13. **Келл К. Ю.-Э., Пуро А. Э.** Приближение очень слабой оптической анизотропии // Оптика и спектроскопия.— 1991.— Вып. 2.
14. **Пуро А. Э.** Томография при слабой оптической анизотропии // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по вычислительной томографии.— Новосибирск, 1989.— Т. 1.
15. **Пуро А. Э.** Реконструктивная томография при слабой оптической анизотропии // ПМТФ.— 1991.— № 2.
16. **Aben H.** Tomographie optique des champs de contraints // Rev. Franç. Méc.— 1989.— N 1.
17. **Ravasoo A.** Some remarks on the quasi-linear theory of viscoelasticity // Изв. АН Эстонии. Сер. Физика. Математика.— 1991.— № 2.
18. **Тихонов А. П., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.** Математические задачи компьютерной томографии.— М.: Наука, 1987.

г. Таллинн *Поступила 31/I 1991 г., в окончательном варианте — 23/VII 1991 г.*

УДК 531.36 : 534.1

К. С. Матвийчук

ТЕХНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПРОТЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ, ПРОДОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ

Изучение устойчивости движения весьма протяженных динамических систем во многих случаях можно свести к задаче об устойчивости длинных стержней. На практике широко применяются длинные стержни, стержневые конструкции, взаимодействующие с внешним или внутренним потоком жидкости. При внешнем силовом воздействии такие стержни могут быть податливы к существенным перемещениям. Отсюда следует целесообразность использования необходимых нелинейных соотношений при исследовании динамического поведения таких систем [1, 2]. Учет сил взаимодействия движущегося стержня с внешним потоком жидкости приводит к более сложным задачам по сравнению с традиционными задачами, которые рассматриваются в механике стержней.

Настоящая работа посвящена изучению условий технической устойчивости [3—8] длинного прямолинейного стержня с переменным поперечным сечением при его продольной транспортировке в движущейся идеальной жидкости. Процесс описывается нелинейной системой трех дифференциальных уравнений в частных производных при неоднородных граничных условиях. Получены достаточные условия технической устойчивости системы на конечном и бесконечном промежутке времени и асимптотической технической устойчивости. Указаны условия, при выполнении которых возможна потеря устойчивости системы. Найдена формула критической скорости движения стержня в жидкости. Результаты получены на основе метода сравнения с привлечением прямого метода Ляпунова [4, 6—11].

1. Постановка задачи. Рассматриваем длинный гибкий стержень AB с переменным поперечным сечением, ось которого в исходном состоянии прямолинейна. Пусть такой стержень продольно транспортируется в идеальной несжимаемой жидкости в течение заданного промежутка времени $I_1 = [t_0, K] \subset I \equiv [t_0, +\infty)$ $(t_0 \geqslant 0,\ K = \mathrm{const} > 0)$ вдоль горизонтальной прямолинейной траектории с заданной скоростью $\mathbf{v}$. Рассматриваем текущую конфигурацию стержня [2]. Считаем, что стержень представляет однородное изотропное тело, деформируется геометрически нелинейно, деформации предполагаются малыми. Исследуем случай обтекания жидкостью стержня, расположенного несимметрично относительно потока жидкости. Тогда результирующая гидродинамическая сила $\mathbf{F}$ не совпадает с направлением потока. Она слагается из двух составляющих: $\mathbf{F}_c = (F_{1c}, F_{2c}, F_{3c})$ — гидродинамическая сила лобового сопротивления, направленная вдоль потока, и $\mathbf{F}_p = (F_{1p}, F_{2p}, F_{3p})$ — подъемная сила, направленная перпендикулярно потоку. Введем для стержня обозначения: $m(s)$ — масса единицы длины, зависящая от s; ρ — плотность материала; $S(s)$ — площадь произвольного сечения, зависящая от s; l — длина; h — средняя толщина; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор приложенных внешних распределенных сил; $\mathbf{u}(t, s) = \{u_1(t, s), u_2(t, s), u_3(t, s)\}$ — безразмерный вектор перемещений любой точки осевой линии; $\varepsilon = sl$ — размерная скалярная координата точек недеформированной осевой линии; s — безразмерная скалярная координата произвольной точки недеформированной осевой линии: $s \in D \equiv [0, 1]$; t — безразмерная временная переменная; τ — размерное время; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; P_m — сила веса, отнесенная к единице длины; $P_{\text{А}}$ — подъемная сила Архимеда; Ω — сила тяги движителя. Переднее основание A стержня имеет шарнирный тип закрепления с движителем, в основании B на стержень уравновешивающим образом относительно горизонтали действует тело П, для которого введем обозначения: $\mathbf{q}_{\text{П}}$, $\rho_{\text{ж}}$, $\tilde{h}$, $V_{\text{П}}$, $\mathcal{F}_{\text{А}} = g\rho_{\text{ж}} V_{\text{П}}$, ξ_c — соответственно его вес, плотность материала, некоторый характерный линейный параметр, объем, сила Архимеда, расстояние между центром масс тела П и точкой B; g — ускорение свободного падения. Обозначим через $\mathbf{e}_{10}$, $\mathbf{e}_{20}$, $\mathbf{e}_{30}$ ортогональную локальную систему единичных векторов при невозмущенном состоянии стержня. Вектор $\mathbf{e}_{10}$ направлен вдоль осевой линии стержня и в сторону транспортировки. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — векторы локальной ортогональной системы координат в текущей конфигурации стержня; $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ направлены по главным осям его поперечного сечения. Системы $\mathbf{e}_{i0}$, $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ обе правой ориентации. В текущей конфигурации AB выделим произвольный элемент стержня $d\varepsilon$, ограниченный сечениями ε, $\varepsilon + d\varepsilon$. Начала O_1, O_1^* систем $\mathbf{e}_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ в невозмущенном состоянии стержня совпадают и считаются находящимися в средней точке осевой линии элемента $d\varepsilon$. Радиус-вектор точки O_1^* в любой момент времени τ $\mathbf{r}(\tau, \varepsilon) = \mathbf{r}(\varepsilon) + \mathbf{w}(\tau, \varepsilon)$. Здесь $\mathbf{r}(\varepsilon)$ — радиус-вектор точки O_1; $\mathbf{w}(\tau, \varepsilon)$ — вектор перемещений точки O_1 в произвольное положение O_1^* в текущей конфигурации. Для любой точки осевой линии имеем $\dfrac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau}$, $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \tau^2}$. На элемент $d\varepsilon$ действует сила инерции

