

УДК 539.374  
DOI: 10.15372/PMTF202315317

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ СТАЛЬНЫХ ТРУБ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Исследован процесс возникновения внутренней трещины смешанного типа (I и II моды разрушения) в стенке трубы из идеального упругопластического материала под действием комбинированных нагрузок растяжения (сжатия) и изгиба. Процесс разрушения таких материалов описан с помощью модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла, в которой используется дополнительный параметр — поперечник зоны пластичности (ширина зоны предразрушения). Рассмотрен случай сложного нагружения, когда траектория трещины обязательно искривляется, поэтому угол излома траектории определяется с использованием силового интегрального критерия на основе асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины. Для получения критических параметров разрушения предложен двухпараметрический (сдвоенный) критерий прочности в случае сложного напряженного состояния. Проведен анализ параметров, входящих в полученную аналитическую модель. Безразмерные геометрические параметры конструкции найдены численно методом конечных элементов. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения.

**Ключевые слова:** смешанное нагружение, излом траектории трещины, квазихрупкое разрушение, зона предразрушения, критическая нагрузка, кривые разрушения

**Введение.** В металлопрокатном производстве труб под расслоением понимаются нарушения сплошности металла, расположенные внутри стенки трубы, имеющие различную протяженность и распространяющиеся по сечению и длине трубы. Основной причиной возникновения расслоений является наличие дефектов сталеплавильного производства (сильно развитой усадочной раковины в слитке, газовых пузырей, грубых неметаллических включений). При прокате листов в середину “выдаввливаются” неметаллические включения, которые формируют тонкий слой с пониженными механическими характеристиками. При последующем формовании труб из листов под действием технологических нагрузок в этом слое могут возникать разрывы — расслоения металла в середине стенки трубы. Второй причиной возникновения расслоений является действие силовых факторов в процессе эксплуатации труб. Такие дефекты часто появляются в магистральных трубопроводах: на участке трубопровода длиной 1 км их может быть несколько десятков. Данные дефекты развиваются со временем и могут выходить на поверхность, что приводит к крупным авариям с утечками углеводородов [1–7].

Расслоения представляют собой локальные нарушения сплошности металла протяженностью более 300 мм по длине трубы и до 250 мм по окружности. Ширина зоны, в которой формируются расслоения, не превышает 4 мм при толщине стенок труб  $18 \div 40$  мм.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-19-00514).

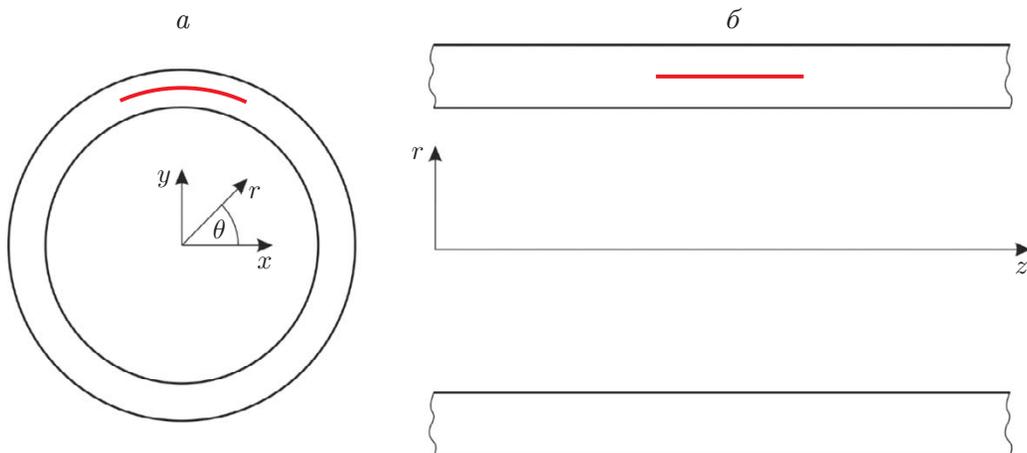


Рис. 1. Поперечное (а) и меридиональное (б) сечения трубы с трещиноподобным дефектом

Расслоения оказываются точно в середине стенки трубы и занимают некоторую часть окружности. На рис. 1 показаны поперечное и меридиональное сечения трубы с трещиноподобным дефектом.

Расслоения — часто встречающийся дефект труб. В процессе эксплуатации они развиваются под действием изгибающих и крутящих моментов, что приводит к разрушениям. Указанные обстоятельства являются основанием для постановки задачи оценки опасности расслоений. В существующих ГОСТах, нормах и правилах имеются ограничения на допустимые размеры расслоений. При их превышении трубы зачастую необоснованно бракуются, что экономически нецелесообразно, поскольку ремонт газопровода является очень дорогостоящим. Поэтому актуальна задача оценки предельного состояния конструкции с трещиноподобным дефектом для принятия решения о продлении срока эксплуатации, проведении частичного или капитального ремонта либо о прекращении эксплуатации.

Состояние механически напряженного материала является переходным между хрупким и вязким состояниями, различие которых определяется соотношением энергетических затрат на обратимое и необратимое деформирование. В связи с этим возникает необходимость исследования состояния материала по двум критериям с непрерывным переходом из одного в другой. Построение двухпараметрического критерия разрушения позволяет объединить области использования однопараметрических критериев разрушения, которые соответствуют различным предельным состояниям материала. Такой критерий может быть основан на однопараметрических силовом, деформационном, энергетическом критериях и их комбинации. В работах [8–10] предложен двухпараметрический (сдвоенный) интегральный критерий разрушения в упругопластическом материале и построены диаграммы разрушения плоских образцов при наличии в них острых внутренних трещин нормального отрыва (I мода разрушения) и поперечного сдвига (II мода разрушения). Представление зоны предразрушения в материалах со структурой в виде прямоугольника получено с использованием модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [11, 12] на основе подхода Нейбера — Новожилова [13, 14].

