ПМТФ, №3, 1962

ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА, ВЫЗВАННОЕ ПУЛЬСАЦИЕЙ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ МАССОВЫХ СИЛ

Л. Я. Любин, А. С. Позицкий

(Москва)

Рассматривается движение пузырьков газа, возникающее в результате периодического изменения давления на одной из поверхностей жидкости. Массовыми силами пренебрегаем (например в силу малости размеров пузырьков).

Полученные результаты могут быть распространены на случай движения единичного пузырька вблизи стенки сосуда. (Кроме того, определяются собственные частоты пузырьков при различных формах колебаний.)

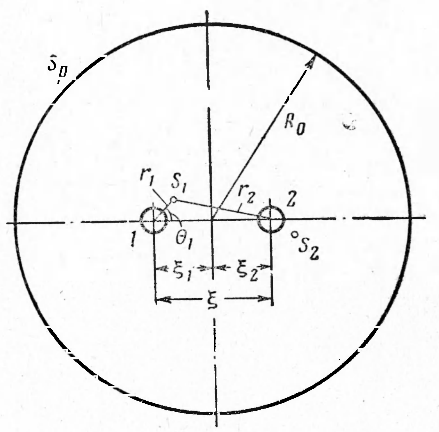
1. Биеркнесом [1] проведены теоретические и опытные исследования по определению кажущегося взаимодействия пульсирующих шаров (пульсирующие шары Биеркнеса). Для оценки силы такого взаимодействия в случае весьма малых по сравнению с расстоянием между ними шаров Н. Е. Жуковским [2] получена следующая простая формула:

$$P_1 = -\frac{3}{8\pi L^2}\frac{d}{dt}\left(Q_1\frac{dQ_2}{dt}\right) + \frac{1}{4\pi L^2}\left(\frac{dQ_1}{dt}\cdot\frac{dQ_2}{dt}\right)$$

Здесь P_1 — сила, действующая на первый шар, L — расстояние между шарами, Q_1 и Q_2 — объемы шаров, t — время.

Представляет интерес распространить результаты Биеркнеса и Жуковского на случай движения пузырьков газа, вызванного пульсирующим давлением.

В жидкости, занимающей сферический объем (фигура) радиуса R_0, взвешены два пузырька *1* и *2*, имеющие соответственно радиусы R_1 и R_2. Определяется поступательное движение пузырьков при условии, что на внешней поверхности объема жидкости S_p поддерживается пульсирующее давление $p = p(t)$. При этом предполагается, что расстояние между пузырьками $\xi \gg \max(R_1, R_2)$, но $\xi \ll R_0$.



Фиг. 1

Рассмотрим пульсацию достаточно низкой частоты (c — скорость звука в жидкости)

$$\nu = \frac{m}{2\pi} \ll \frac{c}{R_0}$$

При этом жидкость можно считать несжимаемой. Кроме того, будем пренебрегать процессом газообмена между пузырьком и жидкостью и вызываемым им изменением размеров пузырька (дегазированная жидкость, малая амплитуда давлений).

Не учитываются также поглощение энергии за счет теплопроводности и явление релаксации в жидкости (так как мала частота ν).

Очевидно, что в силу осевой симметрии движение рассматриваемой системы описывается уравнениями Лагранжа с диссипативными членами в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial V_j} + \frac{\partial T}{\partial \xi_j} + \frac{\partial F}{\partial V_j} = -\frac{\partial A}{\partial \xi_j} \qquad \left(V_j = -\frac{d\xi_j}{dt}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{R}_j} - \frac{\partial T}{\partial R_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{R}_j} = \frac{\partial A}{\partial R_j}$$