$$dJ_{\text{и}} = -m(\varepsilon)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \tau^2}\, d\varepsilon,$$

где учтено, что $\mathbf{v}$ — постоянная величина. На элемент стержня в общем случае могут действовать распределенные сила $\mathbf{q}$ и момент $\mu_0 = (\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30})$, не связанные с потоком, а также гидродинамические сила $\mathbf{F}$ и момент $\boldsymbol{\mu}_a$, возникающие при взаимодействии стержня с внешним потоком жидкости [2, 12, 13]. При движении стержня действующие на него гидродинамические силы зависят от квадрата относительной скорости $\mathbf{v}_{\text{от}}$ потока [12, 13]: $\mathbf{v}_{\text{от}} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \partial \mathbf{w}/\partial \tau$ — вектор скорости точек осевой линии стержня, $\mathbf{v}_0$ — вектор абсолютной скорости потока. Гидродинамическую силу $\mathbf{F}_c$ можно представить как сумму двух сил: $\mathbf{F}_c = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_1$ ($\mathbf{q}_1$ направлена по касательной к осевой линии стержня, т. е. по направлению вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{q}_n$ направлена по нормали к осевой линии, т. е. перпендикулярно силе $\mathbf{q}_1$). В общем случае элемент стержня имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и на него действует момент инерции

$$d\mathbf{M}_{\text{и}} = -\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\, d\varepsilon.$$

Предполагаем, что ε остается неизменной при движении [12]. Матрицу $\mathbf{J}$ запишем как

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{J}_0, \ \mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix},$$

где J_i ($i = 1, 2, 3$) — моменты инерции сечения относительно главных осей сечения ($i = 2$, $i = 3$) и осевой линии стержня ($i = 1$). Пусть центр жесткости стержня совпадает с его центром тяжести. Воспользуемся принципом Даламбера. Получаем

$$m(\varepsilon)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} + \mathbf{R}; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{J}\omega) = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varepsilon} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_a. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathrm{v}, \tau, \varepsilon)$ — главный вектор всех действующих на стержень внешних сил; $\mathbf{Q}$ — вектор внутренних усилий элемента стержня: $\mathbf{Q} = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3$; Q_1 — осевое усилие; Q_2, Q_3 — перерезывающие усилия. Вектор внутренних моментов $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$ (M_1 — крутящий момент, M_2, M_3 — изгибные моменты). Векторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$ статически эквивалентны вектору соответствующих напряжений [2]. Для стержня переменного сечения $m(s) = m_0(0)n_0(s)$ ($n_0(s)$ — безразмерная функция, $m_0(0) = \rho S_0$, S_0 — площадь фиксированного поперечного сечения). Площадь произвольного поперечного сечения стержня $S(s) = S_0n_0(s)$. Используя общие уравнения (1.1), (1.2), запишем уравнения движения для рассматриваемого случая в проекциях на орты $\mathbf{e}_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$). Произвольной точке Z вне продольной оси, принадлежащей сечению через точку O_1 элемента $d\varepsilon$, в текущей конфигурации соответствует вектор $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\varepsilon, \eta, \zeta)$ перемещения ее в положение Z^* в случае пространственной деформации. Радиус-вектор точки Z равен $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}(\varepsilon) + \eta\mathbf{e}_{20} + \zeta\mathbf{e}_{30}$, точки Z^* $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{U} = \mathbf{r}(\varepsilon) + \eta\mathbf{e}_{20} + \zeta\mathbf{e}_{30} + \mathbf{U}$. Квадрат бесконечно малого расстояния между двумя точками в начальной конфигурации стержня равен $dl^2 = d\varepsilon^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\mathbf{R}_0 d\mathbf{R}_0$, а бесконечно малого расстояния в текущей конфигурации

