УДК 532.582.33

# ОТРЫВНОЙ УДАР ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ

М. В. Норкин

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Исследуется плоская задача об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне. Решение задачи строится с использованием специального асимптотического метода, основанного на предположении о том, что неподвижные твердые границы бассейна удалены от пластины на большое расстояние. Сделан вывод о неоднозначном влиянии стенок бассейна различной формы на образующуюся на поверхности пластины зону отрыва частиц жидкости. Рассмотрены примеры решений.

Ключевые слова: идеальная жидкость, удар, плавающее тело, ограниченный бассейн, зона отрыва, потенциал скоростей, асимптотика.

Задача о гидродинамическом ударе с отрывом поставлена Л. И. Седовым в работе [1], в которой развиты методы определения действующих на тело импульсных нагрузок и движения жидкости, основанные на теории функций комплексного переменного. С помощью методов, изложенных в [1], в ряде конкретных случаев получены аналитические решения [1–4]. Численный анализ плоской задачи об отрывном ударе плавающих тел проведен в [5]. Во всех известных работах, посвященных исследованию удара с отрывом, жидкость предполагалась неограниченной.

В данной работе исследуется плоская задача об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне. Решение задачи строится с использованием специального асимптотического метода, основанного на предположении о том, что неподвижные твердые границы бассейна удалены от пластины на большое расстояние. Ранее такой подход применялся при решении пространственной задачи о безотрывном ударе плавающих тел [6–8].

**1. Постановка задачи**. Рассматривается плоская задача о вертикальном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне. Предполагается, что в момент удара происходит отрыв частиц жидкости от поверхности пластины (удар с отрывом). Пусть до удара тело и жидкость покоились. Тогда после удара движение жидкости потенциальное, причем потенциал скоростей $\Phi$, приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной краевой задачи теории потенциала с неизвестной априори областью контакта [1]

$$\Delta\Phi = 0, \qquad r \in D; \tag{1.1}$$

$$\Phi \leqslant 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = V_n, \qquad r \in S_{11}; \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-00105, 00-15-96188).

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \geqslant V_n, \qquad r \in S_{12}; \tag{1.3}$$

$$\Phi = 0, \qquad r \in S_2; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \qquad r \in S_3. \tag{1.5}$$

Здесь $D$ — область, занятая жидкостью; $V_n = v_0 - \omega x$; $r = (x, y)$; $v_0$, $\omega > 0$ — поступательная и угловая скорости, приобретенные пластиной в результате удара; $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$ — поверхность пластины; $S_{11} = \{y = 0,\ -a < x < c\}$ — часть поверхности, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12} = \{y = 0,\ c < x < a\}$ — зона отрыва; $S_2$ — свободная поверхность жидкости; $S_3$ — неподвижная твердая граница бассейна. Импульсное давление $P_t = -\rho\Phi$ ($\rho$ — плотность жидкости). Декартовы координаты $x$, $y$ введены таким образом, что ось $x$ расположена вдоль линии свободной поверхности, ось $y$ направлена вертикально вниз (в глубь жидкости), начало координат находится в центре пластины.

Считаем, что граница $S_3$ получена в результате гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $h$ некоторой фиксированной поверхности $S_3^0$: $S_3 = hS_3^0$ ($x = hx^0$, $y = hy^0$).

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $D^0$ — внутренняя область с границами $y = 0$ и $S_3^0$; $G$ — полуплоскость $y > 0$; $\Phi_1$, $c_\infty$ — потенциал скоростей и точка отрыва в случае $h = \infty$.

При построении асимптотики для больших значений $h$ граничные условия (1.2), (1.3) удобно переформулировать в виде следующих ограничений ($r \in S_1$):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - V_n \geqslant 0; \tag{1.6}$$

$$\Phi\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - V_n\Big) = 0; \tag{1.7}$$

$$\Phi \leqslant 0. \tag{1.8}$$

Соотношения (1.6)–(1.8) можно переписать в виде односторонних ограничений для новой функции $-\Phi$; при этом производная функции $-\Phi$ вычисляется по внешней к области $D$ нормали. В этом случае получается постановка задачи в виде вариационного неравенства, из которого следует теорема существования и единственности данной задачи [9]. Таким образом, можно утверждать, что в случае ограниченной области в пространстве Соболева $H^1(D)$ существует единственное решение задачи о гидродинамическом ударе с отрывом. Следует отметить, что аналогичные вопросы для близкой по математической постановке задачи проникания твердого тела в воду изучены в [10].