Здесь T — кинетическая энергия жидкости, F — диссипативная функция Релея, A — работа внешних по отношению к жидкости сил на возможных перемещениях. Жидкость предполагается вязкой. Однако как и в случае всплывания пузырьков в гравитационном поле [3] можно считать, что при достаточно больших числах Рейнольдса ($N_{\mathrm{Re}} \gg 1$) движение жидкости будет отличаться от потенциального лишь в весьма тонком слое около пузырька, а также в области узкого турбулентного следа. При этом следует иметь в виду, что большие числа N_{Re} могут быть получены и в случае жидкости высокой вязкости, если рассматривать движение пузырьков достаточно больших размеров (например в условиях невесомости). Поэтому при подсчете кинетической энергии T и диссипативной функции будем считать движение безвихревым и введем потенциал скоростей φ. Следуя Жуковскому [2], при принятых выше допущениях можно написать выражение для потенциала скоростей $\varphi^{(1)}$ в точке S_1, расположенной вблизи пузырька *1*

$$\varphi^{(1)} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 \tag{1.2}$$

Здесь через φ_1 обозначена потенциальная функция скоростей, обусловленная поступательным движением пузырька *2* при отсутствии пузырька *1*; через φ_2 — поправка к потенциальной функции φ_1 для учета влияния пузырька *1*; через φ_3 — потенциальная функция скоростей, обусловленная поступательным движением пузырька *1* (при принятых допущениях ($\xi \gg \max(R_1, R_2)$) можно не вводить поправки, учитывающей присутствие пузырька *2*, к функции φ_3); через φ_4 — потенциальная функция скоростей, обусловленная пульсацией пузырька *2* при отсутствии пузырька *1*; через φ_5 — поправка к функции φ_4 (аналогичная φ_2); наконец, φ_6 — потенциальная функция скоростей, обусловленная пульсацией пузырька *1* (так же как и в случае φ_3 поправка к функции φ_6 не вводится):

$$\varphi_1 = \frac{R_2^3 V_2}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r_2} = -\frac{R_2^3 V_2}{2}\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi^3} r_1 \cos\theta_1 + \cdots\right)$$

$$\left(\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\xi} r_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\frac{1}{\xi} r_1^2 \cos^2\theta_1 + \cdots\right)$$

$$\varphi_2 = -\frac{R_1^3 R_2^3 V_2}{4}\frac{2}{\xi^3}\frac{\cos\theta_1}{r_1^2} + \cdots$$

$$\varphi_3 = -\frac{R_1^3 V_1}{2}\frac{\cos\theta_1}{r_1^2}, \qquad \psi_4 = -\frac{R_2^2 \dot{R}_2}{r_2} = -\frac{R_2^2}{\xi}\dot{R}_2 - \frac{R_2}{\xi^2}\dot{R}_2 r \cos\theta_1 + \cdots$$

$$\varphi_5 = -\frac{R_1^3 R_2^2}{2\xi^2}\dot{R}_2 \frac{\cos\theta_1}{r_1^2} + \cdots, \qquad \psi_6 = -\frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r_1}.$$

Аналогичные выражения можно написать для точки S_2, расположенной вблизи пузырька *2*.

Выражение для кинетической энергии жидкости (кинетическая энергия газа, содержащегося внутри пузырьков, не учитывается) будет иметь вид

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d\Omega \tag{1.3}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, Ω — объем, занимаемый жидкостью. Применяя формулу Грина, получим

$$T = -\frac{\rho}{2} \iint\limits_{S_1} \varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r_1} dS - \frac{\rho}{2} \iint\limits_{S_2} \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r_2} dS - \frac{\rho}{2} \iint\limits_{S_p} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \tag{1.4}$$

Здесь S_1 и S_2 — поверхности пузырьков *1* и *2* соответственно, $\partial\varphi / \partial n$ — производная в направлении внутренней нормали к поверхности S_p.

В силу принятого допущения (расстояние пузырьков до границы $l \gg \xi$) последний интеграл в выражении (1.4) можно отбросить, так как учет его дает слагаемое порядка $O(R_j^2 / l^2)$.