$$(dl^*)^2 = d\mathbf{R}^* d\mathbf{R}^*, \; d\mathbf{R}^* = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \varepsilon}d\varepsilon + \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \zeta}d\zeta.$$

Записывая разность $(dl^*)^2 - dl^2$, с одной стороны, через $\mathbf{U}$, с другой — через тензор деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), для дальнейшего найдем представление компонент ε_{ij} соотношениями производных $\partial\mathbf{U}/\partial\varepsilon$, $\partial\mathbf{U}/\partial\eta$, $\partial\mathbf{U}/\partial\zeta$. При этом тензор напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) в точке Z^* — известные соотношения [2] согласно закону Гука. Вектор перемещений выберем в форме [2]

$$U_1 = w_1 + \widehat{a}_2\eta + \widehat{a}_3\zeta, \tag{1.3}$$

$$U_2 = w_2 + \widehat{b}_2\eta + \widehat{b}_3\zeta, \; U_3 = w_3 - \widehat{b}_3\eta + \widehat{b}_2\zeta,$$

где $\widehat{a}_2$, $\widehat{a}_3$, $\widehat{b}_2$, $\widehat{b}_3$ — вещественные коэффициенты, характеризующие малые углы поворотов, в общем зависимые от переменной ε. Запись $\mathbf{U}$ в виде (1.3) отвечает гипотезе плоских сечений, а именно: сечения, перпендикулярные к оси стержня до деформирования, остаются плоскими, но уже не обязательно ортогональными к оси стержня. Действительно, при аппроксимации (1.3) получаем аффинное преобразование точек, лежащих в плоскости сечения, перпендикулярного к оси стержня до деформирования, которые в результате этого преобразования в текущей конфигурации оказываются снова в одной плоскости, и отрезки прямых при этом преобразуются в отрезки прямых соответственно. Аппроксимация (1.3) обеспечивает выполнение деформационных условий

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}, \; \varepsilon_{23} = 0.$$

Условие $\varepsilon_{23} = 0$ отвечает также тому, что система ортов $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) ортогональна. Находим матрицы перехода от базиса $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) к базису $\mathbf{e}_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\widehat{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 + \partial w_1/\partial\varepsilon & \widehat{a}_2 & \widehat{a}_3 \\ \partial w_2/\partial\varepsilon & 1 + \widehat{b}_2 & \widehat{b}_3 \\ \partial w_3/\partial\varepsilon & -\widehat{b}_3 & 1 + \widehat{b}_2 \end{pmatrix}, \; \widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{a}_3 & -\widehat{a}_2 \\ 0 & \widehat{b}_3 & -(1 + \widehat{b}_2) \\ 0 & 1 + \widehat{b}_2 & \widehat{b}_3 \end{pmatrix},$$

с помощью которых при заданной скорости $\mathbf{v}$ уравнения (1.1), (1.2) спроектируем на оси $\mathbf{e}_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$):

$$(1.4)\qquad m(\varepsilon)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial\tau^2} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\widehat{\mathbf{L}}\mathbf{Q}) + \widehat{\mathbf{L}}\mathbf{R};$$

$$(1.5)\qquad \rho\frac{\partial \mathbf{l}^0}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\widehat{\mathbf{L}}\mathbf{M}) + \widehat{\mathbf{\Omega}}\mathbf{Q} + \widehat{\mathbf{L}}\boldsymbol{\mu},$$