В данной работе двухпараметрический (сдвоенный) критерий прочности применяется для определения критического состояния стальной трубы с центральной внутренней трещиной при смешанном (I и II моды) нагружении (см. рис. 1, б). Предлагаемый инженерный подход основан на предположении о том, что зарождению и росту трещины предшествуют следующие состояния материала: упругое деформирование, переход в пластическое состояние, развитие пластических деформаций, исчерпание ресурса пластичности и собственно

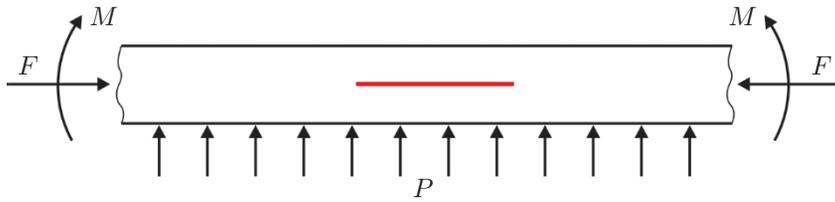


Рис. 2. Внешние нагрузки, действующие на фрагмент трубы

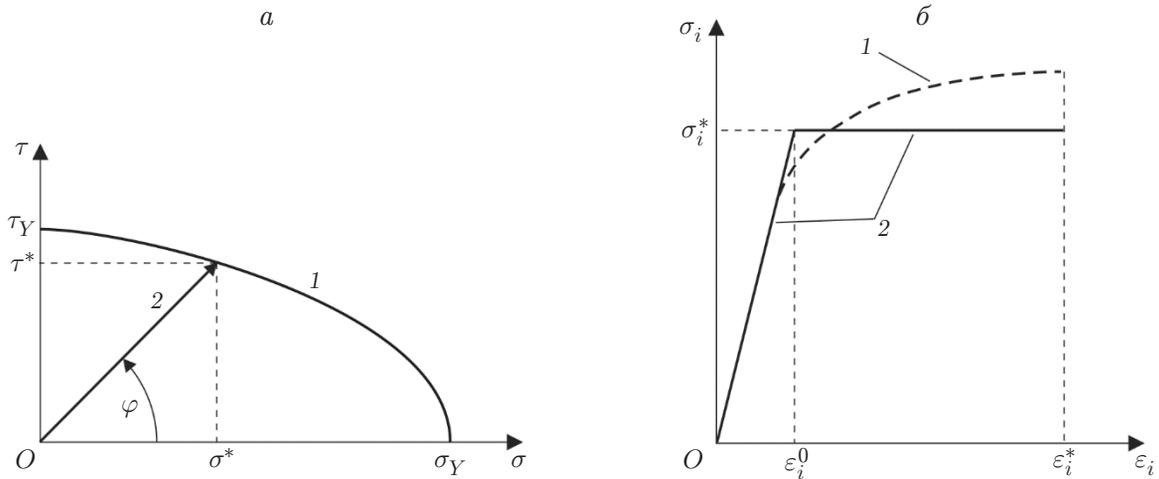


Рис. 3. Кривая предельного состояния (а) и диаграмма деформирования (б) материала: а — 1 — кривая предельного состояния, 2 — путь пропорционального нагружения; б — 1 — экспериментальная диаграмма деформирования материала, 2 — ее аппроксимация двухзвенной ломаной

разрушение. Полученные в работе результаты позволяют оценивать несущую способность конструкций с трещинами при более сложных условиях нагружения по сравнению с однопараметрическими критериями механики разрушения.

### 1. Свойства упругопластического материала при однократном нагружении.

Расслоение материала внутри стенки трубы будем моделировать прямолинейной внутренней трещиной, расположенной в середине стенки (рис. 2). Обозначим длину трещины  $2l$ , длину трубы  $2L$ , толщину стенки  $t$ . Предполагаем, что длина трубы достаточно большая:  $L \gg l$ . Действие внешних нагрузок (внутреннее давление  $P$ , изгибающие моменты  $M$ , торцевые усилия растяжения (сжатия)  $F$ ) моделируется вектором напряжений  $\mathbf{p}_\infty$ , который лежит в плоскости меридионального сечения, при этом трещина деформируется по смешанной моде (нормальный отрыв и поперечный сдвиг). Кручение трубы не рассматривается, поэтому напряженно-деформированное состояние можно считать двумерным (осесимметричным), причем полагаются выполненными условия плоской деформации (продольный сдвиг отсутствует). Рассматривается пропорциональное (простое) нагружение, т. е. вектор напряжений  $\mathbf{p}_\infty$  не меняет направления, а его величина монотонно возрастает. В окрестности вершины трещины возникает сложное напряженное состояние, при котором возможны излом или ветвление ее траектории. Выбор того или иного направления распространения трещины определяется прочностными характеристиками материала.

На рис. 3,а приведена кривая предельного состояния типа кривой Кулона — Мора (кривая 1). Путь пропорционального нагружения  $\tau/\sigma = c = \text{const}$  показан лучом 2, направление которого задается углом  $\varphi$  на плоскости  $\sigma - \tau$  ( $\sigma, \tau$  — нормальные и сдвиговые напряжения соответственно,  $\sigma_Y, \tau_Y$  — пределы прочности (текучести) материала на

растяжение и сдвиг,  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$  — критические значения напряжений на заданном пути деформирования, индекс “\*” соответствует критическому состоянию). Если  $\sigma < \sigma^*$ ,  $\tau < \tau^*$ , то материал не разрушается, если  $\sigma = \sigma^*$ ,  $\tau = \tau^*$ , то начинается процесс разрушения. Постоянная  $c = \operatorname{tg} \varphi$  определяет тип нагружения, который не зависит от прочностных характеристик материала. На плоскости предельных состояний  $\sigma$ – $\tau$  имеется разрез вдоль луча  $\varphi = \pm\pi$ , поскольку при  $\sigma < 0$ ,  $\tau = 0$  отсутствуют как раскрытие, так и поперечное смещение берегов трещины. В полярной системе координат кривую предельного состояния можно представить в виде  $\rho = \rho(\varphi)$  ( $\rho(0) = \sigma_Y$ ,  $\rho(\pi/2) = \tau_Y$ ), причем для изотропного материала  $\rho(\varphi) = \rho(-\varphi)$  в силу принципа локальной симметрии Гольдштейна — Салганика [15]. Для хрупких и квазихрупких материалов  $\tau_Y \approx \sigma_Y$ , для вязких и квазивязких материалов  $\tau_Y \ll \sigma_Y$ .