Используя выражение (1.2) и учитывая, что

$$Q_j = \tfrac{4}{3} \pi R_j^3, \qquad Q_j' = 4\pi R_j^2 \dot{R}_j$$

находим

$$T = \frac{\rho}{2} \left[\frac{(Q_1')^2}{4\pi R_1} + \frac{(Q_2')^2}{4\pi R_2} + \frac{Q_1 V_1^2}{2} + \frac{Q_2 V_2^2}{2} + \frac{Q_1' Q_2'}{2\pi\xi} + \frac{3}{4} \frac{Q_1 Q_2' V_1}{\pi \xi^2} + \frac{3}{4} \frac{Q_2 Q_1' V_2}{\pi \xi^2} \right] \tag{1.5}$$

При интегрировании предполагалось, что относительное изменение радиусов R_j мало по сравнению с единицей. Кроме того, отброшены члены порядка

$$O\left(\frac{\rho}{2} \frac{Q_j^2}{\xi^3} V_j^2\right), \qquad O\left(\frac{\rho}{2} \frac{Q_j^2}{\xi^3} \dot{R}^2\right)$$

Согласно сделанным допущениям можно пренебречь влиянием на движение узкого турбулентного следа и оценить диссипируемую в единицу времени энергию по формуле

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \iint\limits_{S_1} \nabla (\nabla \varphi^{(1)})^2 \, d\mathbf{S}_1 - \mu \iint\limits_{S_2} \nabla (\nabla \varphi^{(2)})^2 \, d\mathbf{S}_2 \tag{1.6}$$

где μ — коэффициент динамической вязкости

$$d\mathbf{S}_j = R_j^2 \sin\theta_j \, d\theta_j \, d\psi_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j}$$

Пренебрегая величинами порядка

$$O\left(\frac{R_j^2}{\xi^2} \mu R_j \dot{R}_i^2\right), \qquad O\left(\frac{R_j^2}{\xi^2} \mu R_j V_i^2\right)$$

получим

$$\frac{dE}{dt} = 16\pi\mu \, (R_1 \dot{R}_1^2 + R_2 \dot{R}_2^2) + 12\pi\mu \, (R_1 V_1^2 + R_2 V_2^2) \tag{1.7}$$

Таким образом, диссипативная функция равна

$$F = \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = 8\pi\mu \, (R_1 \dot{R}_1^2 + R_2 \dot{R}_2^2) + 6\pi\mu \, (R_1 V_1^2 + R_2 V_2^2) \tag{1.8}$$

При оценке работы внешних (по отношению к жидкости) сил на возможных перемещениях будем считать, что сжатие газа в пузырьках происходит адиабатически, т. е.

$$p_j = p_{j0}\left(\frac{Q_{j0}}{Q_j}\right)^{\gamma} \qquad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad p_{j0} = p_0 + \frac{2\sigma}{R_{j0}}\right)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения. Величинами

$$\mu\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \qquad \frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2, \qquad \rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

будем пренебрегать, полагая, что они малы по сравнению со средним давлением p_0 на поверхности жидкости S_p, так как при подстановке во вторые уравнения (1.1) учет этих величин дает слагаемые порядка

$$O\left(\frac{\delta Q_j}{Q_j}V_i\right), \qquad O\left(\frac{\delta Q_j}{Q_j}\dot{R}_i\right)$$

Очевидно, что капиллярное давление следует учитывать лишь в случае пузырьков весьма малых размеров.

Тогда, считая как и выше, что амплитуда колебаний δR_j мала, можно написать

$$\delta A = \frac{\delta p_1 \delta Q_1}{2} + \frac{\delta p_2 \delta Q_2}{2} + 4\pi R_1^2 \delta R_1 p_v + 4\pi R_2^2 \delta R_2 p_v \tag{1.9}$$

Здесь p_v — переменная составляющая давления на поверхности S_p, так что $p(t) = p_0 + p_v(t)$. Подставляя выражения (1.5), (1.8) и (1.9) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{dV_j}{dt} + \left(\frac{Q_j'}{Q_j} + 9\alpha_j\right)V_j + \frac{1}{2\pi Q_j\xi^2}\left[\frac{3}{2}\,\frac{d(Q_jQ_k')}{dt} - Q_j'Q_k'\right] = 0$$

$$(\delta Q_j)'' + 2\alpha_j(\delta Q_j)' + \omega_j^2\delta Q_j = A_j p_v \tag{1.10}$$

$$\alpha_j = \frac{2\mu}{\rho R_{j0}^2}, \qquad \omega_j^2 = \frac{3\gamma p_{j0}}{\rho R_{j0}}, \qquad A_j = \frac{4R_{j0}}{\rho}, \qquad Q_j = Q_{j0} + \delta Q_j$$

Очевидно, что коэффициент ω_j соответствует резонансной частоте колебаний пузырька. Выражение для ω_j совпадает с формулой, полученной Смитом [4].

