

УДК 539.3

## ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ УПРУГИХ ТЕЛ В ОКРЕСТНОСТЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК НА ПРИМЕРЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ ВНАХЛЕСТКУ

В. П. Матвеевко, Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь  
E-mails: mvp@icmm.ru, natsev@icmm.ru, fedorov@icmm.ru

Исследовано напряженное состояние в клеевых соединениях внахлестку при различных геометрических формах клеевой выжимки. Отмечено, что применяемые расчетные схемы рассматриваемой задачи включают особые точки, в которых при использовании для расчета напряженного состояния модели линейной теории упругости возможны бесконечные значения напряжений. На основе выводов из решения задачи оптимизации геометрии в окрестностях особых точек упругих тел предлагаются варианты геометрии клеевой выжимки, обеспечивающие наиболее существенное уменьшение концентрации напряжений в клеевых соединениях внахлестку.

**Ключевые слова:** клеевые соединения, простое соединение внахлестку, сингулярность напряжений, конечно-элементный анализ, форма соединения, оптимизация геометрии.

**Введение.** В задачах теории упругости существуют сингулярные решения, обусловленные наличием бесконечных значений напряжений в отдельных точках (линиях) области, называемых особыми. К числу этих точек относятся точки на поверхности тела, в которых нарушается условие гладкости поверхности, меняется тип краевых условий, контактируют различные материалы, или внутренние точки, в которых, например, имеет место нарушение условия гладкости поверхности контакта различных материалов [1–4]. Бесконечные значения напряжений появляются в идеализированной модели реального объекта, рассматриваемой в рамках линейной теории упругости. Такая модель позволяет получить численное решение рассматриваемой задачи. Сингулярное решение, как правило, показывает, что в моделируемом объекте имеются зоны с четко выраженной концентрацией напряжений.

Соединение внахлестку — наиболее распространенный тип клеевого соединения. Расчетные схемы подобных клеевых соединений содержат особые точки, в окрестностях которых при нагружении происходит концентрация напряжений.

Существуют различные способы уменьшения напряжений в клеевых соединениях внахлестку. Одним из таких способов является изменение формы внешней поверхности клеевого слоя на концах области контакта. В соединении внахлестку с прямым торцом клеевого слоя, полученным в результате удаления излишков клея с краев области контакта, имеют место неоднородное распределение напряжений по поверхности контакта и концентрация напряжений на концах области контакта. Изменение прямоугольной формы торца

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-96017) и в рамках Программы Президиума РАН № 25 (код проекта 12-П-1018).

© Матвеевко В. П., Севодина Н. В., Федоров А. Ю., 2013

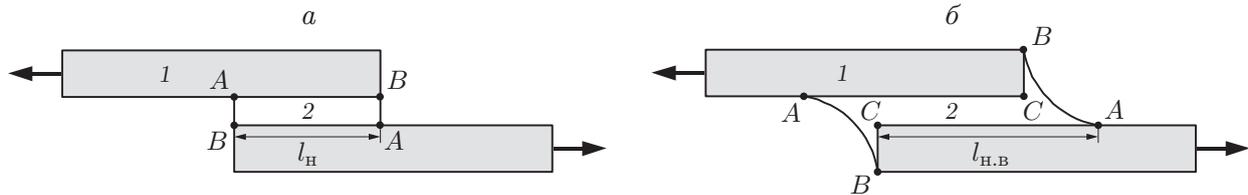


Рис. 1. Варианты клеевого соединения материалов внахлестку:  
*a* — без клеевой выжимки, *б* — с клеевой выжимкой; 1 — материал, 2 — клей

клеевого слоя путем формирования внешних излишков клея (выжимок) позволяет распределить нагрузку на большей площади и обеспечивает более однородное распределение напряжений.