Рассмотрим  $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграмму деформирования материала в случае пропорционального нагружения ( $\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  — интенсивность напряжений;  $\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}$  — интенсивность деформаций;  $\varepsilon$  — осевая деформация;  $\gamma$  — деформация сдвига). Подобные диаграммы могут быть получены, например, в экспериментах на одноосное растяжение с кручением тонкостенных трубчатых образцов [16]. На рис. 3,б показаны полученная в эксперименте диаграмма деформирования материала (кривая 1) и ее аппроксимация двухзвенной ломаной (кривая 2), которая моделирует поведение идеального упругопластического материала. Параметры аппроксимации ( $\sigma_i^*$  — критические значения напряжений,  $\varepsilon_i^0$  — максимальные упругие деформации,  $\varepsilon_i^*$  — предельные деформации, соответствующие началу процесса разрушения) выбираются с использованием условия равенства площадей областей под кривыми 1 и 2. В случае нагружения по чистой первой или чистой второй моде разрушения  $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграммы деформирования становятся классическими  $(\sigma - \varepsilon)$ - и  $(\tau - \gamma)$ -диаграммами соответственно.

**2. Силовой критерий разрушения. Углы ветвления трещины.** Введем декартову прямоугольную систему координат  $Oxy$ , начало которой находится в вершине трещины, а ось  $Ox$  направлена вдоль оси трещины, и связанную с ней полярную систему координат  $Or\theta$ . Асимптотическое представление напряжений в окрестности вершины трещины можно записать в виде [17]

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta, \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + T \sin^2 \theta, \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] - T \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  — радиальные, окружные и сдвиговые напряжения;  $K_I$ ,  $K_{II}$  — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) по I и II модам соответственно;  $T$  — несингулярные члены разложения в ряд, которые обычно называются  $T$ -напряжениями. Таким образом, введены две плоскости: физическая плоскость с трещиной-разрезом  $Or\theta$  и воображаемая плоскость (предельного состояния) с координатами  $\rho$ ,  $\varphi$  (см. рис. 3,а).

Рассмотрим силовой (интегральный) критерий Нейбера — Новожилова роста трещины в выбранном направлении  $\theta$  [13, 14]:

$$\langle \sigma_\theta(\theta) \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_\theta(r, \theta) dr = \sigma^*, \quad \langle \tau_{r\theta}(\theta) \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \tau_{r\theta}(r, \theta) dr = \tau^*.\quad (2)$$

Здесь  $\langle \sigma_\theta(\theta) \rangle$ ,  $\langle \tau_{r\theta}(\theta) \rangle$  — осредненные окружные и касательные напряжения в выбранном направлении;  $d$  — характерный линейный размер структуры материала (диаметр зерна).

При  $\langle \sigma_\theta(\theta) \rangle < \sigma^*$ ,  $\langle \tau_{r\theta}(\theta) \rangle < \tau^*$  трещина не движется. Когда осредненные по интервалу  $d$  напряжения  $\langle \sigma_\theta(\theta) \rangle$ ,  $\langle \tau_{r\theta}(\theta) \rangle$  достигают напряжений критических состояний  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$ , выполняется критерий (2) для некоторого критического угла  $\theta^*$ , определяющий направление разрушения. Тогда в данном направлении происходит продвижение прямолинейной трещины на расстояние, равное интервалу осреднения, если  $\theta^* = 0$ ; излом траектории трещины, если  $\theta^* \neq 0$ ; ветвление трещины, если  $\pm\theta^* \neq 0$ . При  $\theta^* \neq 0$  поле напряжений в окрестности вершины трещины существенно усложняется: даже после излома (ветвления) исходной трещины нормального отрыва кроме I моды появляется II мода в окрестности ее новых вершин.

Напряжения критических состояний на воображаемой плоскости  $\sigma-\tau$  определяются следующим образом:

$$\sigma^* = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad \tau^* = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad \tau^*/\sigma^* = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Для компонент касательных и окружных напряжений на физической плоскости  $Or\theta$  выполняется соотношение

$$\frac{\langle \tau_{r\theta}(\theta) \rangle}{\langle \sigma_\theta(\theta) \rangle} = \frac{K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{\frac{\pi d}{2}} T \sin \theta \cos \theta}{K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sqrt{\frac{\pi d}{2}} T \sin^2 \theta}, \quad (4)$$

где множитель  $\sqrt{\pi d/2}$  получен путем осреднения напряжений по интервалу  $d$ . Очевидно, что тип напряженного состояния зависит не только от отношения  $K_I/K_{II}$ , но и от величины  $T$ -напряжений.

Представим КИН  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ -напряжения в виде

$$K_I = p_\infty \sqrt{\pi l} Y_1, \quad K_{II} = p_\infty \sqrt{\pi l} Y_2, \quad T = p_\infty Y_3, \quad (5)$$

где  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  — безразмерные коэффициенты, зависящие от геометрии фрагмента трубы (отношений  $l/L$ ,  $t/L$ ) и ориентации трещины относительно вектора напряжений  $p_\infty$ . Сравнивая соотношения (3) и (4), получаем уравнение, связывающее углы  $\varphi$  и  $\theta$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y_1 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + Y_2 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \alpha Y_3 \sin \theta \cos \theta}{Y_1 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3Y_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \alpha Y_3 \sin^2 \theta}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha = \sqrt{d/(2l)}$ . Подставляя какое-либо значение угла  $\theta$  на физической плоскости  $Or\theta$  в (6), получаем угол  $\varphi$  на воображаемой плоскости  $\sigma-\tau$ , задающий некоторый путь пропорционального нагружения (см. рис. 3, а).

Вычислим интегралы в (2) с учетом (1) и преобразуем полученные выражения, используя (3), (5). В результате имеем уравнения, описывающие излом (ветвление) трещины:

$$\frac{p_\infty}{\alpha} \frac{Y_1 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3Y_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \alpha Y_3 \sin^2 \theta}{\rho(\varphi) \cos \varphi} = 1, \quad (7)$$

$$\frac{p_\infty}{\alpha} \frac{Y_1 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + Y_2 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \alpha Y_3 \sin \theta \cos \theta}{\rho(\varphi) \sin \varphi} = 1.$$

Заметим, что в силу пропорциональности нагружения первое и второе соотношения в (7) эквивалентны, т. е. использование окружных либо касательных напряжений в критерии (2) приводит к одним и тем же результатам. Поэтому далее будем использовать первое соотношение (7). С учетом зависимости  $\varphi = \varphi(\theta)$  (6) запишем первое соотношение (7) в виде

$$\frac{p_\infty}{\alpha} H(\theta) = 1, \quad H(\theta) = \frac{Y_1 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3Y_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \alpha Y_3 \sin^2 \theta}{\rho(\varphi(\theta)) \cos \varphi(\theta)}. \quad (8)$$

Направление разрушения  $\theta^*$  определяется с использованием условия максимума функции  $H(\theta)$  в данном направлении:

$$H'(\theta^*) = 0, \quad H''(\theta^*) < 0. \quad (9)$$

Геометрические параметры  $Y_1, Y_2, Y_3$  находятся методом конечных элементов.

