УДК 531.66, 538.89

ПОСТРОЕНИЕ ЕДИНОЙ КРИВОЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА КРАТЕРООБРАЗОВАНИЯ КОМПАКТНЫМИ УДАРНИКАМИ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: kraus@itam.nsc.ru, fomin@itam.nsc.ru, shabalin@itam.nsc.ru

Выполнена серия численных расчетов параметров соударения компактных тел различной формы с массивными мишенями. Экспериментально показано, что зависимость безразмерной глубины кратера, образованного ударниками различной формы, от безразмерной кинетической энергии описывается единой кривой моделирования процесса.

Ключевые слова: единая кривая моделирования, соударение, кратерообразование.

DOI: 10.15372/PMTF20200521

Введение. Сложность исследования процесса соударения деформируемых тел конечных размеров обусловлена тем, что волны напряжений, распространяющиеся в таких телах, многократно отражаются от граничных поверхностей тела и, взаимодействуя, создают сложную волновую картину.

В последнее время интенсивное развитие вычислительной техники позволяет решать сложные задачи динамики деформирования и разрушения на основе уточненных расчетных моделей, эффективных численных методов и современных алгоритмов параллельных вычислений. При этом основное внимание уделяется математическому моделированию и анализу размерностей параметров процесса соударения, а результаты экспериментальных исследований используются для проверки теоретических моделей, описывающих свойства материалов соударяющихся тел и их прочностных характеристик. Такие исследования позволяют, с одной стороны, определить поведение материалов при больших значениях параметров нагружения, с другой — определить пределы прочности элементов техники и конструкций при действии таких нагрузок.

В работе [1] выполнено исследование высокоскоростного соударения сферических ударников с массивными мишенями (металл — металл) в диапазоне скоростей $U_p = 1000 \div 5000$ м/с. В качестве материалов ударников и мишеней использовались алюминий, магний, сталь, латунь, свинец и цинк. В [1] описаны методика проведения экспериментов и некоторые механизмы образования кратеров и перфорации тонких мишеней. Для сферических ударников установлено, что объем кратера на единицу кинетической энергии постоянен для каждого материала и глубина кратера пропорциональна скорости ударников, если она меньше скорости звука в материале мишени.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 гг. (код проекта АААА-А17-117030610136-3).

© Краус Е. И., Фомин В. М., Шабалин И. И., 2020

В работе [2] представлены результаты экспериментов по соударению сферических ударников из меди, свинца, олова, мягкой стали, алюминия, цинка, серебра и свинцово-оловянных сплавов с массивными мишенями из того же материала в диапазоне скоростей соударения $U_p = 750 \div 2250$ м/с. При метании выполнялись условия сохранения массы ударников до момента попадания в цель. Обнаружено, что в исследуемом диапазоне скоростей соударения объем образовавшегося кратера прямо пропорционален кинетической энергии ударника. Для каждого кратера проведены измерения глубины, площади поперечного сечения и объема. Во всех рассмотренных случаях сечение кратера имело круглую форму. Для измерения объема кратера его поверхность покрывалась легкой масляной пленкой, кратер заполнялся расплавленным парафином. Некоторые ударники после соударения принимали полусферическую форму и полностью заполняли внутреннюю часть кратера.

В работе [3] также исследовался удар компактными телами по массивным мишеням. При соударении в материалах ударника и мишени возникают ударные волны, давление в которых превышает пределы прочности. Универсальным свойством кратеров, создаваемых компактными ударниками (все габариты приблизительно одинаковы), летящими с большими скоростями, является глубина проникания, приближенно равная половине диаметра кратера, образующегося в мишени. Другим свойством таких кратеров является практически постоянное значение отношения объема кратера V_c к кинетической энергии ударника E_p. Для каждой пары материалов снаряда и мишени $V_c = kE_p$. Величина коэффициента пропорциональности k зависит от прочностных свойств материалов ударника и мишени. Обычно его значения находятся в диапазоне $k = 0{,}5 \div 2{,}0$ кДж/см^3. Относительная глубина полусферического кратера определяется по формуле

$$L_c/d_p = (\rho_p k/4)^{1/3} U_p^{2/3}, \tag{1}$$

где L_c — глубина кратера; d_p — характерный размер компактного ударника; U_p — скорость соударения.

В обзорах [4, 5] на основе анализа экспериментальных данных и простых модельных представлений сделаны выводы о связи объема кратера с кинетической энергией. Обычно предполагается, что кратеры в изотропных пластичных преградах имеют форму, близкую к полусферической. При соударении с изотропной пластической преградой кинетическая энергия ударяющего тела переходит в работу пластического деформирования, в результате чего образуется кратер объемом

$$V_c \sim k_1 E_p/Y_t$$

(Y_t — динамический предел текучести материала мишени; k_1 — коэффициент пропорциональности, зависящий от прочностных свойств материалов). Установлено, что отклонения формы кратера от полусферической формы наблюдаются при относительно малых скоростях удара и значительном различии плотности или прочности материалов ударника и мишени.

В работе [6] показано, что при высокоскоростном воздействии сферического ударника законы масштабирования кратеров в массивной мишени могут быть приближенно выражены степенным законом с показателем 2/3. При больших скоростях воздействие должно характеризоваться изотропным расширением кратера. В случае когда ударник и мишень выполнены из одного и того же материала, указанные выше законы масштабирования справедливы для полусферического кратера, при этом выполняется энергетический критерий

$$V_c = k_2 E_p/Y_t$$

($Y_t = 1{,}5Y$; Y — статический предел текучести материала мишени; k_2 — коэффициент пропорциональности, зависящий от прочностных свойств материалов). На основе анализа

размерностей параметров и обработки данных экспериментов по высокоскоростному формированию кратеров в [6] получено несколько соотношений, в которых показатель степени отличается от 2/3.

В обзоре [7] представлены законы масштабирования кратера и эмпирические формулы, а также модели анализа размерностей параметров кратера при взаимодействии сферических ударников с массивными мишенями. В результате анализа достаточно большого количества экспериментальных и теоретических работ получено простое соотношение, связывающее параметры кратера, образующегося в массивной мишени при ударе, кинетическую энергию ударника и характеристики материалов:

$$L_c/d_p = k_3(\rho_p/\rho_t)^m(U^*)^n. \tag{2}$$

Здесь U^* — эффективная скорость соударения; k_3, m, n — константы материала.