$$\mathbf{l}^0 = \{l_i^0 = J_i\omega_i,\ i = 1, 2, 3\},\ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Для компонент Q_i, M_i найдем выражения через перемещения точек поперечных сечений стержня. После этого из (1.4), (1.5) получаем довольно громоздкие уравнения в перемещениях. Применительно к рассматриваемому случаю сделаем необходимые упрощения. В дальнейшем инерцию вращательных движений считаем незначительной, т. е. левыми частями в (1.5) пренебрегаем, поэтому полагаем $\mu_a = 0$, $\mu_{10} = 0$ (μ_{20}, μ_{30} — постоянные). Можно убедиться, что по необходимости $M_1 = 0$. Полагая, что в любом сечении стержня смещения во всех трех направлениях одинаковы, положим $\widehat{a}_2 = \widehat{a}_3 = \widehat{b}_2 = \widehat{b}_3 = 0$, тем самым перейдем к соотношениям усилий и моментов, выраженным через перемещения точек осевой линии стержня. Пусть P_H — давление на стержень жидкости на глубине H. При воздействии внешнего потока из-за переменности сечения S и деформаций появляются кривизна и дополнительные распределенные силы. Поэтому при упрощениях уравнений оставляем слагаемое $-P_H\frac{\partial S}{\partial\varepsilon}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial\varepsilon^2}$, соответствующее внутренним усилиям стержня. Слагаемыми высокого порядка малости пренебрегаем. Из (1.5) находим соотношения связи между Q_i и M_i ($i = 2, 3$). В результате имеем три уравнения движения системы в перемещениях точек осевой линии стержня. Приняв, что поперечные движения слабо влияют на продольные, получаем краевую задачу исследуемого процесса

$$(1.6)\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - P_H^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - P_H^{(2)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3\frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2,$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - P_H^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}\right) + b_2\frac{\partial u_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3\frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3$$

с граничными условиями

$$(1.7)\qquad u_i(t, s)_{|s=0} = 0,\ i = 1, 2, 3,\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}_{|s=0} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}_{|s=0} = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial s}_{|s=1} =$$

$$= -c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}_{|s=1} + c_2,\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}_{|s=1} = 0,\ \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3}_{|s=1} - n\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}_{|s=1},\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}_{|s=1} =$$

$$= n_1(g\rho_{\text{ж}}V_{\text{П}} - q_{\text{П}}),\ \frac{\partial^3 u_3}{\partial s^3}_{|s=1} = n_2\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}_{|s=1} - n_3(g\rho_{\text{ж}}V_{\text{П}} - q_{\text{П}})$$

и начальными

$$(1.8)\qquad u_i(t, s)_{|t=t_0} = k_i(s),\ \frac{\partial u_i(t, s)}{\partial t}_{|t=t_0} = g_i(s),\ i = 1, 2, 3.$$

Здесь безразмерное время в первом уравнении $t = \tau l\sqrt{m/ES\delta}$, во втором $t = \tau l^2\sqrt{m/EI_3\delta}$, в третьем $t = \tau l^2\sqrt{m/EI_2\delta}$; $P_H^{(1)} = P_H\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{1}{En_0}$; $P_H^{(2)} = P_H\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{S_0 l^2}{EI_3\delta}$; $P_H^{(3)} = P_H\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{S_0 l^2}{EI_2\delta}$; $a_1 = \frac{S_0 n_0 lh}{I_3}$; $a_2 = \frac{S_0 hl}{I_3}$; $a_3 = \frac{l^3 R_1}{EI_3\delta}$; $b_1 =$

$= \frac{S_0 n_0 hl}{I_2}$; $b_2 = \frac{S_0 lh}{I_2}$; $b_3 = \frac{l^3 R_1}{EI_2\delta}$; $f_1 = \frac{l^2 R_1}{ES_0 n_0 h\delta}$; $f_2 = \frac{l^4 R_2}{EI_3 h\delta}$; $f_3 = \frac{l^4 R_3}{EI_2 h\delta}$; $R_1 = \Omega - q_1 - F_1$; $R_2 = q_2 + F_2$; $R_3 = P_A - P_m + q_3 + F_3$; $F_i = F_{ic} + F_{ip}$ $(i = 1, 2, 3)$; $c_1 = q_\Pi l\,(\delta g T^2 E S_B)^{-1}$; $c_2 = R_1 l(\delta E h S_B)^{-1}$; $n = q_\Pi l^3(\delta g T^2 I_{3B})^{-1}$; $n_1 = l^2 h \xi_c(\delta E I_{2B} h)^{-1}$; $n_2 = q_\Pi l^3(\delta g T^2 E I_{2B})^{-1}$; $n_3 = l^3(\delta E h I_{2B})^{-1}$; $\delta = (1-\nu)[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$; T — характерный промежуток времени для П. Предполагаем, что при заданных $g_i(s)$, $k_i(s)$ $(i = 1, 2, 3)$ задача (1.6)—(1.8) имеет однозначное решение. Граничные условия (1.7) получены следующим образом. В переднем сечении A граничные условия соответствуют шарнирному закреплению стержня с движителем. В сечении B тело П имеет соединение со стержнем по плоскости, перпендикулярной к оси стержня. Предполагаем, что у П есть две плоскости симметрии, проходящие через орты ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$) и ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$); тело П принято жестким. Считаем, что центр масс C находится на линии BCП пересечения этих плоскостей, а $\xi_c = BC$. Закон движения точки c $\mathbf{x}_c(t) = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{10})\xi_c + \mathbf{w}(l, t)$. Сила инерции поступательного движения тела П

$$J_\Pi = -\frac{q_\Pi}{g}\frac{d^2\mathbf{x}_c}{dt^2} \equiv -\frac{q_\Pi}{g}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}\Big|_{s=l}.$$