Анализ решений уравнения (9) для обобщенного напряженного состояния ( $K_I > 0, K_{II} \neq 0$ ), выполненный в [18], позволяет сделать следующие выводы: при  $\theta^* = 0$  трещина распространяется прямолинейно, при  $\theta^* \neq 0$  имеется излом траектории трещины, при  $\theta_1^* \neq \theta_2^*$  происходит двукратное ветвление трещины под произвольными углами, при  $\theta_1^* \neq \theta_2^* \neq \theta_3^* \neq \dots$  — множественное ветвление трещины под произвольными углами. В отдельных случаях трещина распространяется прямолинейно при обобщенном напряженном состоянии. Только в хрупких материалах трещина распространяется перпендикулярно направлению максимальных растягивающих напряжений, когда в окрестности вершины трещины отсутствуют сдвиговые напряжения (гипотеза Эрдогана — Си [19]). В случае обобщенного напряженного состояния ( $K_I > 0, K_{II} \neq 0$ ) принцип локальной симметрии [15] не выполняется, даже если  $\rho(\varphi) = \rho(-\varphi)$ .

Таким образом, силовой критерий (2) описывает начало процесса формирования единственной зоны предразрушения в хрупком материале или двух зон предразрушения в квазвязком материале и позволяет определить углы  $\theta^*$  ветвления внутренней трещины, но не определяет длины зон предразрушения. При выполнении критерия (2) ближайшая к вершине трещины структура материала находится в критическом состоянии. Однако после исчерпания несущей способности этой структуры возможно дополнительное нагружение тела с трещиной за счет закритического деформирования этой структуры и докритического деформирования следующей структуры, когда в окрестности вершины трещины отсутствуют повреждения. При выполнении деформационного критерия имеет место катастрофическое разрушение исходной системы.

**3. Модель Леонова — Панасюка — Дагдейла.** Для описания напряженно-деформированного состояния в зоне предразрушения ветвящейся трещины используем модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [11, 12]. Пусть начало декартовой прямоугольной системы координат  $Oxy$  находится в вершине отростка трещины, расположенного под углом  $\theta^*$  к плоскости исходной трещины, а ось  $Ox$  направлена вдоль отростка (рис. 4, а). Зона предразрушения, длину которой обозначим через  $b$ , а ширину через  $a$ , занимает всю длину отростка (заштрихованная область на рис. 4, б). В классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла исходная внутренняя прямолинейная трещина длиной  $2l_0$  заменяется фиктивной трещиной-разрезом длиной  $2l = 2l_0 + 2b$  ( $b$  — длина нагруженного участка или длина зоны предразрушения), две зоны предразрушения расположены на продолжении исходной трещины. В классической модели рассматривается трещина нормального отрыва, поэтому в зоне предразрушения действуют только нормальные напряжения  $\sigma^*$ , в случае сложного нагружения наряду с нормальными появляются сдвиговые напряжения  $\tau^*$ , которые совпадают с напряжениями критических состояний (см. рис. 3, а). Сжимающие напряжения  $\sigma_y = -\sigma^*$ ,  $\tau_{xy} = -\tau^*$ , действующие на берегах фиктивной трещины

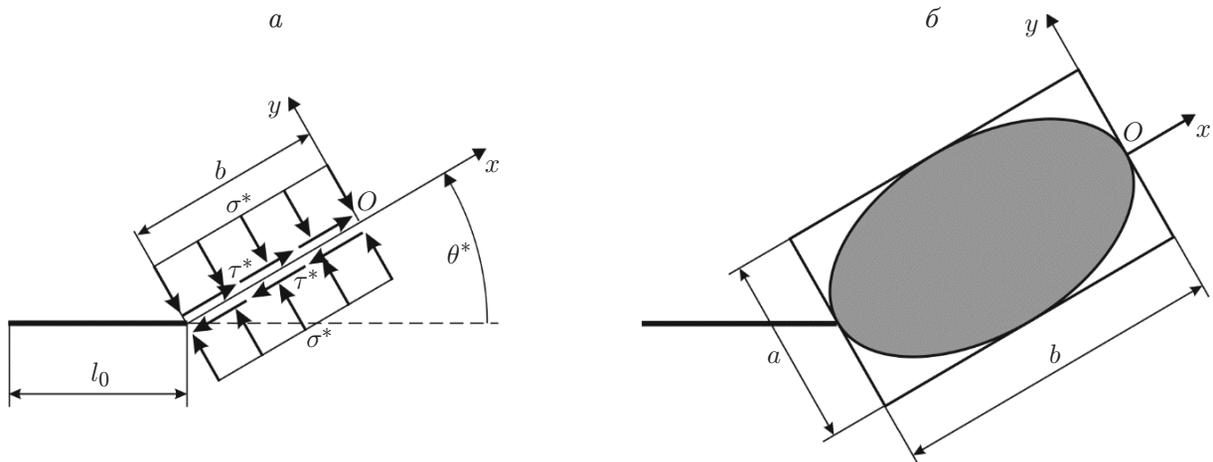


Рис. 4. Модель Леонова — Панасюка — Дагдейла:

*a* — напряжения, действующие на отрезке трещины, *b* — аппроксимация зоны пластичности (заштрихованная область) прямоугольной зоной предразрушения

в зоне предразрушения, препятствуют раскрытию трещины и тем самым устраняют сингулярность поля напряжений в окрестности ее вершины. В модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла фиктивная трещина имеет излом. Обозначим длину этой трещины через  $l = l_0 + b$ . Далее рассматривается случай маломасштабного пластического течения, когда длина зоны предразрушения (зоны пластичности) много меньше длины реальной трещины:  $b/l_0 \ll 1$ .