В работе [7] приведен набор из 12 пар комбинаций констант для выражения (2). Проверка ряда комбинаций параметров для стали марки Ст.20 в диапазоне скоростей $U_p = 600 \div 1300$ м/с показала, что рассчитанные и экспериментальные значения глубины кратера, образующегося при соударении цилиндрических ударников с массивными мишенями из стали марки Ст.20, различаются практически в два раза.

1. Построение единой кривой моделирования процесса кратерообразования. В [8] изложены теоретические основы построения единой кривой моделирования с использованием экспериментальных данных, полученных при высокоскоростном соударении металлических сфер с массивной мишенью. Сжимаемость материала каждого из соударяющихся тел учитывается с помощью параметров ударной адиабаты, при этом в соответствии с результатами экспериментов [9] принимается, что скорость ударной волны D и массовая скорость частиц за фронтом волны U связаны линейной зависимостью. При этом условии давление P и плотность ρ за фронтом ударной волны, где отсутствуют полиморфные превращения, с достаточной точностью могут быть определены соотношениями

$$P = \rho_0(a + \lambda U)U, \qquad \rho = \frac{a + \lambda U}{a + (\lambda - 1)U}, \tag{3}$$

где a, λ — константы материала; ρ_0 — плотность материала при нормальных условиях.

В соответствии с теорией размерности из 13 параметров процесса $(L_c, U_0, \rho_{01}, \rho_{02}, l_0, d_0, \chi_0, \sigma_1, \sigma_2, a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2)$ можно составить 10 независимых безразмерных комбинаций, функциональная зависимость между которыми представляется в виде неявного уравнения, описывающего изучаемый процесс в широком диапазоне скоростей соударения [10, 11]. Полное уравнение связи можно записать в виде [8]

$$\frac{L_c}{l_0} = f\Big(\frac{\rho_{01}U_0^2}{\sigma_1}, \ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, \chi_0, \ \frac{l_0}{d_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{\rho_{01}^{1/2}}{\sigma_1^{1/2}}, \lambda_1, \lambda_2\Big), \tag{4}$$

где d_0 — диаметр ударника сферической формы; U_0 — скорость ударника; χ_0 — коэффициент формы; σ — динамическая твердость; a, λ — параметры в зависимости скорости ударной волны от массовой скорости в соотношениях (3).

Если соударяющиеся тела изготовлены из одного и того же материала, то уравнение (4) упрощается и под знаком функции остается три безразмерных аргумента:

$$\frac{L_c}{l_0} = f_1\Big(\frac{\rho_{01}U_0^2}{\sigma_1}, \ \chi_0, \ \frac{l_0}{d_0}\Big).$$

Если ударник геометрически подобный ($\chi_0 = \text{const}$, $l_0/d_0 = \text{const}$), то результаты экспериментов, независимо от того, какой материал используется, удовлетворяют моделирующей кривой Златина:

$$\frac{L_c}{l_0} = f_2\Big(\frac{\rho_{01}U_0^2}{\sigma_1}\Big). \tag{5}$$

Таким образом, если известны наборы экспериментальных значений $\{L_c\}$ и $\{l_0\}$ при заданном наборе скоростей соударения, то можно найти среднее значение динамической твердости соударяющихся материалов

$$\langle\sigma_1\rangle = \frac{1}{n}\sum_{n}^{1}\sigma_{1i}.$$

Анализ задачи проникания сферических ударников в полубесконечную преграду из одного материала позволил выделить основные безразмерные параметры (5), главным из которых является отношение кинетической энергии ударяющего тела к прочностным параметрам преграды. Результаты экспериментов по внедрению сферических ударников в массивную мишень [8] в виде зависимости относительной глубины кратера от отнесенной к динамической твердости кинетической энергии нанесены на единую кривую моделирования.

2. Верификация единой кривой с использованием численного моделирования. Оценим возможность применения кривой моделирования Златина для ударников, форма которых отличается от сферической. Верификация численных расчетов процесса соударения компактных ударников различной формы с массивными мишенями выполнялась с использованием экспериментальных данных для ударников цилиндрической формы. В эксперименте, проведенном в Институте теоретической и прикладной механики (ИТПМ) СО РАН, цилиндрический ударник из стали марки Ст.20 (диаметр $d_p = 0{,}5$ см, высота $H_p = 0{,}5$ см) разгонялся электродинамическим ускорителем масс до скоростей $U_p = 600 \div 1350$ м/с и соударялся с мишенью из стали марки Ст.20 (цилиндр диаметром $d_t = 5{,}0$ см и высотой $H_t = 4{,}0$ см) [12, 13]. По положению ударника в пространстве и времени определялась его скорость. Глубина кратера относительно поверхности L_c измерялась стрелочным индикатором (рис. 1). В результате обработки экспериментальных данных получено значение динамической твердости 1,35 ГПа, сопоставимое с данными работы [14].

С использованием экспериментальных данных проведена серия расчетов при указанных выше геометрических параметрах ударника и мишени. Расчеты проводились с использованием программного комплекса Reactor 3D, разработанного в ИТПМ СО РАН [15–18]. Геометрическая постановка задачи о соударении тел представлена на рис. 2. Предварительные расчеты проводились в двумерной (аксиальной, псевдотрехмерной) постановке, а контрольные расчеты — в полной трехмерной постановке, поскольку для решения задачи в трехмерной постановке требуется существенно большее время.