Силами инерции вращательных движений и углами поворота для П пренебрегаем. Приходим к выводу о возможности положить равным нулю крутящий момент $\mathbf{M}_{1\Pi}$ и изгибный момент $\mathbf{M}_{3\Pi}$ для П. Применяя принцип Даламбера для П, после преобразований получаем условия (1.7).

2. Условия технической устойчивости состояний транспортируемого стержня в жидкости. Рассмотрим векторный функционал

$$(2.1)\qquad V[u_1, u_2, u_3; t] = \{V_i[u_i, t],\ i = 1, 2, 3\},\ V_1[u_1, t] = \int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 - (\tilde{v}_1 + \tilde{F}_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right],\ V_2[u_2, t] = \int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}\right)^2 - (\tilde{v}_2 + \tilde{F}_2)\left(\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2\right],\ V_3[u_3, t] = \int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\right)^2 - (\tilde{v}_3 + \tilde{F}_3)\left(\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right],\ \tilde{v}_1 = \sup_s\left(\frac{mvl^2}{c^2 h}\right),\ \tilde{v}_2 = \sup_s\left(\frac{mvl^3}{\delta E I_3}\right),\ \tilde{v}_3 = \sup_s\left(\frac{mvl^3}{\delta E I_2}\right),\ \tilde{F}_k = \sup_s\left(P_H^{(k)} + f_k\right),\ k = 1, 2, 3,\ c^2 = ES_0 n_0(s)\delta$$

и векторную меру

$$(2.2)\qquad \rho(\mathbf{u}) = \{\rho_i(u_i), i = 1, 2, 3\},\ \rho_1(u_1) = \sup_s(u_1)^2 + \int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right],$$

$$\rho_j(u_j) = \sup_s(u_j)^2 + \sup_s\left(\frac{\partial u_j}{\partial s}\right)^2 + \int_0^1 ds\left[\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)^2\right],\ j = 2, 3.$$

Для компонент вектор-функции (2.1) справедливы оценки снизу

$$(2.3)\qquad V_1[u_1, t] \geqslant \frac{1}{2}\left[1 - (\tilde{v}_1 + \tilde{F}_1)\right]\rho_1(u_1),\ V_i[u_i, t] \geqslant \frac{1}{3}\left[1 - (\tilde{v}_i + \tilde{F}_i)\right] \times \rho_i(u_i),\ i = 2, 3,$$

функционалы $V_i[u_i, t]$ положительно определены относительно меры $\rho(\mathbf{u})$ при $0 \leqslant \tilde{v}_i + \tilde{F}_i < 1$, $i = 1, 2, 3$. Величины $\mu_i = 1 - (\tilde{v}_i + \tilde{F}_i)$, $i = 1, 2, 3$ — малые параметры: $\mu_i \in (0, 1]$. Зададим конечный промежуток времени $I_1 = [t_0, L\mu^{-1}]$, $\mu^{-1} = \max\{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1}\}$; L —

заданная, как угодно большая постоянная, характеризующая надежность системы ($L > 0$).

О п р е д е л е н и е 1. Динамический процесс, описываемый задачей (1.6)—(1.8), называется технически устойчивым на конечном промежутке времени I_1 по заданной мере $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u})$, если вдоль возмущенного решения $\mathbf{u}(t, s)$ задачи (1.6)—(1.8) для вектора $V[\mathbf{u}, t]$ с положительно-определенными компонентами $V_i[u_i, t]$ ($i = 1, 2, 3$) относительно соответствующих компонент $\rho_i(u_i)$ ($i = 1, 2, 3$) меры $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u})$ выполняются условия

$$V_i[u_i(t, s), t] \leqslant P_i(t), \ t \in I_1, \ i = 1, 2, 3,$$

лишь только в начальный момент

$$V_i[u_i(t_0, s), t_0] \leqslant b_i, \ t_0 \in I_1, \ i = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

где (2.4) задано условиями (1.7), (1.8), и определенные в области I_1 ограниченные функции $P_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям

$$0 < P_i(t) \leqslant C_i, \ C_i = \mathrm{const} > 0,$$
$$P_i(t_0) \geqslant b_i, \ b_i = \mathrm{const} > 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Функции $P_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), постоянные C_i, b_i ($i = 1, 2, 3$), I_1 наперед заданы.