Поля напряжений на продолжении фиктивной трещины  $x > 0$  можно представить в виде

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{reg}, \quad \tau_{xy}(x, 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} + \tau_{reg}. \quad (10)$$

Здесь  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}(x, 0)$  — нормальные и касательные напряжения, имеющие интегрируемую особенность;  $\sigma_{reg} = p_\infty Y_{\sigma r}$ ,  $\tau_{reg} = p_\infty Y_{\tau r}$  — регулярные составляющие поля напряжений в окрестности вершины трещины;  $Y_{\sigma r}$ ,  $Y_{\tau r}$  — безразмерные коэффициенты, зависящие от геометрии сечения трубы и схемы нагружения;  $K_I = K_{I\infty} + K_{Ib} > 0$ ,  $K_{II} = K_{II\infty} + K_{IIb} > 0$  — суммарные КИН;  $K_{I\infty} > 0$ ,  $K_{II\infty} > 0$  — КИН, обусловленные внешней нагрузкой  $p_\infty$ ;  $K_{Ib} < 0$ ,  $K_{IIb} < 0$  — КИН, обусловленные постоянными напряжениями  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$ , действующими в зоне предразрушения. Первые и вторые слагаемые в соотношениях (10) представляют собой сингулярную и регулярную составляющие напряжений соответственно. Суммарные КИН  $K_I$ ,  $K_{II}$  положительны, так как рассматривается маломасштабная текучесть.

Поле смещений берегов фиктивной трещины  $x < 0$  при плоской деформации можно представить в виде

$$2v(x, 0) = \frac{2(1-\nu)}{G} K_I \sqrt{-\frac{2x}{\pi}}, \quad 2u(x, 0) = \frac{2(1-\nu)}{G} K_{II} \sqrt{-\frac{2x}{\pi}}, \quad x \leq 0. \quad (11)$$

Здесь  $2v(x, 0)$ ,  $2u(x, 0)$  — величина раскрытия трещины и поперечное смещение (разность смещений соответствующих точек) ее берегов соответственно;  $G = E/(2(1+\nu))$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

**4. Двухпараметрический (сдвоенный) критерий прочности.** Для построения диаграмм квазихрупкого разрушения трубы при комбинированном действии внешних нагрузок используем двухпараметрический (сдвоенный) интегральный критерий прочности [8–10]. Достаточный (сдвоенный) критерий разрушения (прочности) можно предста-

вить в виде следующих соотношений:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma^*, \quad \frac{1}{d} \int_0^d \tau_{xy}(x, 0) dx = \tau^*; \quad (12)$$

$$2v(-b^*) = v^*, \quad 2u(-b^*) = u^*. \quad (13)$$

Здесь напряжения  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}(x, 0)$  имеют вид (10);  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$  — напряжения, соответствующие критическим состояниям;  $d$  — характерный линейный размер структуры материала (интервал осреднения);  $b^*$  — критическая длина зоны предразрушения;  $v^*$ ,  $u^*$  — критическая величина раскрытия трещины и критическое поперечное смещение ее берегов соответственно. Равенства (12) двухпараметрического критерия определяют достижение критических значений напряжений  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$  (после осреднения) на продолжении фиктивной трещины, а равенства (13) этого критерия — смещения ее берегов в вершине реальной трещины. В соответствии с терминологией Новожилова критерий разрушения (12) называется необходимым, а совокупность условий (12), (13) — достаточным критерием разрушения. Критерий (12) называется необходимым, поскольку он определяет начало процесса разрушения, критерий (12), (13) называется достаточным, поскольку при выполнении обоих условий происходит окончательное разрушение конструкции. Следует отметить, что предлагаемый критерий (12), (13) является сдвоенным: деформационный критерий разрушения (13) сформулирован для вершины исходной трещины, а силовой критерий (12) для нормальных и касательных напряжений с учетом осреднения сформулирован для области перед вершиной фиктивной трещины.

Длина зоны предразрушения  $b$  определяется при решении задачи о разрушении (12), (13), а поперечник этой зоны  $a$  вычисляется с использованием решения упругопластической задачи [20]. Зона пластичности в окрестности вершины трещины, представленная на рис. 4, б в виде эллипса, аппроксимируется прямоугольной зоной предразрушения с поперечником  $a$  и длиной  $b$ . Критические параметры  $v^*$ ,  $u^*$  вычисляются из соотношений

$$v^* = a^*(\varepsilon^* - \varepsilon_0), \quad u^* = a^*(\gamma^* - \gamma_0), \quad (14)$$

где деформации  $\varepsilon_i^0 = \sqrt{(\varepsilon_0)^2 + (\gamma_0)^2}$ ,  $\varepsilon_i^* = \sqrt{(\varepsilon^*)^2 + (\gamma^*)^2}$  определяются по  $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграмме (см. рис. 3, б). В приближенной постановке форму и размеры зоны пластичности в окрестности вершины трещины в однородном материале можно определить, используя критерий пластичности Мизеса.

В предположении пропорциональности пути нагружения конструкции и соосности тензоров напряжений и деформаций первые соотношения критерия (12), (13) эквивалентны вторым соотношениям этого критерия. В отличие от классических критериев разрушения [11, 12, 21] в критерии (12), (13) используются ограничения

$$K_I > 0, \quad K_{II} \neq 0, \quad (15)$$

а поперечник зоны предразрушения отождествляется с диаметром зоны пластичности в вершине реальной трещины. Ниже ограничения (15) используются при получении критических параметров разрушения.

С помощью сдвоенного критерия (12), (13) процесс разрушения конструкции можно описать следующим образом. Рассмотрим достаточный критерий (6), (7) на отрезке трещины. Пусть задана некоторая острая прямолинейная (внутренняя, краевая и т. п.) трещина длиной  $l_0$ , перед вершиной которой материал находится в исходном состоянии, тогда зона предразрушения отсутствует и ее длина  $b = 0$ . Угол излома траектории трещины  $\theta^*$  в зависимости от типа нагружения определяется на основе силового критерия (2) с использованием алгоритма, изложенного в п. 2. При монотонном нагружении не происходит роста трещины, до тех пор пока нагрузка  $p_\infty < p_\infty^0$  ( $p_\infty^0$  — критическое напряжение для острых