В работах [5–12] показано, что использование выжимок на концах области контакта клеевых соединений приводит к уменьшению концентрации напряжений как в клеевом слое, так и в склеиваемых материалах. При этом, как правило, рассматривается только одна форма выжимки. Исключением является работа [11], в которой проводится сравнительный анализ различных форм выжимок. Заметим, что в выводах [11] о влиянии формы выжимки на уровень напряжений в клеевых соединениях отмечается определяющая роль угла присоединения свободной поверхности клеевой выжимки к склеиваемому материалу. В то же время отсутствует заключение об оптимальности найденной формы клеевой выжимки и эффективности предлагаемых вариантов клеевых соединений, выполненных из других склеиваемых материалов и клеев.

В настоящей работе рассматривается вариант построения оптимальной геометрии выжимки в клеевых соединениях при различных физико-механических характеристиках клея и склеиваемых материалов.

**1. Конечно-элементный анализ напряженного состояния в клеевых соединениях внахлестку.** Клеевые соединения представляют собой составные тела. На рис. 1 приведены два варианта клеевого соединения внахлестку: без клеевой выжимки и с клеевой выжимкой ( $l_n$ ,  $l_{н.в}$  — длина участка нахлестки для соединения без выжимки и с выжимкой соответственно). В расчетных моделях этих соединений на поверхности тела имеются особые точки *A*, *B*, в которых соединяются различные материалы, и точка *C*, в которой нарушается условие гладкости поверхности контакта двух материалов.

При анализе напряженно-деформированного состояния рассматриваемых клеевых соединений с помощью численных методов возникают трудности при оценке точности и сходимости решения в окрестностях особых точек. При использовании метода конечных элементов одним из способов решения этой проблемы является сгущение сетки конечных элементов. В этом случае можно добиться необходимой точности вычисления напряжений вне некоторой окрестности особой точки. Размер этой окрестности зависит от степени сгущения конечно-элементной сетки.

Эффективной оценкой точности результатов, полученных при численном решении задачи на основе принципа возможных перемещений, является точность выполнения естественных краевых условий на свободной от нагрузок внешней поверхности образцов и поверхности контакта двух разных материалов. В настоящей работе использовались дискретизации, обеспечивающие выполнение естественных краевых условий вне трех-четырех элементов, примыкающих к особой точке, с погрешностью менее 1 %.

Анализ различных форм клеевых выжимок выполнен в работах [6–9, 11, 12]. В большинстве из них рассматривается треугольная геометрия клеевой выжимки с углом сопряжения внешней поверхности клея с поверхностью склеиваемого материала, как правило,

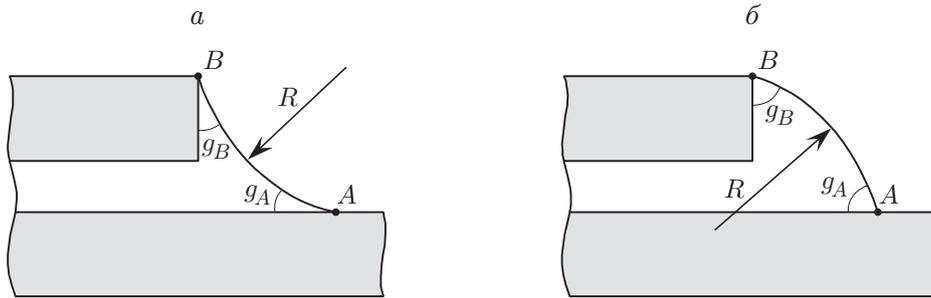


Рис. 2. Формы свободной поверхности клеевой выжимки:  
*a* — вогнутая, *б* — выпуклая