Для полной постановки задачи необходимо также выписать уравнения изменения импульса и момента импульса пластины при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом и точкой его приложения, с одной стороны, и поступательной и угловой скоростями, приобретенными пластиной в результате удара, — с другой. В пренебрежении массой и моментом инерции пластины данные уравнения сводятся к соотношениям

$$P_x = 0, \qquad I + P_y = 0, \qquad M - x_0 P_y = 0. \tag{1.9}$$

Здесь $P_x$, $P_y$ — компоненты внешнего ударного импульса, приложенного к пластине в точке $(x_0, 0)$; $I$, $M$ — полный ударный импульс и его момент относительно начала координат, действующие на пластину во время удара:

$$I = \rho \int\limits_{-a}^{c} \Phi\, dx, \qquad M = -\rho \int\limits_{-a}^{c} x\Phi\, dx. \tag{1.10}$$

Из равенств (1.9) определяется координата точки приложения импульса

$$x_0 = -M/I. \tag{1.11}$$

**2. Случай неограниченной жидкости.** Вначале найдем решение задачи об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности неограниченной жидкости ($h = \infty$). Перемещая начало координат в середину отрезка $[-a, c]$, приходим к следующей задаче:

$$\Delta u = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad y > 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v_0 + \omega\,\frac{a-c}{2} - \omega x, \qquad y = 0, \quad |x| < \frac{a+c}{2}; \tag{2.1}$$

$$u = 0, \qquad y = 0, \quad |x| > \frac{a+c}{2}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \geqslant v_0 + \omega\,\frac{a-c}{2} - \omega x, \qquad y = 0, \quad \frac{a+c}{2} < x < \frac{3a-c}{2}; \tag{2.3}$$

$$u \leqslant 0, \qquad y = 0, \quad |x| < \frac{a+c}{2}; \tag{2.4}$$

$$u \to 0, \qquad x^2 + y^2 \to \infty, \tag{2.5}$$

где функция $u(x, y) = \Phi(x - (a - c)/2, y)$. Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям (2.1), (2.2), (2.5), при любом фиксированном $c \in [-a, a]$ находится методом разделения переменных в декартовых координатах с использованием метода парных интегральных уравнений и принимает окончательный вид

$$u = (v_0 + \omega(a - c)/2)u_1 + \omega u_2, \tag{2.6}$$

где

$$u_1(x, y) = \int\limits_0^\infty A(\lambda) \exp{(-\lambda y)} \cos \lambda x \, d\lambda, \qquad A(\lambda) = \int\limits_0^{(a+c)/2} \varphi(s) J_0(\lambda s)\, ds,$$

$$u_2(x, y) = \int\limits_0^\infty \lambda B(\lambda) \exp{(-\lambda y)} \sin \lambda x \, d\lambda, \qquad B(\lambda) = \int\limits_0^{(a+c)/2} \psi(s) J_0(\lambda s)\, ds,$$

$$\varphi(s) = -s, \qquad \psi(s) = -\frac{s^3}{4} + \frac{1}{4}\Big(\frac{a+c}{2}\Big)^2 s.$$

Постоянную $c$ выбираем так, чтобы выполнялись условия (2.3) и (2.4). Подставляя в них функцию (2.6), приходим к неравенствам

$$v_0 + \omega\,\frac{a-c}{2} - \frac{\omega}{2}\,x \geqslant 0, \qquad x \in \Big[-\frac{a+c}{2}, \frac{a+c}{2}\Big],$$

$$\omega x^2 - \Big(v_0 + \omega\,\frac{a-c}{2}\Big)x - \frac{\omega}{2}\Big(\frac{a+c}{2}\Big)^2 \geqslant 0, \qquad x \in \Big[\frac{a+c}{2}, \frac{3a-c}{2}\Big].$$

Первое неравенство приводит к соотношению $c \leqslant a/3 + 4v_0/(3\omega)$, второе — к соотношению $c \geqslant a/3 + 4v_0/(3\omega)$. В результате для определения точки отрыва $c_\infty$ и потенциала скоростей $\Phi_1$ на поверхности пластины имеем явные выражения

$$c_\infty = a/3 + 4v_0/(3\omega); \tag{2.7}$$

$$\Phi_1(x, 0) = -\sqrt{\Big(\frac{a+c_\infty}{2}\Big)^2 - \Big(x + \frac{a-c_\infty}{2}\Big)^2}\Big(v_0 + \frac{\omega}{2}\,\frac{a-c_\infty}{2} - \frac{\omega}{2}\,x\Big), \quad -a < x < c_\infty. \tag{2.8}$$

Определяя нормальную компоненту скорости на поверхности пластины, можно показать, что она непрерывна всюду на $(-a, a)$.