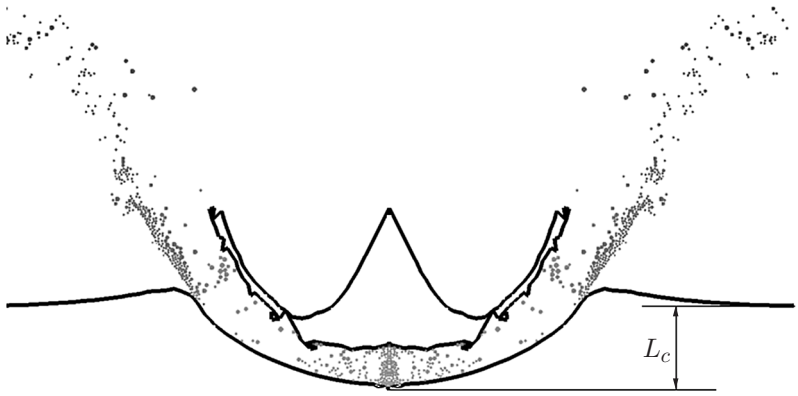

Рис. 1. Глубина кратера относительно поверхности мишени

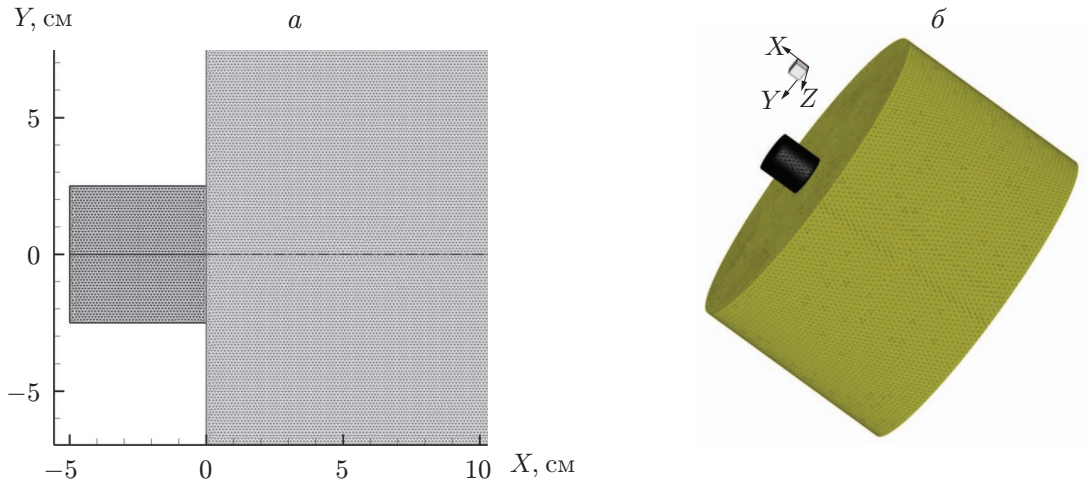

Рис. 2. Геометрия задачи о соударении цилиндрического ударника и массивной мишени в двумерной (*а*) и трехмерной (*б*) постановках

Рассмотрим начальную стадию процесса взаимодействия цилиндрического ударника и массивной мишени из одного и того же материала (сталь марки Ст.20) при скорости соударения $U_p = 900$ м/с. В этом случае форма кратера близка к сферической. От плоскости контакта в противоположных направлениях в течение небольшого промежутка времени распространяются плоские волны сжатия, которые постепенно искривляются вследствие различия площадей соприкосновения ударника и мишени и наличия свободных поверхностей. Так, в момент времени $t = 5{,}0$ мкс (рис. 3,*а*) только небольшая часть волны сжатия имеет плоский фронт. Отчетливо видны фронты волн разгрузки, движущиеся от боковой поверхности ударника и периферийной поверхности мишени. Далее волны сжатия разделяются областью растягивающих напряжений вблизи оси симметрии (рис. 3,*б*), в результате чего формируется течение материала в направлении свободных поверхностей. Периодическая смена волн сжатия на волны разгрузки на свободной тыльной поверхности цилиндра обеспечивает постепенное торможение ударника, его деформирование и разрушение вблизи лицевой поверхности мишени. Вследствие радиального течения материалов фрагменты разрушенного материала выносятся из центра на поверхность кратера и формируется осколочное поле в направлении, противоположном направлению удара. При больших скоростях соударения остается лишь небольшая часть цилиндрического ударника (рис. 3,*г*). На рис. 3,*г* приведена также окружность, с помощью которой рассчитывается объем кратера.

Форма кратера в массивной преграде, полученная в результате расчета, приведена на рис. 4,*а*. В соответствии с гибридным сеточно-бессеточным алгоритмом работы программного комплекса Reactor 3D на рис. 4 все разрушенные элементы ударника и мишени заменены на сферические частицы. Для “измерения” глубины кратера проводится сечение преграды плоскостью $Z = 0$ (рис. 4,*б*). Будем считать, что кратер имеет сферическую форму, тогда, проводя окружность нужного диаметра, можно с некоторой погрешностью определить глубину кратера.

На рис. 5 приведены экспериментальные данные и результаты двумерных и трехмерных расчетов относительной глубины кратеров, образующихся в результате соударения цилиндрического ударника и мишени со скоростью в диапазоне $U_p = 600 \div 1350$ м/с. Следует отметить, что разброс результатов двумерных и трехмерных расчетов сравним с разбросом экспериментальных данных. Полученные результаты представлены на рис. 5 в координатах безразмерная кинетическая энергия E/Y_t — относительная глубина кра-