О п р е д е л е н и е 2. Процесс (1.6)—(1.8) называется технически устойчивым на бесконечном промежутке времени I, когда условия определения 1 справедливы при любом $K \leqslant +\infty$. Если при этом

$$\lim_{t \to +\infty} V_i[u_i(t, s), t] = 0, \ i = 1, 2, 3,$$

то процесс (1.6)—(1.8) называется технически асимптотически устойчивым.

О п р е д е л е н и е 3. Процесс (1.6)—(1.8) называется технически неустойчивым на конечном или бесконечном промежутке времени при заданных постоянных b_i и функциях $P_i(t)$, когда при выполнении условий (2.4) для решения $\mathbf{u}(t, s)$ задачи (1.6)—(1.8) найдется значение $t_1 \in I_1$ или $t_1 \in I$ ($t_1 > t_0$) такое, для которого выполняется хотя бы одно из неравенств

$$V_i[u_i(t_1, s), t_1] > C_i, \ C_i = \mathrm{const} > 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Из определений 1—3 следует, что условия технической устойчивости существенно отличаются от свойств устойчивости по Ляпунову не только тем, что система рассматривается на любом конечном, наперед заданном промежутке времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния процесса не зависят от условий заданной мажорации последующих состояний процесса в течение заданного промежутка времени. Необязательность условия отрицательной определенности полной производной функционала Ляпунова исходя из условий краевой задачи в отличие от устойчивости по Ляпунову расширяет область значений на параметры изучаемого процесса.

Полная производная по t от $V[u_1, u_2, u_3; t]$ в силу задачи (1.6)—(1.8) имеет вид

$$\frac{dV_1[u_1, t]}{dt} = 2\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}(t, 1)\left[c_2 - c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(t, 1)\right] - \int_0^1 ds\left[(\tilde{v} + \tilde{F}_1)\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\,\partial s} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(P_H^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - n_0^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial n_0}{\partial s} - f_1\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]\right\}, \ \frac{dV_2[u_2, t]}{dt} = -2n\frac{\partial u_2}{\partial t}(t, 1)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\,\partial s}(t, 1) + 2\times$$
$$\times\int_0^1 ds\left\{\frac{\partial u_2}{\partial t}\left[a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) - P_H^{(2)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s} + a_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + f_2\right] - \right. \tag{2.5}$$

$$-\left(\widetilde{v}_2+\widetilde{F}_2\right)\frac{\partial u_2}{\partial s}\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\,\partial s}\Bigg\},$$

$$\frac{dV_3[u_3,\,t]}{dt}=2\Bigg[\left(n_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\,\partial s}(t,\,1)+n_3\frac{\partial u_3}{\partial t}(t,\,1)\right)(g\rho_{\text{ж}}V_{\text{П}}-q_{\text{П}})-n_2\frac{\partial u_3}{\partial t}(t,\,1)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(t,\,1)+2\int\limits_0^1 ds\,\Bigg\{\frac{\partial u_3}{\partial t}\Bigg[b_1\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)+P_H^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}+b_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}+$$

$$+\,b_3\frac{\partial u_3}{\partial s}+f_3\Bigg]-\left(\widetilde{v}_3+\widetilde{F}_3\right)\frac{\partial u_3}{\partial s}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\,\partial s}\Bigg\}.$$

Выражения (2.5) справа обозначим соответственно через $M_1(t,\ \lambda_1)$, $M_2(t,\lambda_2)$, $M_3(t,\lambda_3)$, где параметры $\lambda_1=\left(c_1,\,c_2,\,\widetilde{v}_1,\,\widetilde{F}_1,\,P_H^{(1)},\,f_1\right)$, $\lambda_2=\left(n,\,a_1,\,a_2,\right.$ $\left.a_3,\,\widetilde{v}_2,\,\widetilde{F}_2,\,P_H^{(2)},\,f_2\right)$, $\lambda_3=\left(n_1,\,n_2,\,n_3,\,b_1,\,b_2,\,b_3,\,\widetilde{v}_3,\,\widetilde{F}_3,\,P_H^{(3)},\,f_3\right)$ характеризуют систему (1.6)—(1.8). Рассмотрим функции

$$\overline{\Phi_1(t,\,\lambda_1)}=M_1(t,\,\lambda_1)-\frac{\mu_1}{2(\mu_1+t)^2}\rho_1(u_1(t,\,s)),\ \overline{\Phi_i(t,\,\lambda_i)}=M_i(t,\,\lambda_i)-$$

$$-\frac{\mu_i}{3(\mu_i+t)^2}\rho_i(u_i(t,\,s)),\quad i=2,3.$$

Для наперед заданных неотрицательных интегрируемых по t функций $\Phi_i(t)$ $(i=1,\,2,\,3)$ потребуем выполнения условий