трещин, полученное по необходимому критерию разрушения (12)). В тот момент, когда нагрузка достигает критического напряжения для необходимого критерия  $p_\infty^0$ , начинает двигаться вершина трещины и происходит неупругое деформирование материала в зоне предразрушения, причем  $b = b(p_\infty)$ . Длина фиктивной трещины  $l = l_0 + b$  начинает увеличиваться. Соотношения (12) определяют условия начала движения вершины фиктивной трещины. Одновременно с возникновением зоны предразрушения формируются силовые связи в окрестности вершины фиктивной трещины, препятствующие ее раскрытию в соответствии с обобщенной моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла (см. рис. 4, а). Вследствие действия силовых связей между берегами трещины имеет место ее устойчивый рост ( $l_0 < l < l^*$ ) до определенного уровня нагружения  $p_\infty^*$  ( $p_\infty^* > p_\infty^0$  — критическое напряжение для острых трещин, полученное по достаточному критерию разрушения (12), (13);  $l^* = l_0 + b^*$  — критическая длина фиктивной трещины;  $b^* = b(p_\infty^*)$  — критическая длина зоны предразрушения). Соотношения (13) определяют условия разрушения силовых связей, действующих в зоне предразрушения и в области перед вершиной реальной трещины. В тот момент, когда длина зоны предразрушения  $b$  достигает критической величины  $b^*$ , устойчивый рост трещины сменяется неустойчивым.

Получим оценки сингулярных составляющих полей напряжений (10). Представим КИН  $K_{I\infty}$ ,  $K_{II\infty}$  в виде

$$K_{I\infty} = p_\infty \sqrt{\pi l} Y_{1\infty}, \quad K_{II\infty} = p_\infty \sqrt{\pi l} Y_{2\infty}, \quad (16)$$

а КИН  $K_{Ib}$ ,  $K_{IIb}$  — в виде [22]

$$K_{Ib} = -\sigma^* \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{l}\right) Y_{1b}, \quad K_{IIb} = -\tau^* \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{l}\right) Y_{2b}, \quad (17)$$

где  $Y_{1\infty}$ ,  $Y_{2\infty}$ ,  $Y_{1b}$ ,  $Y_{2b}$  — безразмерные коэффициенты, зависящие от геометрии сечения трубы и схемы приложения внешних нагрузок. В условиях маломасштабной текучести имеет место неравенство  $b/l \ll 1$ . Тогда с точностью до величин высшего порядка малости справедливо представление  $\arccos(1 - b/l) \approx \sqrt{2b/l}$ , которое позволяет представить КИН (17) в виде

$$K_{Ib} = -2\sigma^* \sqrt{\frac{2b}{\pi}} Y_{1b}, \quad K_{IIb} = -2\tau^* \sqrt{\frac{2b}{\pi}} Y_{2b}. \quad (18)$$

Вычисляя интегралы в (12) с учетом представлений (16), (18), получаем

$$\begin{aligned} p_\infty^* \left( Y_{\sigma r} + \sqrt{\frac{2l^*}{d}} Y_{1\infty} \right) - \frac{2}{\pi} \sigma^* \sqrt{\frac{2l^*}{d}} \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} Y_{1b} &= \sigma^*, \\ p_\infty^* \left( Y_{\tau r} + \sqrt{\frac{2l^*}{d}} Y_{2\infty} \right) - \frac{2}{\pi} \tau^* \sqrt{\frac{2l^*}{d}} \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} Y_{2b} &= \tau^*. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу пропорциональности нагружения и пропорциональности деформирования в окрестности вершины трещины оба равенства в (19) эквивалентны друг другу, поэтому дальнейшие расчеты проведем только для первых соотношений в (13), (14), (16), (18), (19).

Используя (13), (14), (16), (18), преобразуем первое равенство в (11) к виду

$$\left( \frac{p_\infty^*}{\sigma^*} \sqrt{\pi l^*} Y_{1\infty} - 2 \sqrt{\frac{2b^*}{\pi}} Y_{1b} \right) \sqrt{\frac{2b^*}{\pi}} = \frac{\bar{\varepsilon} a^*}{4(1 - \nu^2)}, \quad (20)$$

где  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon^* - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$  — безразмерный параметр, характеризующий запас пластичности материала. Из критерия пластичности Мизеса, который в главных осях имеет вид  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2(\sigma^*)^2$ , находим радиус зоны пластичности

$$\begin{aligned} r_p(\theta) &= \frac{K_{I\infty}^2}{4\pi(\sigma^*)^2} \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] + \frac{2K_{I\infty} K_{II\infty}}{4\pi(\sigma^*)^2} \sin \theta [3 \cos \theta - (1 - 2\nu)^2] + \\ &+ \frac{K_{II\infty}^2}{4\pi(\sigma^*)^2} \left[ 6 - \frac{9}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 - \cos \theta) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Отождествим поперечник зоны предразрушения  $a$  с диаметром зоны пластичности в вершине реальной трещины:

$$a = r_p \left( \frac{\pi}{2} \right) + r_p \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{K_{I\infty}^2 + K_{II\infty}^2}{4\pi(\sigma^*)^2} [3 + 2(1 - 2\nu)^2]. \quad (22)$$

Для критического значения  $a^*$ , учитывая представления (16), получаем

$$a^* = \frac{l^*}{4} \left( \frac{p_\infty^*}{\sigma^*} \right)^2 (Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2) [3 + 2(1 - 2\nu)^2]. \quad (23)$$

С учетом (23) соотношение (20) можно записать в виде

$$\left( \bar{p}_\infty^* Y_{1\infty} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} Y_{1b} \right) \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} = \frac{\bar{\varepsilon}}{4} (\bar{p}_\infty^*)^2 (Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2) \chi, \quad (24)$$

где  $\chi = [3 + 2(1 - 2\nu)^2]/[4(1 - \nu^2)]$ ;  $\bar{p}_\infty^* = p_\infty^*/\sigma^*$  — безразмерная критическая нагрузка. Раскрывая скобки в левой части (24) и отбрасывая произведение корней как величину более высокого порядка малости по сравнению с  $\sqrt{2b^*/l^*}$  в силу ограничения  $b/l \ll 1$ , находим относительную критическую длину зоны предразрушения

$$\sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} = \frac{\bar{\varepsilon}}{4} \bar{p}_\infty^* \frac{Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2}{Y_{1\infty}} \chi. \quad (25)$$