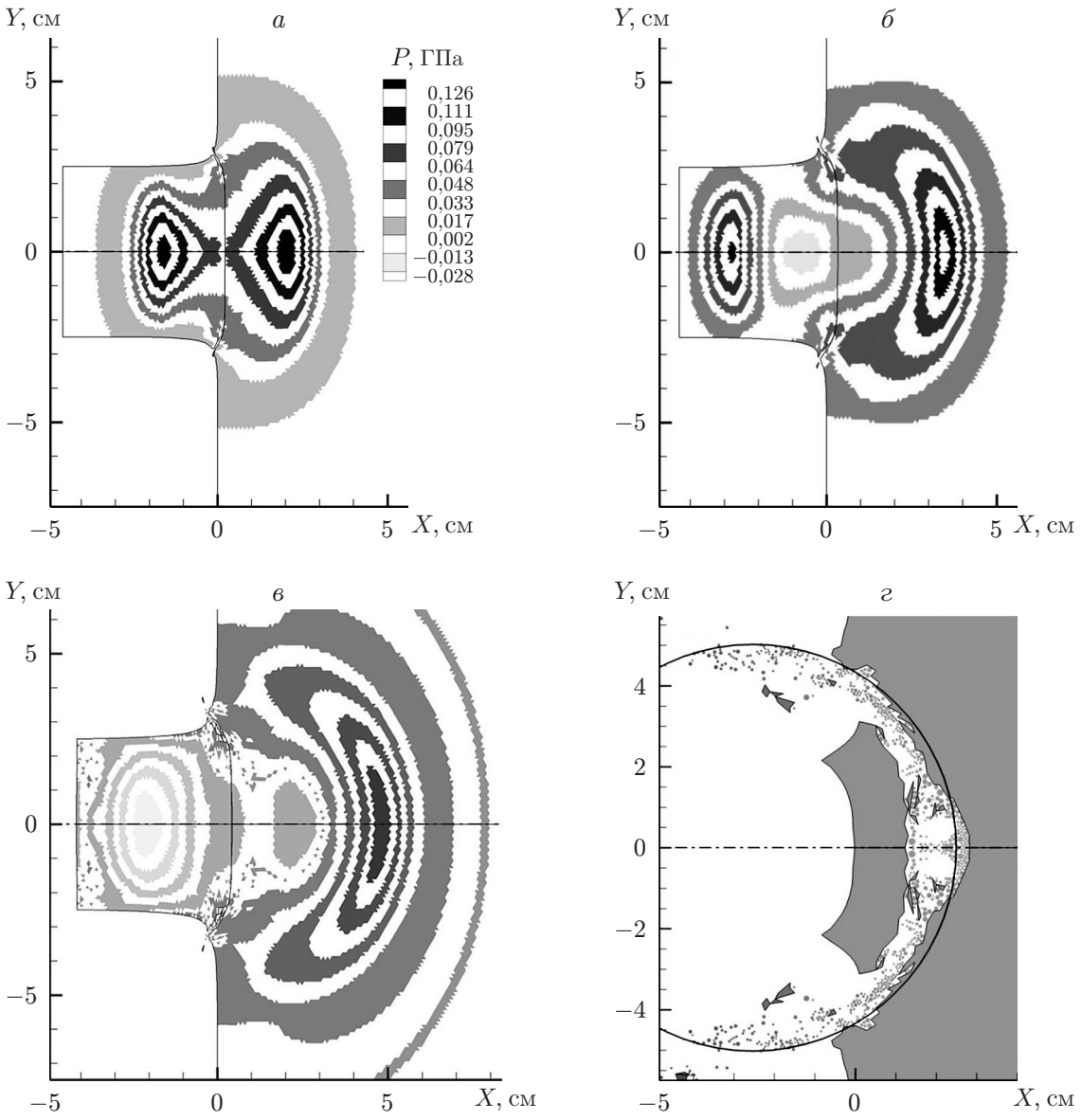

Рис. 3. Изолинии давления при взаимодействии цилиндрического ударника с массивной мишенью при скорости соударения $U_p = 900$ м/с:
а — $t = 5$ мкс, *б* — $t = 7{,}5$ мкс, *в* — $t = 10$ мкс, *г* — $t = 250$ мкс

тера L_c/l_0 ($E = \rho U^2/2$ — удельная кинетическая энергия ударника, Y_t — динамический предел текучести материала ударника и мишени, l_0 — характерный размер ударника). Согласно работе [19] уравнение аналитической кривой моделирования имеет вид

$$L_c/l_0 = A(E/Y_t)^{1/3},$$

где $A = 0{,}43$ — постоянная.

Расчеты параметров соударения цилиндрических ударников с массивными мишенями позволили определить динамические физико-механические параметры стали марки Ст.20, с использованием которых можно провести моделирование процесса соударения ударников произвольной формы с массивными мишенями. Пусть масса тел различной формы одинакова, тогда импульс и кинетическая энергия ударников также одинаковы. В расчетах использовались ударники, имеющие форму сферы, цилиндра, диска, конуса.

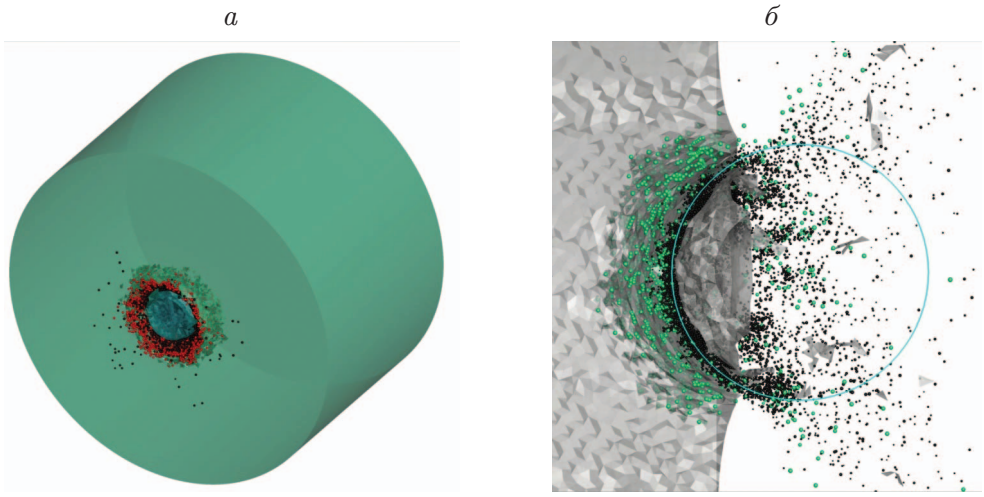

Рис. 4. Определение глубины кратера в трехмерных расчетах при $t = 65$ мкс:
а — кратер в массивной преграде, *б* — сечение преграды плоскостью $Z = 0$; темные сферические частицы — разрушенные элементы ударника, светлые — разрушенные элементы преграды