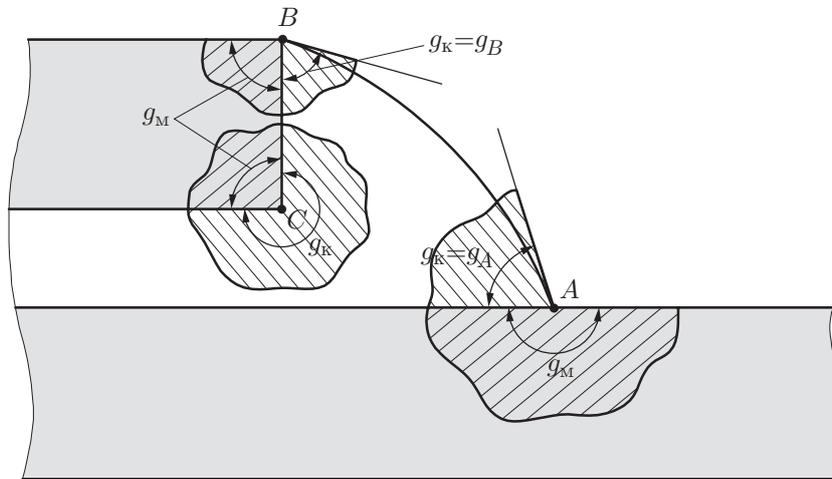


Рис. 3. Составные клинья с вершиной в особых точках

равным  $45^\circ$ . В работе [11] исследованы восемь геометрий выжимок, среди которых наиболее существенное уменьшение максимальных значений напряжений обеспечивает форма, образованная дугой окружности с центром и радиусом, при которых углы сопряжения равны  $g_A = g_B = 0^\circ$  (рис. 2). Следует отметить, что эта форма является достаточно технологичной в реализации. В настоящей работе форма свободной поверхности клеевой выжимки также выбрана в виде дуги окружности с центром, что позволяет получить различные углы  $g_A$  и  $g_B$  сопряжения внешней поверхности клея с поверхностью соединяемых материалов в точках *A* и *B*.

При оценке напряженных состояний, полученных методом конечных элементов, представляют интерес данные о характере сингулярности напряжений в особых точках. Эти данные могут быть получены при анализе собственных решений для составных клиньев, образованных касательными в особых точках к поверхностям материала, клея и поверхности склеивания (рис. 3). В полярной системе координат с центром в вершине клина собственные решения имеют вид [1]

$$u_r(r, \varphi) = r^{\lambda_k} \xi_r^{(k)}(\varphi), \quad u_\varphi(r, \varphi) = r^{\lambda_k} \xi_\varphi^{(k)}(\varphi),$$

где  $r$  — расстояние от особой точки;  $\lambda_k$  — собственные значения;  $\xi_r^{(k)}(\varphi)$ ,  $\xi_\varphi^{(k)}(\varphi)$  — собственные формы;  $u_r(r, \varphi)$ ,  $u_\varphi(r, \varphi)$  — компоненты перемещений.

Процедура построения собственных решений для составного клина [13] включает нахождение собственных значений трансцендентных уравнений, которые могут быть представлены в виде следующих определителей:

$g_M + g_K < 2\pi$ :

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & m_K & 0 & -1 & 0 & -m_M & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n_K & 0 & -1 & 0 & -n_M \\ 1 & 0 & -p & 0 & -G & 0 & Gp & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -q & 0 & G & 0 & Gq \\ a_K & b_K & -pc_K & pd_K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_K & -a_K & qd_K & -qc_K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_M & -a_M & qd_M & -qc_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_M & -b_M & pc_M & pd_M \end{vmatrix} = 0; \quad (1)$$

$g_M + g_K = 2\pi$ :

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & m_K & 0 & -e & -f & -m_M e & m_M f \\ 0 & 1 & 0 & n_K & f & -e & -n_M f & -n_M e \\ 1 & 0 & -p & 0 & -Ge & -Gf & Gpe & -Gpf \\ 0 & -1 & 0 & -q & -Gf & Ge & Gqf & Gqe \\ a_M & b_M & m_K c_M & -m_K d_M & -a_M & -b_M & -m_M c_M & m_M d_M \\ -b_M & a_M & n_K d_M & n_K c_M & b_M & -a_M & -e_M d_M & -e_M c_M \\ -a_M & -b_M & pc_M & -pd_M & Ga_M & Gb_M & -Gpc_M & -Gpd_M \\ -b_M & a_M & qd_M & qc_M & Gb_M & -Ga_M & -Gqd_M & -Gqc_M \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $G = G_M/G_K$ ;  $G_M, G_K, \nu_M, \nu_K$  — модули сдвига и коэффициенты Пуассона материала и клея соответственно;  $g_M, g_K$  — углы составных клиньев, рад;  $p = \lambda + 1$ ;  $q = \lambda - 1$ ;  $a_i = \cos(\lambda + 1)g_i$ ;  $b_i = \sin(\lambda + 1)g_i$ ;  $c_i = \cos(\lambda - 1)g_i$ ;  $d_i = \sin(\lambda - 1)g_i$ ;  $e = \cos 2\pi\lambda$ ;  $f = \sin 2\pi\lambda$ ; для плоскодеформированного состояния  $m_i = 3 - 4\nu_i + \lambda$ ,  $n_i = 3 - 4\nu_i - \lambda$ ; величины с индексом м соответствуют материалу, с индексом к — клею (см. рис. 3).