При гармоническом законе изменения давления $p_v = \Delta p \sin mt$ решения вторых уравнений (1.10) имеют вид

$$\delta Q_j = C_j \sin(mt - \vartheta_j) + d_{j1}\exp(-\lambda_{j1}t) + d_{j2}\exp(-\lambda_{j2}t) \tag{1.11}$$

(предполагается, что $p_v = 0$ при $t < 0$)

$$C_j = \frac{A_j\Delta p}{\sqrt{(\omega_j^2 - m^2)^2 + 4\alpha_j^2 m^2}}, \qquad \vartheta_j = \operatorname{arctg}\frac{2m\alpha_j}{\omega_j^2 - m^2}$$

Коэффициенты d_{j1} и d_{j2} определяются из начальных условий $\delta Q_j = 0$, $(\delta Q_j)' = 0$ при $t = 0$

$$\lambda_{j1} = \alpha_j + \sqrt{\alpha_j^2 - \omega_j^2}, \qquad \lambda_{j2} = \alpha_j - \sqrt{\alpha_j^2 - \omega_j^2}$$

Подставляя решения (1.11) в первые уравнения (1.10), получим два нелинейных уравнения, численное интегрирование которых дает закон поступательного движения пузырьков.

Разобьем, например, рассматриваемый промежуток времени на достаточно малые интервалы Δt_i, в течение которых расстояние между пузырьками практически не изменяется

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (t_0 = 0), \qquad \frac{\Delta\xi_i}{\xi_i} \ll 1$$

Скорость движения пузырьков на соответствующем интервале определяем по формуле

$$V_j(t) = \frac{\exp(-9\alpha_j\theta)}{2\pi Q_{j0}\xi_i^2}\left\{\int\limits_0^\theta \exp(9\alpha_j\tau)\left[Q_j'Q_k' - \frac{3}{2}\frac{d(Q_jQ_k)}{dt}\right]d\tau + 2\pi Q_{j0}\xi_i^2 V_j(t_{i-1})\right\} \qquad (1.12)$$

$$\theta = t - t_{i-1}, \qquad \xi_i = \xi_{i-1} - \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(V_1 + V_2)\,d\tau$$

Если интервалы Δt_i кратны периоду $T = 2\pi / m$, то подставляя в последнюю формулу выражение (1.11), получим конечное соотношение

$$V_j(t) = V_{j1} + V_{j2} + V_{je}, \qquad V_{j1} = \frac{m^2}{36\pi\alpha_j}\frac{C_1C_2}{Q_{j0}\xi_i^2}\cos(\vartheta_j - \vartheta_k)$$

$$V_{j2} = \frac{mC_k}{4\pi Q_{j0}\xi_i^2}\left\{\frac{9\alpha_j\cos(2m\theta - \vartheta_1 - \vartheta_2)}{4m^2 + 81\alpha_j^2} - 3Q_{j0}\left[\cos(m\theta - \vartheta_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 9\alpha_j\frac{9\alpha_j\cos(m\theta - \vartheta_k) + m\sin(m\theta - \vartheta_k)}{m^2 + 81\alpha_j^2}\right]\right\} \qquad (1.13)$$

Здесь V_{je} — функция времени, убывающая как

$$V_j(t_{i-1})\exp[-9\alpha_j(t - t_i)] + g\exp(-\alpha_j t) \qquad (g = \mathrm{const})$$

При достаточно большом расстоянии ξ, когда $\xi \gg V_j t$, но $t \gg 1/\alpha_j$, можно считать, что движение происходит квазистационарно

$$V_j = V_{j1} + V_{j2} \qquad (1.14)$$

При этом пузырьки будут сближаться, если $|\vartheta_j - \vartheta_k| < \pi/2$, и расходиться при $|\vartheta_j - \vartheta_k| > \pi/2$.