Используя формулы (1.10), (1.11), (2.7), (2.8), найдем связь между точкой приложения импульса $x_0$ и точкой отрыва $c_\infty$:

$$x_0 = -(5a - 3c_\infty)/8, \qquad c_\infty = (5a + 8x_0)/3. \tag{2.9}$$

Исследование задачи о вертикальном безотрывном ударе пластины показало, что если точка приложения внешнего ударного импульса $P$ лежит в интервале $[-a/4, a/4]$, то отрыва частиц жидкости от поверхности пластины не происходит. В противном случае возникает отрыв. Следовательно, в формулах (2.9) точка $x_0$ должна удовлетворять неравенствам $-a \leqslant x_0 < -a/4$.

**3. Построение асимптотики для больших значений** $h$**.** Потенциал скоростей $\Phi$, определяемый формулами (1.1), (1.4), (1.5), (1.6)–(1.8), будем искать в виде ряда $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \ldots$. В качестве первого приближения $\Phi_1$ используем решение задачи об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности неограниченной жидкости ($h = \infty$). Считаем, что в результате удара пластина приобретает те же поступательную и угловую скорости, что и в случае ограниченной области. Для функции $\Phi_1$ на больших расстояниях от пластины справедливо разложение в гармонический ряд

$$\Phi_1 = -\frac{c_1 y}{\pi(x^2 + y^2)} - \frac{2c_2 xy}{\pi(x^2 + y^2)^2} - \frac{c_3(3x^2 y - y^3)}{\pi(x^2 + y^2)^3} - \ldots, \tag{3.1}$$

где

$$c_1 = \frac{\omega\pi}{4}\Big(\frac{a + c_\infty}{2}\Big)^3, \qquad c_2 = -\frac{\omega\pi(5a - 3c_\infty)}{32}\Big(\frac{a + c_\infty}{2}\Big)^3,$$
$$c_3 = \frac{\omega\pi}{64}(7a^2 - 6ac_\infty + 3c_\infty^2)\Big(\frac{a + c_\infty}{2}\Big)^3.$$

Для ликвидации невязок, создаваемых потенциалом $\Phi_1$ на неподвижной границе $S_3$, рассмотрим задачу в ограниченном бассейне при отсутствии пластины:

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad r \in D, \quad (\Phi_2)_{y=0} = 0, \quad \Big(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\Big)_{S_3} = \frac{c_1}{\pi}\, Q_1 + \frac{2c_2}{\pi}\, Q_2 + \frac{c_3}{\pi}\, Q_3, \tag{3.2}$$

где

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial n}\,\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad Q_2 = \frac{\partial}{\partial n}\,\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad Q_3 = \frac{\partial}{\partial n}\,\frac{3x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^3}.$$

В этом случае можно ограничиться первыми тремя членами ряда (3.1). Остальные члены дают вклад в асимптотику потенциала $\Phi$ на $S_1$ порядка $O(h^{-5})$ при $h \to \infty$.

Делая в (3.2) замену переменных $x \to hx$, $y \to hy$, представим функцию $f = f(x, y) = \Phi_2(hx, hy)$ в виде

$$f = \frac{c_1}{\pi}\, f_1 h^{-1} + \frac{2c_2}{\pi}\, f_2 h^{-2} + \frac{c_3}{\pi}\, f_3 h^{-3}, \tag{3.3}$$

где функции $f_i = f_i(x, y)$ определяются решениями следующих краевых задач в фиксированной области $D^0$:

$$\Delta f_i = 0, \quad (f_i)_{y=0} = 0, \quad \Big(\frac{\partial f_i}{\partial n}\Big)_{S_3^0} = (Q_i)_{S_3^0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