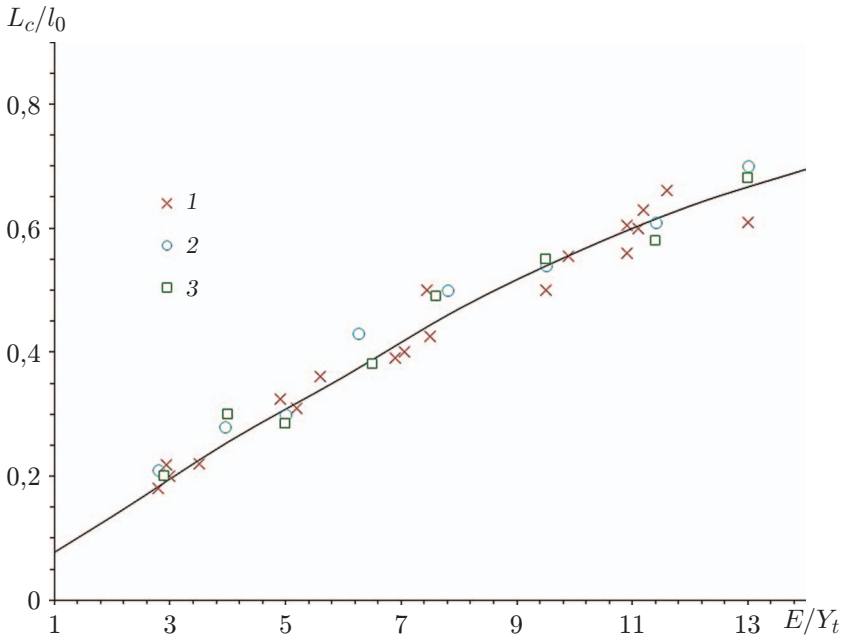

Рис. 5. Зависимость относительной глубины кратера от относительной энергии цилиндрического ударника:
1 — эксперимент, *2* — двумерный расчет, *3* — трехмерный расчет; сплошная линия — аналитическая кривая моделирования [19]

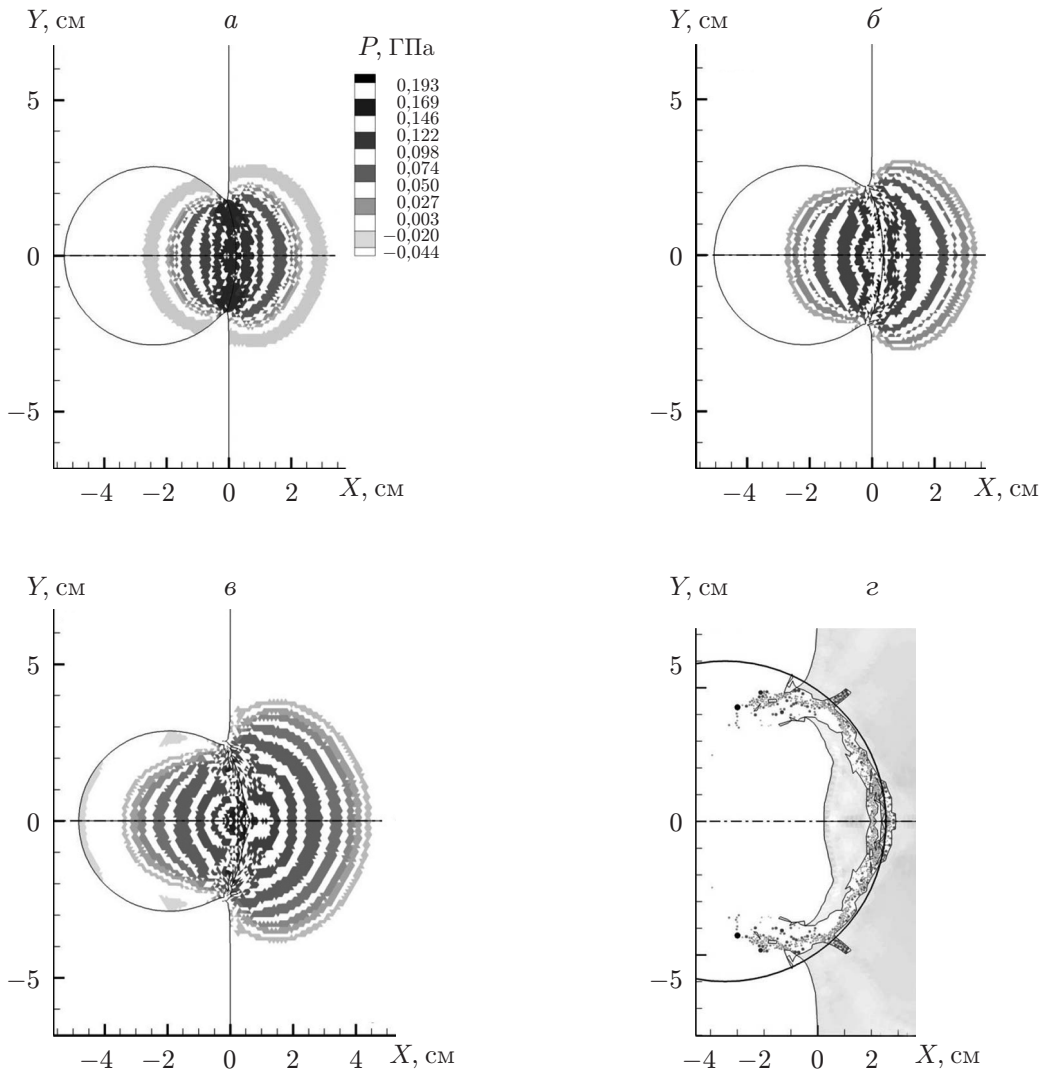

Рис. 6. Изолинии давления при взаимодействии сферического ударника с массивной мишенью при скорости соударения $U_p = 900$ м/с:
а — $t = 5$ мкс, *б* — $t = 7{,}5$ мкс, *в* — $t = 10$ мкс, *г* — $t = 250$ мкс

Рассмотрим процесс взаимодействия сферического ударника радиусом 2,86 см и массивной мишени при скорости соударения $U_p = 900$ м/с. В этом случае форма кратера близка к сферической. Процесс формирования волн сжатия при взаимодействии сферического ударника с мишенью отличается от рассмотренного выше процесса, происходящего при взаимодействии цилиндрического ударника с мишенью. В данном случае площадь поверхности контакта увеличивается в процессе внедрения ударника в мишень. Начиная с момента соударения волны сжатия являются криволинейными вследствие криволинейной формы поверхности сферы (рис. 6,*а*). Скорость волн разгрузки, распространяющихся с периферийных поверхностей, уменьшается с увеличением площади поверхности контакта (рис. 6,*б*). Даже в момент времени $t = 10{,}0$ мкс (рис. 6,*в*) волны разгрузки не достигают оси симметрии. Это приводит к тому, что торможение сферического ударника начинается позднее и происходит медленнее. На рис. 7 показано изменение кинетической энергии ударников различной формы при соударении с массивной преградой. Радиальное течение материала также приводит к деформированию и разрушению материалов в области контакта и формированию кратера сферической формы.