Если ограничение  $b/l \ll 1$  не выполняется (случай квазивязкого разрушения), то в формулах (20)–(24) нужно использовать (17) вместо (18). В результате получаем трансцендентное уравнение, решение которого может быть найдено численными методами. Подставляя найденное значение  $\sqrt{2b^*/l^*}$  в первое уравнение (19), получаем зависимость безразмерной критической нагрузки  $\bar{p}_\infty^* = p_\infty^*/\sigma^*$  от безразмерной критической длины трещины  $\bar{l}^* = l^*/d$ :

$$\bar{p}_\infty^* \left[ Y_{\sigma r} + \left( Y_{1\infty} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2\pi} \frac{Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2}{Y_{1\infty}} \chi Y_{1b} \right) \sqrt{2\bar{l}^*} \right] = 1. \quad (26)$$

Из условия ограниченности предельной нагрузки  $\bar{p}_\infty^* \leq 1$  следует

$$\bar{\varepsilon} \leq \frac{2\pi}{\chi Y_{1b}} \frac{Y_{1\infty}^2}{Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2}. \quad (27)$$

Условие (27) ограничивает длину площадки текучести  $\varepsilon^* - \varepsilon_0$  на  $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграмме деформирования материала (горизонтальный участок кривой 2 на рис. 3, б). Неравенство (27) — ограничение, при котором существует квазихрупкое разрушение в условиях маломасштабной текучести однородного материала в зоне предразрушения. При  $\varepsilon^* \rightarrow \varepsilon_0$  из уравнения (26) получаем уравнение, соответствующее необходимому критерию разрушения:

$$\bar{p}_\infty^0 = (Y_{\sigma r} + Y_{1\infty} \sqrt{2\bar{l}_0})^{-1}. \quad (28)$$

Здесь  $\bar{p}_\infty^0 = p_\infty^0/\sigma^*$  — безразмерное критическое напряжение, соответствующее необходимому критерию разрушения (12);  $\bar{l}_0 = l_0/d$  — безразмерная начальная длина трещины. Соотношение (28) описывает хрупкое разрушение материалов. Очевидно, что  $\bar{p}_\infty^0 < \bar{p}_\infty^*$  при  $l_0 < l^*$ .

Таким образом, при пропорциональном нагружении и непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения вследствие пластического течения получена система двух нелинейных уравнений (25), (26) относительно критических параметров  $b^*$  и  $p_\infty^*$ , описывающая зону предразрушения и кривую разрушения в случае сложного напряженного состояния. В силу эквивалентности первых и вторых соотношений в (12), (13)

для касательных напряжений целесообразно использовать эквивалентную систему двух нелинейных уравнений

$$\sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} = \frac{\bar{\gamma}}{2} \bar{p}_\infty^* \frac{Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2}{Y_{2\infty}} \chi; \quad (29)$$

$$\bar{p}_\infty^* \left[ Y_{\tau r} + \left( Y_{2\infty} - \frac{\bar{\gamma}}{\pi} \frac{Y_{1\infty}^2 + Y_{2\infty}^2}{Y_{2\infty}} \chi Y_{2b} \right) \sqrt{2l^*} \right] = 1. \quad (30)$$

Здесь  $\bar{\gamma} = (\gamma^* - \gamma_0)/\gamma_0$  — запас пластичности материала при простом сдвиге;  $\chi = [3 + 2(1 - 2\nu)^2]/[4(1 - \nu)]$ .

**5. Построение диаграмм квазихрупкого разрушения.** Система нелинейных уравнений (25), (26) (или эквивалентная ей (29), (30)) полностью связана: критическая нагрузка  $p_\infty^*$  зависит от длины трещины  $l^*$ , которая зависит от длины зоны предразрушения  $b^*$ , в свою очередь, зависящей от критической нагрузки. Поэтому данная система решается итерационными методами. Геометрические параметры  $Y_{\sigma r}$ ,  $Y_{\tau r}$  (10),  $Y_{1\infty}$ ,  $Y_{2\infty}$  (16),  $Y_{1b}$ ,  $Y_{2b}$  (17) для различных геометрических условий и условий нагружения определяются методом конечных элементов.

Для проведения конечно-элементного анализа были выбраны следующие размеры фрагмента трубы:  $L = 100$  мм,  $t = 18$  мм, длина трещины  $l_0$  варьировалась в диапазоне  $10 \div 80$  мм. Конечно-элементные модели были созданы с использованием восьмиузловых четырехугольных элементов с квадратичной аппроксимацией смещений, область вблизи вершины трещины моделировалась элементами сингулярного типа для повышения точности результатов численных расчетов. Сингулярный элемент конструировался путем сдвига промежуточного узла к вершине трещины на расстояние, равное  $1/4$  длины ребра элемента. Для создания смешанного нагружения к внешней поверхности прикладывалась равномерно распределенная нагрузка, такая что вектор напряжений  $p_\infty$  имел нормальную и сдвиговую компоненты, торцы трубы были закреплены. Механические характеристики материала имели следующие значения:  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $\sigma_Y = 400$  МПа,  $\bar{\varepsilon} = 2,5$ .

В результате статического расчета для случая приложенной единичной нагрузки  $p_\infty = 1$  МПа определены соответствующие значения КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  с помощью инвариантного  $J$ -интеграла, который в случае плоской деформации связан с  $K_I$ ,  $K_{II}$  соотношением  $JE' = K_I^2 + K_{II}^2$ , где  $E' = E/(1 - \nu^2)$ . Разделить  $J$ -интеграл на I и II моды можно следующим образом:  $J$ -интеграл равен сумме квадратов  $K_I^2 + K_{II}^2$ , а из отношения касательных и нормальных напряжений на продолжении трещины в окрестности ее вершины следует отношение  $K_{II}/K_I$ .

На рис. 5 представлены зависимости  $\bar{p}_\infty^0 = \bar{p}_\infty^0(\bar{l}_0)$  (28) (кривая 1) и  $\bar{p}_\infty^* = \bar{p}_\infty^*(\bar{l}^*)$  (26) (кривая 2), связывающие критические напряжения с длинами трещин  $\bar{l}_0$ ,  $\bar{l}^*$ . Длины трещин  $l_0$  и  $l^*$  отнесены к длине трубы  $L$ . При заданной величине нагружения  $\bar{p}_\infty$  диаграммы квазихрупкого разрушения позволяют оценить состояние конструкции с трещиной. Две критические кривые  $\bar{p}_\infty^0$  и  $\bar{p}_\infty^*$  разделяют плоскость длина трещины — напряжение на три подобласти: область  $\bar{p}_\infty < \bar{p}_\infty^0$ , в которой отсутствуют повреждения; область устойчивого роста трещины  $\bar{p}_\infty^0 < \bar{p}_\infty < \bar{p}_\infty^*$ , где имеет место накопление повреждений в материале зоны предразрушения; и область  $\bar{p}_\infty > \bar{p}_\infty^*$ , в которой конструкция полностью разрушается.