Второй случай возможен, если одна из собственных частот выше, а другая ниже частоты изменения давления

$$\omega_l < m < \omega_n \qquad (l,\ n = 1,\ 2,\quad l \neq n)$$

Очевидно, что полученные результаты могут быть распространены на случай, когда жидкость заключена в сосуд произвольной формы при условии, что пузырьки удалены от точек X стенок сосуда на расстояния $l_j(X)$, где величины $l_j(X)$ удовлетворяют условиям

$$\xi \ll l_j(X) \ll \frac{c}{\nu}$$

т. е. тем же условиям, что и R_0.

Для случая двух одинаковых пузырьков ($R_1 = R_2 = R$), что эквивалентно также случаю единичного пузырька, расположенного на расстоянии $\xi/2$ от плоской стенки, получается следующая формула:

$$V_{11} = V_{21} = B\Phi R^3\frac{\delta p^2}{\xi^2} \qquad \left(B = \frac{p_0}{18\pi^2\mu\gamma}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{m}{\omega}, \frac{\alpha}{\omega}\right) = \frac{m^2/\omega^2}{(1 - m^2/\omega^2)^2 + 4(m^2/\omega^2)(\alpha^2/\omega^2)}, \qquad \delta p = \frac{\Delta p}{p_0} \qquad (1.15)$$

При $p_0 = 9.81\cdot10^5$ *дн/см*^{2} и $\gamma = 1.4$ коэффициент B равен $3.94\cdot10^5$, $2.195\cdot10^5$ и $4.64\cdot10^2$ соответственно для воды, спирта и глицерина.

Так как для не очень мелких пузырьков и при умеренной частоте пульсаций давления m функция Φ имеет резко выраженный максимум, т. е. для значений m/ω, лежащих вне малого интервала $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, имеет место неравенство

$$(1-m^2/\omega^2)^2 \gg 4(\alpha^2/\omega^2)(m^2/\omega^2)$$

то в этом случае функция Φ может быть заменена приближенно выражением

$$f\left(\frac{m}{\omega}\right) = \frac{m^2/\omega^2}{(1-m^2/\omega^2)^2} \tag{1.16}$$

В другом крайнем случае, когда частота m весьма близка к резонансной частоте ω, т. е. когда

$$(1-m^2/\omega^2) \ll 4(\alpha^2/\omega^2)(m^2/\omega^2)$$

функцию Φ можно заменить приближенно функцией

$$\Phi\left(1, \frac{\alpha}{\omega}\right) = \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\alpha^2} \tag{1.17}$$

Следует отметить, что в случае резонанса $(m=\omega)$ необходимая величина составляющей скорости сближения $V_{11}=V_{21}$ может быть достигнута при минимальной амплитуде изменения давления Δp.

При этом

$$V_{11} = V_{21} = \frac{\rho R^3 \Delta p^2}{96\pi^2\mu^3}\frac{R^2}{\xi^2} \tag{1.18}$$

При заданной пульсации давления $(m, \Delta p)$ и фиксированном значении радиуса R_2 скорость V_{11} зависит от радиуса R_1

$$V_{11} = C\frac{(1-\varkappa_2)^{3/2}(1-\varkappa_1)(\nu+\varkappa_1\varkappa_2)}{(\varkappa_1^2+\nu)(\varkappa_2^2+\nu)} \tag{1.19}$$

Здесь

$$C = \frac{R_m\Delta p^2}{6\pi^2\mu\rho m^2\xi^2} = \mathrm{const}, \qquad \nu = \frac{16m^2\mu^2}{(3\gamma p_0)^2}$$

$$\varkappa_1 = \frac{q_1-1}{q_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{q_2-1}{q_2}, \quad q_1 = \frac{R_m^2}{R_1^2}, \quad q_2 = \frac{R_m^2}{R_2^2}, \quad R_m^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho m^2}$$