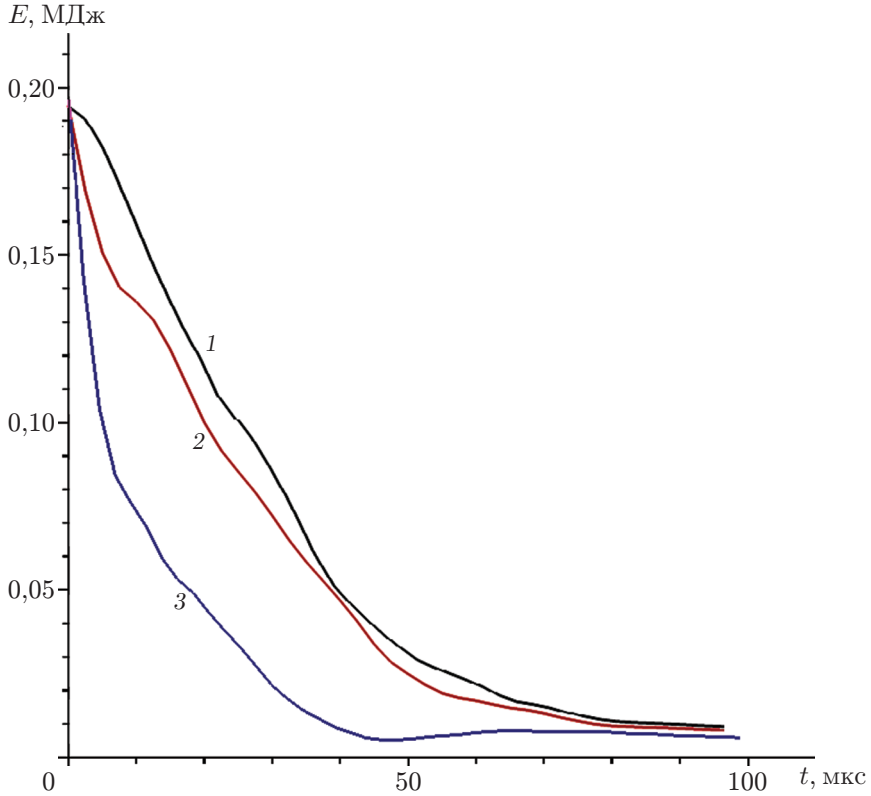

Рис. 7. Зависимость от времени кинетической энергии ударника, имеющего форму сферы (*1*), цилиндра (*2*) или диска (*3*), при соударении с массивной мишенью

Рассмотрим процесс соударения ударника в виде диска (диаметр $d_p = 6{,}93$ см, высота $H_p = 2{,}6$ см) с массивной мишенью — классический пример процесса распространения волн сжатия от контактной поверхности и формирования волн разгрузки на свободных поверхностях.

На рис. 8,*а* видны изолинии давления как на фронте волны сжатия, так и в волне разгрузки. В момент времени $t = 7{,}5$ мкс (рис. 8,*б*) в результате прохождения волны разгрузки в материале диска напряжения снимаются, при этом волна сжатия продолжает движение в массивной мишени (рис. 8,*в*). Материал диска и область под ним движутся как единое целое, до тех пор пока в результате радиального течения в материале диска не будет сформирована область растягивающих напряжений вблизи оси симметрии. Это приводит к отрыву материала массивной мишени от диска (рис. 8,*г*).

Поскольку материал диска на периферии испытывает большие деформации, происходит его фрагментация. Материал диска тормозится значительно быстрее материалов сферы и цилиндра (см. рис. 7) вследствие большой площади поверхности контакта. Окончательная форма кратера, образовавшегося в результате удара диска по мишени, близка к сферической. Глубина кратера мала по сравнению с его диаметром, что обусловлено геометрическими параметрами диска. В координатах $(E/Y_t, L_c/l_0)$ в исследуемом диапазоне скоростей точки, соответствующие результатам расчета глубины кратеров, располагаются вблизи единой моделирующей кривой (рис. 9).

На рис. 9 в координатах $(E/Y_t, L_c/l_0)$ представлены результаты расчетов соударения компактных ударников различной формы (диск, сфера, конус, цилиндр) с массивной мишенью и единая моделирующая кривая, построенная по экспериментальным данным