После обратной замены переменных в (3.3) $x \to \varepsilon x$, $y \to \varepsilon y$, $\varepsilon = h^{-1}$ функции $f_i(\varepsilon x, \varepsilon y)$ разлагаются по формуле Тейлора с центром в точке $\varepsilon = 0$ ($h = \infty$):

$$f_i(\varepsilon x, \varepsilon y) = -\xi_i y\varepsilon + \eta_i xy\varepsilon^2 + \mu_i(3x^2 y - y^3)\varepsilon^3/6 + \ldots, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\xi_i = -f_{iy}, \quad \eta_i = f_{ixy}, \quad \mu_i = f_{ixxy} = -f_{iyyy}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где частные производные вычисляются в точке $M_0 = (0, 0)$. В результате приходим к асимптотике потенциала $\Phi_2$, справедливой в любой фиксированной (не зависящей от $h$) окрестности пластины:

$$\Phi_2(x, y) = -\frac{c_1\xi_1}{\pi}\, yh^{-2} - \Big[\frac{2c_2\xi_2}{\pi}\, y - \frac{c_1\eta_1}{\pi}\, xy\Big]h^{-3} - \Big[\frac{c_3\xi_3}{\pi}\, y - \frac{2c_2\eta_2}{\pi}\, xy - \frac{c_1\mu_1}{6\pi}(3x^2y - y^3)\Big]h^{-4} + \dots.$$

Теперь необходимо устранить невязки, создаваемые потенциалом $\Phi_2$ на поверхности пластины. Соответствующая задача формулируется для функции $u = \Phi_1 + \Phi_3$:

$$\Delta u = 0, \quad r \in G, \quad (u)_{S_2} = 0, \quad (u)_\infty = 0; \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - g \geqslant 0, \quad u\Big(\frac{\partial u}{\partial y} - g\Big) = 0, \quad u \leqslant 0, \qquad y = 0, \ |x| < a,$$

$$g = g(x) = v_1 - \omega_1 x - kx^2,$$

$$v_1 = v_0 + \frac{c_1\xi_1}{\pi}\, h^{-2} + \frac{2c_2\xi_2}{\pi}\, h^{-3} + \frac{c_3\xi_3}{\pi} h^{-4}, \quad \omega_1 = \omega + \frac{c_1\eta_1}{\pi}\, h^{-3} + \frac{2c_2\eta_2}{\pi}\, h^{-4}, \quad k = \frac{c_1\mu_1}{2\pi}\, h^{-4}.$$

Функция $u$ на поверхности пластины и отвечающая ей точка $c_u = \min\limits_c\{c\colon u(x, 0) = 0,\ c < x < a\}$ являются вторыми приближениями к потенциалу скоростей $\Phi$ на $S_1$ и точке отрыва $c$ соответственно; в качестве первых приближений взяты $\Phi_1$ и $c_\infty$.

Если на данном этапе ограничиться членами порядка $h^{-3}$ включительно, то задача для $u$ будет отличаться от задачи для потенциала $\Phi_1$ только скоростями. В этом случае функция $u$ на поверхности пластины и точка $c_u$ определяются по формулам (2.7) и (2.8), в которых $\Phi_1$ и $c_\infty$ заменены на $u$ и $c_u$, а $v_0$ и $\omega$ — на $v_1$ и $\omega_1$. Производя в этих формулах разложения в ряды по степеням $h^{-1}$ и ограничиваясь членами порядка $h^{-3}$, получаем искомые асимптотики. Однако для дальнейшего важно учесть следующий член асимптотики порядка $h^{-4}$.

Задача (3.4) с квадратичной функцией $g$ решается аналогично задаче для $\Phi_1$: вначале для любого фиксированного $c$ из отрезка $[-a, a]$ строится решение смешанной краевой задачи в полуплоскости, когда на ее границе $y = 0$ имеется отрезок $[-a, c]$, разделяющий краевые условия первого и второго рода; затем точка $c_u$ определяется из двух условий в виде неравенств. Окончательные выражения для точки $c_u$ и функции $u$ на поверхности пластины принимают вид

$$c_u = \frac{4v_1}{3\omega_1} + \frac{a}{3} - \frac{4k}{27\omega_1}\Big[10\Big(\frac{v_1}{\omega_1}\Big)^2 + 2\,\frac{v_1}{\omega_1}\, a + a^2\Big] + O(k^2), \qquad k \to 0,$$

$$u(x, 0) = -\sqrt{\Big(\frac{a + c_u}{2}\Big)^2 - t^2}\, \Big[v_1 + \omega_1\, \frac{a - c_u}{2} - k\Big(\frac{a - c_u}{2}\Big)^2 - \tag{3.5}$$

$$- (\omega_1 - k(a - c_u))\frac{t}{2} - \frac{k}{6}\Big(\Big(\frac{a + c_u}{2}\Big)^2 + 2t^2\Big)\Big], \qquad t = x + \frac{a - c_u}{2}.$$