$$|\overline{\Phi_i(t,\,\lambda_i)}|\leqslant\Phi_i(t),\quad i=1,\,2,\,3.$$

Можем выбрать $\Phi_i(t)=e^{\alpha_i(t)}$ ($\alpha_i(t)$—непрерывные функции, $t\in I_1\subset I$), в частности, положить $\alpha_i(t)=1/(\mu_i+t)$ или $\alpha_i(t)=-2/(\mu_i+t)$. Введем обозначение $\sigma_i(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_i(\tau)\,d\tau$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Рассмотрим функции $z_i(t)=V_i[u_i\ (t,\ s),\ t]-\sigma_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ вдоль решений задачи (1.6)—(1.8). Оценки для dV_i/dt $(i=1,\ 2,\ 3)$ вдоль решений этой задачи приводят к системе неравенств [9—11]

$$\frac{dz_i(t)}{dt}\leqslant\frac{1}{(\mu_i+t)^2}[z_i(t)+\sigma_i(t)],\quad i=1,\,2,\,3. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует задача Коши сравнения вида

$$\frac{dy_i}{dt}=\frac{1}{(\mu_i+t)^2}[y_i+\sigma_i(t)],\quad t\in I_1,\quad i=1,2,3; \tag{2.7}$$

$$y_i(t_0)=y_i^0\geqslant V_i[u_i(t_0,\,s),\,t_0],\quad t_0\in I_1,\quad i=1,2,3. \tag{2.8}$$

Входящие в $V_i[u_i(t_0,\ s),\ t_0]$ функции определены условиями (1.7), (1.8) задачи (1.6)—(1.8). Задача (2.7), (2.8) имеет в области I_1 непрерывное решение

$$y_i(t)=\exp[-1/(\mu_i+t)]\int\limits_{t_0}^{t}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\,\Phi_i(\tau)\,d\tau+y_i^0\exp[1/(\mu_i+t)]\times$$

$$\times\exp[-1/(\mu_i+t)]-\sigma_i(t),\quad i=1,2,3.$$

По соответствующей теореме о дифференциальных неравенствах [11] находим

$$z_i(t)\leqslant y_i(t),\quad i=1,\ 2,\ 3,\quad t\in I_1.$$

Вдоль решения задачи (1.6)—(1.8) имеем оценки

$$(2.9)\quad V_i[u_i(t,s),t]\leqslant P_i(t),\ P_i(t)\equiv\exp[-1/(\mu_i+t)]\int_{t_0}^{t}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\times$$
$$\times\Phi_i(\tau)\,d\tau+y_i^0\exp[1/(\mu_i+t_0)]\exp[-1/(\mu_i+t)],\ t_0,\ t\in I_1,\ i=1,2,3.$$

Пусть функции $\Phi_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{t_0}^{t}\Phi_i(\tau)\exp[1/(\mu_i+\tau)]\,d\tau\leqslant M_i\big(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1}\big)^2\{\exp[1/(\mu_i+t_0)]-$$
$$-\exp\big[1/\big(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1}\big)\big]\},\ t_0,\ t\in I_1,\ i=1,2,3,$$

где наперед заданные постоянные M_i удовлетворяют условиям $|M_i(t,\lambda_i)|\leqslant M_i$, $i=1,2,3$. Отсюда получаем систему оценок

$$P_i(t)\leqslant C_i\equiv M_i\big(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1}\big)^2+y_i^0\exp[1/(\mu_i+t_0)],\ t_0,\ t\in I_1,\ i=1,2,3.$$

Следовательно, в силу (2.8), (2.9) процесс (1.6)—(1.8) технически устойчив в области I_1 по мере $\rho(\mathbf{u})$. Когда краевая задача (1.6)—(1.8) определена на любом промежутке $I_1\subseteq I$ и в каждой области $I_1\subseteq I$ справедливы оценки (2.8), (2.9), тогда процесс технически устойчив на бесконечном промежутке времени. В частности, указанное свойство процесса имеем, когда интегралы $\int_{t_0}^{t}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\Phi_i(\tau)\,d\tau$ $(i=1,2,3)$ являются непрерывными функциями на любом промежутке $I_1\subseteq I$ и растут на каждом $I_1\subseteq I$ не быстрее, чем соответственно функции

$$N_i\int_{t_0}^{t}(\mu_i+\tau)^{-2}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\,d\tau,\ N_i=\text{const}>0,\ N_i\leqslant M_i,\ i=1,2,3.$$

Выполнение условий

$$\exp[-1/(\mu_i+t)]\geqslant\int_{t_0}^{t}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\Phi_i(\tau)\,d\tau,\ I_1\subseteq I,\ i=1,2,3,$$