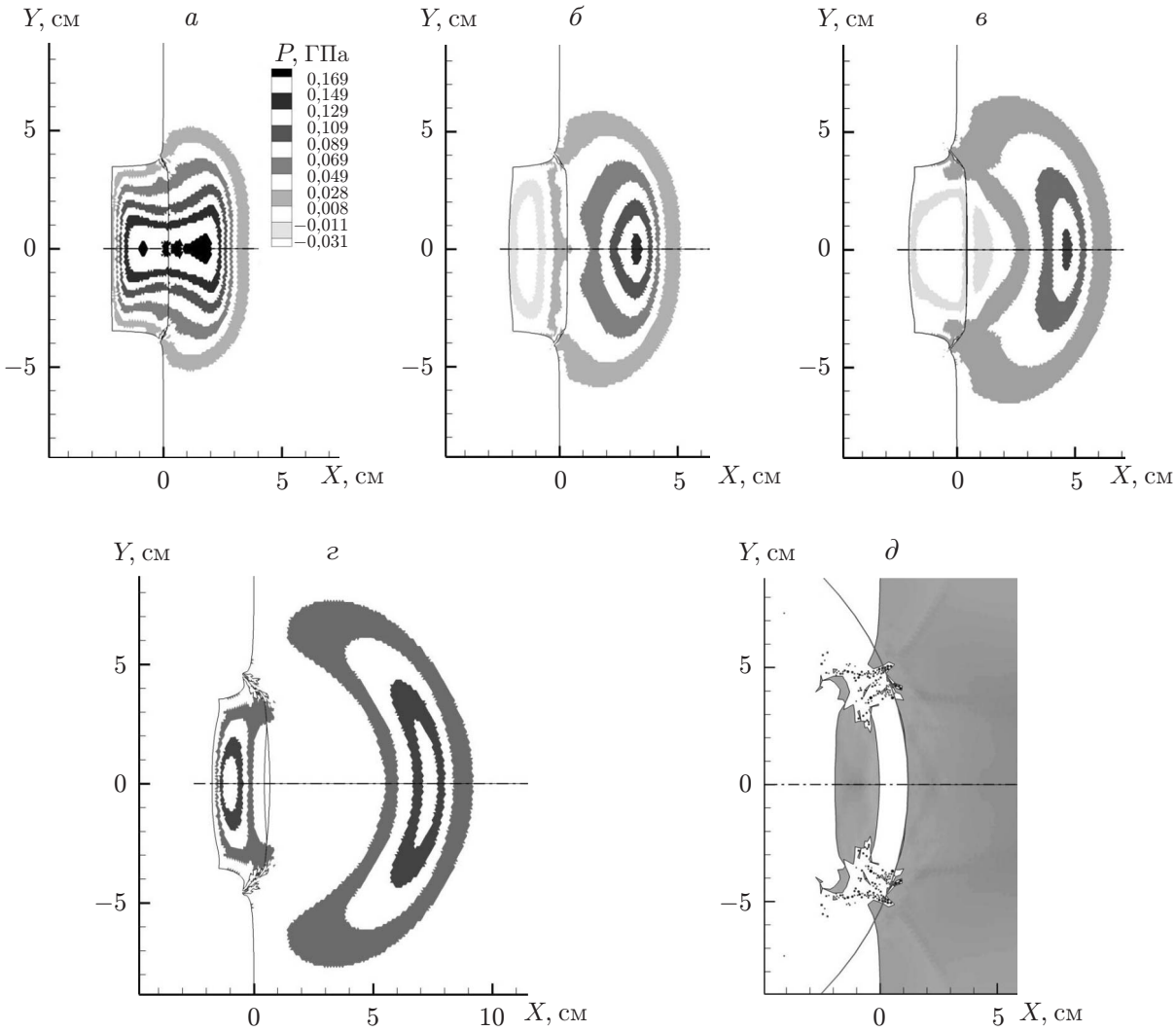

Рис. 8. Изолинии давления при взаимодействии ударника в форме диска с массивной мишенью при скорости соударения $U_p = 900$ м/с:
а — $t = 5$ мкс, *б* — $t = 7{,}5$ мкс, *в* — $t = 10$ мкс, *г* — $t = 15$ мкс, *д* — $t = 250$ мкс

в случае цилиндрических ударников. Из рис. 9 следует, что результаты расчета процесса соударения ударников различной формы с массивной мишенью описываются единой моделирующей кривой.

Следует отметить, что точки, соответствующие глубинам кратера, образующегося в результате удара диском, не ложатся на единую моделирующую кривую, построенную в размерных координатах (U_p, L_c) (рис. 10), однако в безразмерных координатах $(E/Y_t, L_c/l_0)$ такого эффекта не наблюдается (см. рис. 9).

3. Выводы. Результаты анализа размерности параметров процесса образования кратеров в массивных мишенях вследствие удара компактными телами позволяют достаточно точно определять динамические свойства материалов соударяющихся тел.

Выполненная серия расчетов параметров процесса образования кратера при ударе компактными ударниками различной геометрической формы по массивным мишеням показала, что в безразмерных координатах $(E/Y_t, L_c/l_0)$ точки, соответствующие глубинам кратера, образующегося в массивных мишенях, ложатся на единую моделирующую кривую.

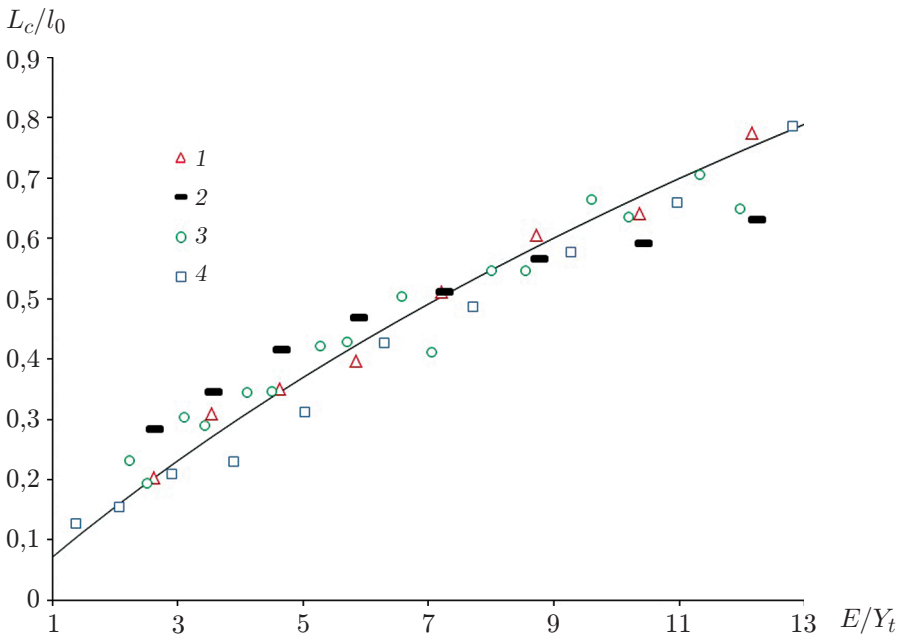

Рис. 9. Зависимость безразмерной глубины кратера от безразмерной кинетической энергии удара:
точки — результаты численного расчета для ударников различной формы (*1* — конус, *2* — диск, *3* — сфера, *4* — цилиндр), сплошная линия — единая моделирующая кривая, построенная по результатам экспериментов с цилиндрическими ударниками