Из соотношений (1), (2) следует, что собственные значения зависят от величин углов  $g_M, g_K$  и механических характеристик  $\nu_M, \nu_K, G = G_M/G_K$ . При этом значения  $\lambda_k$  с действительной частью  $0 < \operatorname{Re} \lambda_k < 1$  соответствуют сингулярным решениям и определяют характер изменения напряжений в окрестностях особых точек.

Рассмотрим примеры распределения напряжений в клеевом слое при различном характере сингулярности напряжений в окрестностях особых точек. Свободная поверхность клеевой выжимки имеет форму дуги окружности с углами сопряжения внешней поверхности клея и поверхности склеиваемых материалов  $g_A = g_B = g$ .

Параметры клеевого соединения взяты из работы [11]. Модули упругости и коэффициенты Пуассона материала пластин и клея имеют следующие значения:  $E_M = 1,567 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_M = 0,46$ ,  $E_K = 3,81 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_K = 0,48$ , толщина пластины  $t_M = 2,54$  мм, толщина слоя клея  $t_K = 0,762$  мм. Длина участка нахлестки  $l_H$  для соединения без выжимки составляет 12,7 мм (см. рис. 1,а), для соединения с выжимкой  $l_{H,B} = 16$  мм (см. рис. 1,б). В этих вариантах при  $g = 0^\circ$  радиус окружности равен  $l_{H,B} - l_H$ , при  $g = 45^\circ$  он равен бесконечности либо имеет место треугольная форма клеевой выжимки. Клеевое соединение находится под действием растягивающего усилия  $P = 445$  Н.

На рис. 4 приведены распределения интенсивности напряжений  $\sigma_H$  по поверхности клеевого соединения в окрестностях точек  $A, B, C$  при различных значениях угла  $g$  ( $s$  — координата, направленная по поверхности склеивания от точки  $B$  через точку  $C$  до точки  $A$  при наличии клеевой выжимки и от точки  $B$  до точки  $A$  при прямом торце).

В таблице приведены значения  $\lambda_1$ , определяющие характер сингулярности напряжений в особых точках  $A, B$  для рассматриваемых материалов. Следует отметить, что в точке  $A$  сингулярность напряжений отсутствует только при  $g = 0^\circ$ , а в точке  $B$  — при