или

$$\exp[1/(\mu_i+t)]\geqslant\int_{t_0}^{t}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\Phi_i(\tau)\,d\tau,\ I_1\subseteq I,\ i=1,2,3,$$

обеспечивает техническую устойчивость исходного процесса (1.6)—(1.8) на бесконечном промежутке времени, если при этом $M_i(\mu_i+L\bar{\mu}^{-1})^2\geqslant1$, ибо тогда

$$P_i(t)\leqslant y_i^0\exp[1/(\mu_i+t_0)]+1\leqslant C_i,\ t_0,\ t\in I,\ i=1,2,3.$$

Если дополнительно к технической устойчивости процесса (1.6)—(1.8) в области I выполняются условия

$$(2.10)\qquad P_i(t)\to0,\ t\to+\infty,\ i=1,2,3,$$

то исходный процесс технически асимптотически устойчив по мере $\rho(\mathbf{u})$. В частности, (2.10) имеет место, если

$$\exp[-1/(\mu_i+t)]\int_{t_0}^{t}\exp[1/(\mu_i+\tau)]\Phi_i(\tau)\,d\tau\to-y_i^0\exp[1/(\mu_i+t_0)],$$
$$t\to+\infty,\ i=1,2,3.$$

Указанные условия технической устойчивости системы нарушаются, если скорость движения стержня, внешние силы, действующие на стержень, будут удовлетворять системе неравенств

$$\tilde{v}_i + \tilde{F}_i \geqslant 1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.11}$$

так как в этом случае условие положительной определенности (2.3) для функционала (2.1) не будет выполняться. Но этого недостаточно для неустойчивости системы. Она будет технически неустойчива в I_1 или в I, если соответственно в этих областях мажоранты $P_i(t)$ в (2.9) удовлетворяют условиям

$$P_i(t) \to +\infty, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.12}$$

В частности, (2.12) имеет место при $t_0 = 0$ и произвольных $t \geqslant 0$, когда $\mu_i \to 0$ ($i = 1, 2, 3$). Как следует из определения μ_i ($i = 1, 2, 3$), это возможно при стремлении скорости движения стержня в жидкости к критическому значению $v_{\text{кр}}$, что аналогично относится и к внешним силам действующим на стержень, либо эти величины возрастают одновременно. В данном случае $v_{\text{кр}}$ в идеальной жидкости определяется с помощью неравенств (2.11):

$$v_{\text{кр}} = \left[3ES_0n_0hI_2I_3\delta - I_2I_3\left(R_1l^2 + S_0h\delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s}\right) - \right. \tag{2.13}$$

$$\left. - S_0n_0I_2\left(R_2l^4 + P_HS_0l^2h\frac{\partial n_0}{\partial s}\right) - S_0n_0I_3\left(R_3l^4 + P_HS_0l^2h\frac{\partial n_0}{\partial s}\right)\right] \times$$

$$\times [ml^2(I_2I_3 + lS_0n_0hI_2 + lS_0n_0hI_3]^{-1}.$$

Например, для $l = 2$ км $v_{\text{кр}} = 38$ км/ч, для $l = 1$ км $v_{\text{кр}} = 53$ км/ч, для $l = 0{,}5$ км $v_{\text{кр}} = 75$ км/ч при соответствующих других параметрах в (2.13).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каудер Г.** Нелинейная механика.— М.: ИЛ, 1961.
2. **Каюк Я. Ф., Кильчинская Г. А.** Соотношения упругости нелинейной теории длинных цилиндрических оболочек при термомеханическом деформировании // ПМ.— 1985.— Т. 21, № 11.
3. **Байрамов Ф. Д.** О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1974.— Вып. 2.
4. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.
5. **Кириченко Н. Ф.** Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения.— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972.
6. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 2.
7. **Матвийчук К. С.** Техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 11.
8. **Сиразетдинов Т. К.** Метод функций Ляпунова при исследовании некоторых свойств процессов с последействием // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения.— Новосибирск: Наука, 1981.
9. **Скоробагатько В. Я.** Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев: Наук. думка, 1980.
10. **Leipholz H.** Stability of elastic systems.— Alphen aan Rijn: Sijthoff et Noordhoff, 1980.
11. **Szarski J.** Differential inequalities.— Warszawa: PWN, 1967.
12. **Светлицкий В. А.** Механика трубопроводов и шлангов. Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха.— М.: Машиностроение, 1982.
13. **Пантов Е. Н., Махин Н. Н., Шереметов Б. Б.** Основы теории движения подводных аппаратов.— Л.: Судостроение, 1973.

г. Киев *Поступила 20/I 1989 г., в окончательном варианте — 23/VII 1991 г.*