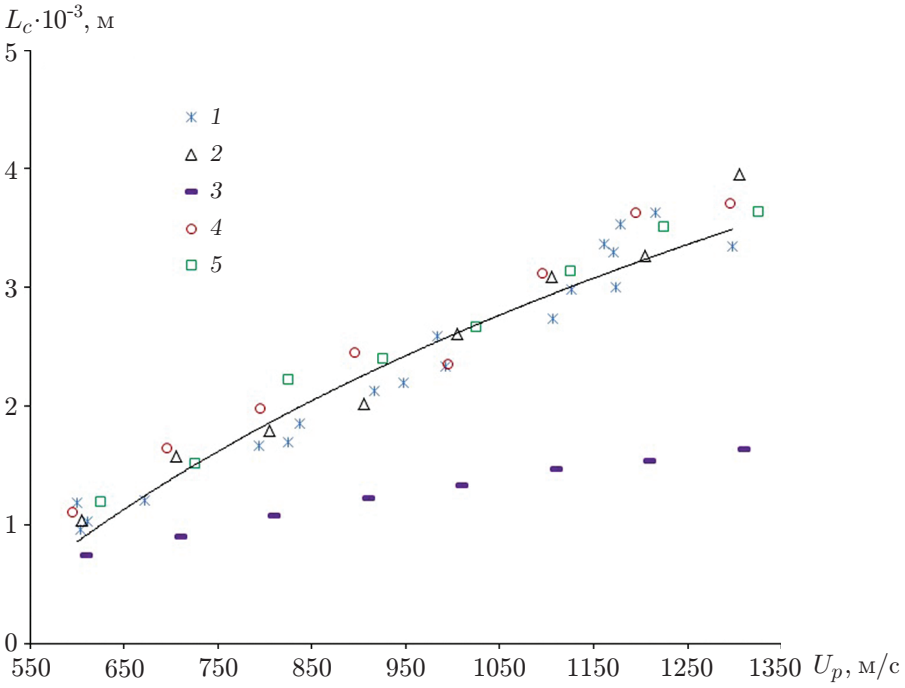

Рис. 10. Зависимость размерной глубины кратера от размерной скорости соударения тел:
точки — результаты эксперимента и численного расчета для ударников различной формы: *1* — эксперимент с цилиндрическим ударником, *2–5* — расчет (*2* — конус, *3* — диск, *4* — сфера, *5* — цилиндр), сплошная линия — аппроксимация кривой моделирования

ЛИТЕРАТУРА

1. **Van Valkenburg M. E., Clay W. G., Huth J. H.** Impact phenomena at high speeds // J. Appl. Phys. 1956. V. 27, N 10. P. 1123–1129.
2. **Christman D. R., Gehring J. W.** Analysis of high-velocity projectile penetration mechanics // J. Appl. Phys. 1966. V. 37, N 4. P. 1579–1587.
3. **Зукас Д. А.** Динамика удара / Д. А. Зукас, Т. Николас, Х. Ф. Свифт и др. М.: Мир, 1985.
4. **Мержиевский Л. А.** Высокоскоростной удар // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 5. С. 92–108.
5. **Merzhievsky L. A.** Crater formation in a plastic target under hypervelocity impact // Intern. J. Impact Engng. 1997. V. 20, N 6–10. P. 557–568.
6. **Shanbing Y., Gengchen S., Qingming T.** Experimental laws of cratering for hypervelocity impacts of spherical projectiles into thick target // Intern. J. Impact Engng. 1994. V. 15, N 1. P. 67–77.
7. **Sun Y., Shi C., Liu Z., et al.** Theoretical research progress in high-velocity/hypervelocity impact on semi-infinite targets // Shock Vibrat. 2015. V. 2015. P. 1–15.
8. **Златин Н. А.** Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Н. А. Златин, А. П. Красильщиков, Г. И. Мишин и др. М.: Наука, 1974.
9. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. М.: Наука, 1968.
10. **Беляков Л. В., Витман Ф. Ф., Златин Н. А.** О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании. 2. О моделировании удара шара по полупространству // Журн. техн. физики. 1963. Т. 33, № 9. С. 900–995.
11. **Витман Ф. Ф., Златин Н. А.** О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании. 1. Состояние и теория вопроса // Журн. техн. физики. 1963. Т. 33, № 6. С. 982–989.
12. **Witt W., Loffler M.** The electromagnetic gun-closer to weapon system status // Military Technol. 1998. N 5. P. 80–86.
13. **Фомин В. М., Постников Б. В., Сапожников Г. А., Фомичев В. П.** Многоступенчатый метод разгона тел // Докл. АН. 2000. Т. 374, № 2. С. 198–201.
14. **Огородников В. А., Боровкова Е. Ю., Ерунов С. В.** Прочность некоторых марок стали и армко-железа при ударно-волновом сжатии и разгрузке в области давлений 2–200 ГПа // Физика горения и взрыва. 2004. Т. 40, № 5. С. 109–117.
15. **Краус Е. И., Мельников А. Ю., Фомин В. М., Шабалин И. И.** Пробитие ледяных преград конечной толщины стальными ударниками // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 3. С. 146–153.
16. **Kraus E. I., Shabalin I. I.** Reactor 2D: A tool for simulation of shock deformation // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1770. 030092.
17. **Kraus E., Shabalin I.** Melting behind the front of the shock wave // Thermal Sci. 2019. V. 23, N 2. P. 519–524.
18. **Kraus E. I., Shabalin I. I.** Simulation of fracture in 3D dynamic problems of collision of solid bodies // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2027. 030165.
19. **Медведев А. Е., Шабалин И. И.** Аналитическое представление кривой моделирования Н. А. Златина // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2, № 5. С. 105–107.

Поступила в редакцию 5/VI 2020 г.,
после доработки — 5/VI 2020 г.
Принята к публикации 29/VI 2020 г.