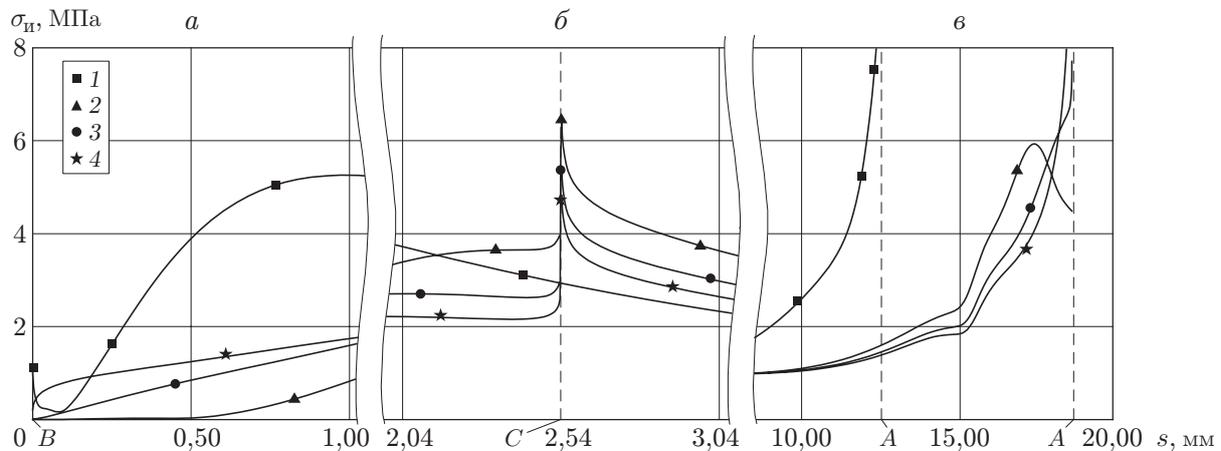


Рис. 4. Распределение интенсивности напряжений  $\sigma_{II}$  по поверхности клевого соединения в окрестностях точек  $B$  ( $a$ ),  $C$  ( $b$ ),  $A$  ( $v$ ) для различных углов сопряжения внешней поверхности клея и поверхности склеиваемого материала: 1 — без клеевой выжимки (прямой торец,  $g = 90^\circ$ ); 2–4 — с клеевой выжимкой (2 —  $g = 0^\circ$ , 3 —  $g = 22,1^\circ$ , 4 —  $g = 45^\circ$ )

Значения первого собственного числа

Точка	$\lambda_1$			
	$g = 90^\circ$	$g = 0^\circ$	$g = 22,1^\circ$	$g = 45^\circ$
$A$	0,58	1,00	0,93	0,81
$B$	0,81	2,74	2,25	1,24

$g = 0; 22,1; 45^\circ$ . При наличии клеевой выжимки внутри рассматриваемой области появляется точка  $C$ , в которой также имеет место сингулярность напряжений. Для рассматриваемых значений механических характеристик материала и клея показатель сингулярности напряжений в этой точке равен 0,88.

Результаты численного анализа, представленные на рис. 4, подтверждают предположение о том, что при наличии сингулярности в окрестности особой точки имеет место концентрация напряжений. Действительно, для вариантов  $g = 0; 22,1; 45^\circ$  при приближении к точке  $B$  напряжения стремятся к нулю. Для варианта  $g = 90^\circ$  в окрестности точки  $B$  имеет место концентрация напряжений. При этом величина напряжений в точке  $B$  определяется степенью дискретизации расчетной области. При уменьшении размеров конечных элементов напряжения асимптотически стремятся к бесконечности, что свидетельствует о наличии сингулярного решения. При наличии клеевой выжимки в окрестности точки  $C$  всегда имеет место концентрация напряжений. Во всех рассмотренных случаях, за исключением варианта  $g = 0^\circ$ , окрестность точки  $A$  также является зоной концентрации напряжений. При этом чем меньше показатель сингулярности напряжений, тем больше концентрация напряжений. При  $g = 0^\circ$  в точке  $A$  напряжения имеют конечные значения, что соответствует значению показателя сингулярности напряжений  $\lambda = 1$ .

Следует отметить, что в работах [6–8, 11] для определения лучшего варианта геометрии клеевой выжимки сравнение проводилось по напряжениям в точке  $A$  или  $B$ , полученным методом конечных элементов. При наличии сингулярности напряжений такой анализ не вполне корректен, так как в этом случае значения напряжений, полученные в особых точках, определяются степенью конечно-элементной дискретизации.

**2. Определение оптимальной геометрии клеевой выжимки в клеевых соединениях внахлестку.** В работах [14, 15] показано, что в окрестностях особых точек оптимальные с точки зрения уменьшения концентрации напряжений геометрии обладают общим свойством, которое заключается в следующем: параметры оптимальных геометрий в окрестностях особых точек (углы  $g_M, g_K$ ) и механические характеристики материала ( $\nu_M, \nu_K, G = G_M/G_K$ ) определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности.