Полученные приближенные решения требуют уточнения, так как следующие приближения к потенциалу скоростей $\Phi$ на $S_1$ и точке отрыва $c$ также содержат члены порядка $h^{-4}$. Поэтому необходимо продолжить процесс построения последовательных приближений и вновь рассмотреть краевые задачи в областях $D$ и $G$. Находя асимптотику потенциала $\Phi_3 = u - \Phi_1$ на большом удалении от пластины

$$\Phi_3 = -\frac{h^{-2}c_4 y}{\pi(x^2 + y^2)} - \dots, \qquad c_4 = 8^{-1}(a + c)^2 c_1\xi_1,$$

поставим задачу для ликвидации невязок, создаваемых функцией $\Phi_3$ на неподвижной границе $S_3$ (задача для потенциала $\Phi_4$). Асимптотика функции $\Phi_4$ в окрестности пластины строится аналогично асимптотике потенциала $\Phi_2$:

$$\Phi_4 = -\pi^{-1} c_4 \xi_1 y h^{-4} - \ldots .$$

Затем устраняются невязки, создаваемые функцией $\Phi_4$ на поверхности пластины. Задача, ликвидирующая невязки на $S_1$, имеет вид (3.4), где функции $u$ и $g$ заменены на $v = \Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_5$ и $g_1 = g + (c_4\xi_1/\pi)h^{-4}$ соответственно. В результате уточненные точка $c_u$ и функция $u$ на $S_1$ определяются по формулам (3.5), в которых в выражение для $v_1$ добавлен член $(c_4\xi_1/\pi)h^{-4}$. Таким образом находится третье приближение к решению исходной задачи. Отметим, что следующие приближения добавляют члены более высокого, чем $h^{-4}$, порядка малости.

После ряда элементарных преобразований для точки отрыва $c$ получим асимптотическую формулу

$$c = c_\infty + \frac{1}{3}\Big(\frac{a + c_\infty}{2}\Big)^3 (\xi_1 h^{-2} - p h^{-3} + q h^{-4}) + O(h^{-5}), \qquad h \to \infty,$$

$$p = [(5a - 3c_\infty)\xi_2 + (3c_\infty - a)\eta_1]/4,$$

$$16q = (7a^2 - 6ac_\infty + 3c_\infty^2)\xi_3 + 2(a + c_\infty)^2\xi_1^2 + (3c_\infty - a)(5a - 3c_\infty)\eta_2 - (a^2 - 2ac_\infty + 5c_\infty^2)\mu_1,$$

где $c_\infty$ связана со скоростями $v_0$ и $\omega$ соотношением (2.7).

Для упрощения выкладок в дальнейшем предположим, что область $D$ симметрична относительно оси $y$. В этом случае $\xi_2 = 0$, $\eta_1 = 0$ и, следовательно, $p = 0$. Асимптотики импульса $I$, его момента $M$ и точки приложения импульса $x_0$ принимают вид

$$\begin{aligned} I &= -\rho\omega_1 \frac{\pi}{4}\Big(\frac{a + c}{2}\Big)^3 \Big[1 + \frac{\mu_1}{256}(a + c)^3(5c - 3a)h^{-4}\Big] + O(h^{-5}), \quad h \to \infty, \\ M &= -\rho\omega_1 \frac{\pi}{32}\Big(\frac{a + c}{2}\Big)^3 \Big[5a - 3c - \frac{\mu_1}{16}(a - c)^2(a + c)^3 h^{-4}\Big] + O(h^{-5}), \quad h \to \infty; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$x_0 = -\frac{5a - 3c}{8} + \frac{\mu_1}{2048}(a + c)^5 h^{-4} + O(h^{-5}), \quad h \to \infty. \tag{3.7}$$

Более подробные асимптотические формулы для величин $I$, $M$ и $x_0$ получаются путем подстановки выражений для $\omega_1$ и $c$ в (3.6), (3.7) с последующим разложением в ряды по степеням $h^{-1}$. Коэффициенты полученных таким образом асимптотик выражаются через скорости $v_0$ и $\omega$, которые предполагаются не зависящими от $h$.

