order parabolic equation // Appl. Math. Comput.—2017.— Vol. 309.— P. 272–280.
23. **Saprykin S., Demekhin E.A., and Kalliadasis S.** Two-dimensional wave dynamics in thin films. I. Stationary solitary pulses // Phys. Fluids.—2005.— Vol. 17.— DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2128607>.
24. **Sivashinsky G.** Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. Part I. Derivation of basic equations // Acta Astronaut.—1977.— Vol. 4.— P. 1117–1206.
25. **Stephenson J.W.** Single cell discretizations of order two and four for biharmonic problems // J. Comput. Phys.—1984.— Vol. 55.— P. 65–80.

26. **Tatsumi T.** Irregularity, regularity and singularity of turbulence // Turbulence and chaotic phenomena in fluids. Proc. Inter. Symposium, Kyoto, Japan, 1983. — North-Holland, 1984. — P. 1–10.
27. **Uddin Marjan, Haq Sirajul, and Siraj-ul-Islam.** A mesh-free numerical method for solution of the family of Kuramoto–Sivashinsky equations // Appl. Math. Comput. — 2009. — Vol. 212. — P. 458–469.
28. **Yan Xu, Shu Chi-Wang.** Local discontinuous Galerkin methods for the Kuramoto–Sivashinsky equations and the Ito-type coupled KdV equations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2006. — Vol. 195. — P. 3430–3447.
29. **Ye Lina, Yan Guangwu, and Li Tingting.** Numerical method based on the lattice Boltzmann model for the Kuramoto–Sivashinsky equation // J. Sci. Comput. — 2011. — Vol. 49. — P. 195–210.
30. **Zimmermann W.** Propagating fronts near a Lifshitz point // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 66. — P. 1546.

*Поступила в редакцию 2 ноября 2016 г.,
в окончательном варианте 5 июня 2017 г.*