Максимальное и минимальное значение скорости V_{11} достигается при

$$\frac{\partial V(\varkappa_1^\circ, \varkappa_2, m)}{\partial\varkappa_1} = 0 \tag{1.20}$$

(Минимальное значение V_{11} соответствует максимальной скорости пузырька *1* в направлении $-\xi_1$, $V_{11}<0$). Условие (1.20) может быть записано в виде

$$C\frac{Z}{Y} = 0 \tag{1.21}$$

$$Z = (\nu-\varkappa_2)\left(\varkappa_1^2 - 2\nu\frac{1+\varkappa_2}{\nu-\varkappa_2}\varkappa_1 - \nu\right), \qquad Y = \frac{(\varkappa_2^2+\nu)(\varkappa_1^2+\nu)^2}{(1-\varkappa_2)^{3/2}}$$

Таким образом, экстремальное значение V_{11} достигается при

$$\varkappa_1^\circ = \frac{-\nu(\varkappa_2+1) \pm \sqrt{\nu(\nu+1)(\varkappa_2^2+2\varkappa_2+\nu)}}{\varkappa_2-\nu} \tag{1.22}$$

Так как $C/Y>0$, то при $\varkappa_1=\varkappa_1^\circ$ реализуется max или min соответственно при $\partial Z/\partial\varkappa_1 \lessgtr 0$

$$\frac{\partial Z(\varkappa_1^\circ, \varkappa_2, m)}{\partial\varkappa_1} = \mp 2\sqrt{\nu(\nu+1)(\varkappa_2^2+2\varkappa_2+\nu)} \tag{1.23}$$

Таким образом, max (min) реализуется при первом (втором) значении корня $\varkappa_1^\circ$.

В случае идеальной жидкости при

$$\int_0^t V_j d\tau \ll \xi$$

скорость сближения пузырьков можно определить по формуле

$$V_j(t) = \frac{m}{4\pi Q_{j0}\xi^2}\left[C_1C_2\left(mt - \frac{1}{2}\sin 2mt\right) + 3Q_{j0}C_j \sin mt\right] \qquad (1.24)$$

Здесь при вычислении C_1 и C_2 принимается $\mu = 0$.

В случае двух одинаковых пузырьков непериодическая составляющая скорости V_j может быть записана в виде

$$V_{11} = V_{21} = Df\,(m/\omega)\,R\,\frac{\delta p^2}{\xi^2}\,t \qquad \left(D = \frac{p_0}{\pi^2\gamma\rho}\right) \qquad (1.25)$$

При $p_0 = 9.81 \cdot 10^5$ *дн/см*^{2} и $\gamma = 1.4$ коэффициент D равен $7.10 \cdot 10^4$ и $8.66 \cdot 10^4$ в случае воды и спирта соответственно.

2. В рассмотренном выше движении предполагалось, что имеют место только симметричные (с сохранением сферической формы) деформации пузырьков.

Однако возможны и более сложные формы колебаний, возникновение которых следует ожидать особенно в тех случаях, когда частота пульсации давления m близка к одной из собственных частот колебаний пузырька без изменения объема (капиллярные колебания). Поэтому при указанных частотах можно ожидать отклонение от рассмотренных в п. 1 закономерностей.

Собственные частоты капиллярных колебаний пузырька определяются известной формулой [5]

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3}(n^2 - 1)(n + 2)$$

Поступила
30 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjerknes. Vorläufige Mitteilungen über die Druckkräfte, die entstehen wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations und Contraktions Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen. Videnskabselsk, Forhandtl. Christiania, 1875.
2. Жуковский Н. Е. О кажущемся взаимодействии тел, находящихся в беспредельной массе движущейся жидкости. Поли. собр. соч. т. II, М. — Л., ОНТИ, 1936.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика, М., Физматгиз, 1959.
4. Smith F. D. On the Destructive Mechanical Effects of the Gasbubbles liberated by the Pessage of Intense Sound through a Liquid. Phil. Mag. 1953, vol. XIX.
5. Ламб. X. Гидромеханика. М. — Л., Гостехиздат, 1947.