В задаче удара заданными, по-видимому, следует считать величину внешнего ударного импульса $P$ и точку его приложения $x_0$. При этом скорости $v_0$ и $\omega$, приобретенные пластиной в результате удара, находятся из системы нелинейных уравнений (1.9). Следует отметить, что точка отрыва $c$ зависит только от точки приложения импульса $x_0$. Для ее определения получаем нелинейное уравнение, которое при больших $h$ имеет вид (3.7). Фиксируя $x_0$ и решая это уравнение асимптотически относительно $c$, имеем

$$c = c_\infty - \mu_1(a + c_\infty)^5 h^{-4}/768 + O(h^{-5}), \qquad h \to \infty, \tag{3.8}$$

где $c_\infty$ связана с $x_0$ соотношением (2.9).

**4. Приложения.** Предположим, что отрывной удар пластины в случае как неограниченной, так и ограниченной жидкости вызван действием внешнего ударного импульса, приложенного в точке $(x_0, 0)$. Тогда при достаточно больших $h$ формула (3.8) позволяет сделать вывод о влиянии стенок бассейна различной формы на зону отрыва жидких частиц от поверхности пластины. Задача сводится к определению знака постоянной $\mu_1$, зависящей только от формы границы бассейна. При $\mu_1 > 0$ область отрыва увеличивается, при $\mu_1 < 0$, наоборот, уменьшается по сравнению со случаем неограниченной жидкости. Для случая $\mu_1 = 0$ вопрос остается открытым. Ниже приведены примеры, описывающие все возможные случаи:

— горизонтальный слой:

$$\mu_1 = 21\pi^4/(2880b^4) > 0;$$

— вертикальный слой:

$$\mu_1 = -\pi^4/(120b^4) < 0;$$

— усеченная круговая лунка:

$$\mu_1 = \frac{8}{c^4}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(1-2\lambda^2)\,\mathrm{ch}\,(\pi-\beta_0)\lambda\,d\lambda}{\mathrm{sh}\,\pi\lambda\,\mathrm{ch}\,\beta_0\lambda}, \qquad b = -c\,\mathrm{ctg}\,\beta_0, \quad 0 < \beta_0 < \pi.$$

Здесь $b$ — характерный размер области $D^0$. В первом примере это глубина фиксированного слоя, во втором — половина расстояния между вертикальными стенками, в третьем — координата центра дуги окружности, ограничивающей лунку.

Усеченная круговая лунка — область, ограниченная отрезком прямой ($y = 0$, $-c < x < c$) и дугой окружности, проходящей через точки $x = \pm c$. При $b < 0$ ($b > 0$) постоянная $\mu_1 < 0$ ($\mu_1 > 0$), причем изменение знака $\mu_1$ происходит при переходе через полукруг (бассейн в форме полуцилиндра), для которого $\mu_1 = 0$.

Таким образом, бассейн в форме полуцилиндра оказывает незначительное влияние на зону отрыва жидких частиц от поверхности пластины.

**Заключение.** В [6–8] для решения линейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях предложен алгоритм построения асимптотики, эффективный при больших значениях $h$. В настоящей работе этот алгоритм обобщен на нелинейную задачу. На основе полученных асимптотик изучено влияние стенок бассейна различной формы на образующуюся на поверхности пластины зону отрыва частиц жидкости. Установлено, что в зависимости от границы бассейна эта зона может как увеличиться, так и уменьшиться по сравнению со случаем неограниченной жидкости.

Предлагаемый асимптотический подход может быть использован при решении других смешанных задач математической физики с неизвестной априори областью контакта.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Кудрявцева Н. А.** Горизонтальный удар плавающего эллипса о несжимаемую жидкость // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. С. 258–261.
3. **Корчагин В. С.** Отрывной удар по цилиндру, полупогруженному в жидкость // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1978. № 4. С. 25–27.
4. **Корчагин В. С.** Об отрывном ударе тела о несжимаемую жидкость // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1989. № 3. С. 30–33.
5. **Дворак А. В., Теселкин Д. А.** Численное исследование двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 1. С. 144–150.
6. **Норкин М. В.** Вертикальный удар по твердому телу, плавающему на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 1. С. 74–81.

7. **Норкин М. В.** Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при безотрывном ударе плавающего тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 77–81.
8. **Норкин М. В.** Вертикальный удар твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 3. С. 122–130.
9. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
10. **Коробкин А. А.** Постановка задачи проникания в виде вариационного неравенства // Нестационарные проблемы гидродинамики: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1982. Вып. 58. С. 73–79.

*Поступила в редакцию 26/VI 2002 г.,*
*в окончательном варианте — 28/I 2003 г.*