**Заключение.** В работе расслоения металла в середине стенки стальной трубы, возникающие под действием технологических нагрузок, моделируются острой внутренней трещиной. В силу большой протяженности трещиноподобного дефекта по окружной координате рассматривалось меридиональное сечение трубы, в котором при достаточно большом радиусе реализуются условия плоской деформации. Рассмотрен случай сложного нагружения при произвольном соотношении нормальных и сдвиговых напряжений, действующих

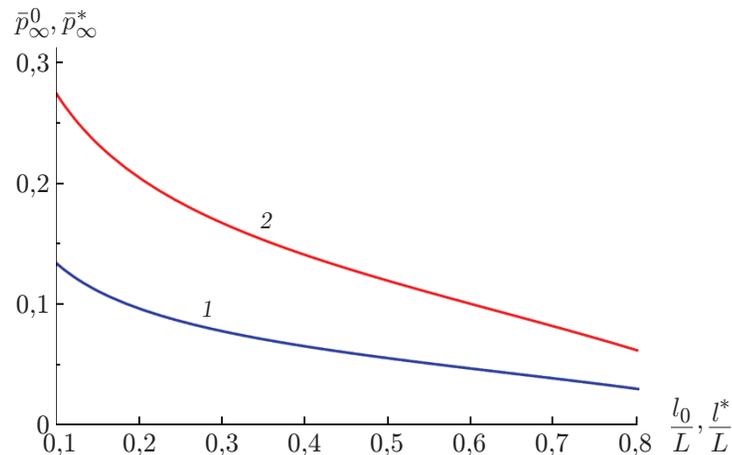


Рис. 5. Диаграммы квазихрупкого разрушения:  
1 — необходимый критерий, 2 — достаточный критерий

на внешней поверхности стенки. В этом случае трещина не будет распространяться прямолинейно, ее траектория неизбежно искривится. Поэтому угол излома траектории определяется с использованием силового интегрального критерия (2) на основе асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины (1).

Далее применяется модифицированная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла для получения критических параметров разрушения (длины зоны предразрушения и нагрузки) для прямолинейного отрезка трещины в квазихрупком материале. При этом зона пластичности моделируется прямоугольной зоной предразрушения, ширина которой определяется при решении упругопластической задачи вблизи вершины трещины. Сдвоенный критерий разрушения (12), (13) сформулирован с использованием простейшей аппроксимации двухзвенной ломаной диаграмм деформирования реальных материалов. Деформационный критерий разрушения (13) сформулирован для вершины исходной трещины, а силовой критерий (12) — для вершины фиктивной трещины. Длины исходной и фиктивной трещин различаются на величину, равную длине зоны предразрушения. Предложенная модификация модели Леонова — Панасюка — Дагдейла позволяет получить критическую величину раскрытия трещины и критическое смещение ее берегов. Коэффициенты интенсивности напряжений для отрезка трещины найдены численно методом конечных элементов. С их помощью получены простые выражения для критических параметров разрушения в случае, когда на отрезке трещины заданы нормальные и сдвиговые напряжения, моделирующие зону пластичности.

Таким образом, проведено исследование механизма разрушения материала в зоне предразрушения в общем случае пропорционального нагружения. Для определения параметров предлагаемой модели разрушения достаточно провести два лабораторных эксперимента: определить характерный линейный размер структуры материала и диаграмму деформирования при совместном одноосном растяжении с кручением, например, тонкостенных цилиндрических образцов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Махутов Н. А. Проблемы разрушения, ресурса и безопасности технических систем. Красноярск: Гарда, 1997.
2. Анучкин М. П. Трубы для магистральных трубопроводов / М. П. Анучкин, В. Н. Горицкий, Б. И. Мирошниченко. М.: Недра, 1986.

3. **Красовский А. Я.** Трещиностойкость сталей магистральных трубопроводов / А. Я. Красовский, В. Н. Краси́ко. Киев: Наук. думка, 1990.
4. **Матросов Ю. И.** Сталь для магистральных газопроводов / Ю. И. Матросов, Д. А. Литвиненко, С. А. Голованенко. М.: Металлургия, 1989.
5. **Патон Б. Е., Семенов С. Е., Рыбаков А. А.** О старении и оценке состояния металла эксплуатируемых магистральных трубопроводов // Автомат. сварка. 2000. № 7. С. 3–12.
6. **Филиппов Г. А., Ливанова О. В., Дмитриев В. Ф.** Деградация свойств металла при длительной эксплуатации магистральных трубопроводов // Сталь. 2003. № 2. С. 84–87.
7. **Макаров Г. И.** Протяженные разрушения магистральных газопроводов. М.: Academia, 2002.
8. **Корнев В. М., Кургузов В. Д.** Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 6. С. 153–163.
9. **Корнев В. М., Демешкин А. Г.** Диаграмма квазихрупкого разрушения тел со структурой при наличии краевых трещин // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 152–164.
10. **Кургузов В. Д., Корнев В. М.** Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 179–194.
11. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
12. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
13. **Neuber H.** Kerbspannunglehre: Grunlagen fur Genaue Spannungsrechnung. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1937.
14. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, № 2. С. 212–222.
15. **Goldstein R. V., Salganik R. L.** Brittle fracture of solids with arbitrary crack // Intern. J. Fracture. 1974. V. 10. P. 507–523.
16. **Аннин Б. Д.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения / Б. Д. Аннин, В. М. Жигалкин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
17. **Williams M. L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 109–114.
18. **Корнев В. М.** Разрушение хрупких и вязких кристаллов при обобщенном напряженном состоянии. Силовые и деформационные критерии разрушения // Физ. мезомеханика. 2008. Т. 11, № 4. С. 31–42.
19. **Erdogan F., Sih G. C.** On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. Basic Engng. 1963. V. 85, N 4. P. 519–525.
20. **Райс Дж.** Математические методы в механике разрушений // Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
21. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
22. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т.; Т. 2).

*Поступила в редакцию 30/V 2023 г.,  
после доработки — 29/VI 2023 г.  
Принята к публикации 4/VIII 2023 г.*