Используем данное свойство оптимальных геометрий при выборе оптимального варианта дуги окружности, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . В данном случае рассмотрение ограниченного класса поверхностей при выборе оптимальной геометрии не имеет принципиального значения и может быть обосновано технологией изготовления клеевого соединения.

Анализ собственных значений в уравнении (1) при  $g_M = 180^\circ$  показывает, что для всех  $g_A > 0^\circ$  имеют место собственные значения с  $0 < \text{Re } \lambda_1 < 1$ . Согласно свойству оптимальных геометрий в окрестностях особых точек при оптимальном выборе дуги окружности угол сопряжения свободной поверхности клеевого слоя и поверхности склеиваемого материала в точке  $A$  должен быть равен нулю. В особой точке  $B$  для рассматриваемых характеристик материалов при  $g_B < 63^\circ$  все собственные значения имеют действительные части, большие единицы, при  $g_B > 63^\circ$  появляются собственные значения с  $0 < \text{Re } \lambda_1 < 1$ , соответствующие сингулярным решениям. Следовательно, в точке  $B$  оптимальный угол  $g_B = 63^\circ$ . В соответствии с уравнением (2) для точки  $C$  сингулярные решения отсутствуют только при  $g_M = g_K = 180^\circ$ , но в случае соединения внахлестку данный вариант не имеет смысла. В работе [12] предлагается скругление внутреннего прямого угла в точке  $C$ . В [12] и настоящей работе радиус скругления равен толщине пластины.

На рис. 5 приведено распределение интенсивности напряжений  $\sigma_{II}$  по поверхности склеивания при  $g_A = 0^\circ, g_B = 63^\circ$  в случае наличия скругления в точке  $C$ , а также распределение  $\sigma_{II}$  для варианта внешней поверхности клеевой выжимки с углами сопряжения  $g_A = g_B = 9,3^\circ$ , который согласно [11] обеспечивает наименьшую концентрацию напряжений. В отличие от [11] в настоящей работе добавлено скругление прямого угла в точке  $C$ . Анализ результатов показывает, что для полученной оптимальной геометрии напряжения в окрестностях особых точек существенно меньше, чем для геометрий клеевых выжимок, рассмотренных в работах [6–9, 11, 12].

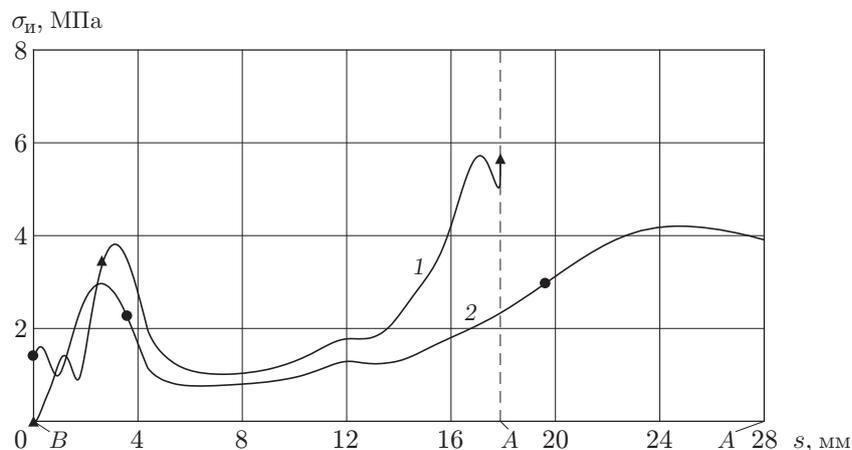


Рис. 5. Распределение интенсивности напряжений  $\sigma_{II}$  по поверхности клеевого соединения:

1 — вариант геометрии клеевой выжимки из [11] ( $g_A = g_B = 9,3^\circ$ ), 2 — оптимальный вариант геометрии клеевой выжимки ( $g_A = 0^\circ, g_B = 63^\circ$ )

**3. Выводы.** Рассмотрена задача определения геометрической формы клеевой выжимки, обеспечивающей минимальную концентрацию напряжений. Полученные результаты показывают, что для рассматриваемого класса поверхностей для обеспечения оптимального по напряжениям клеевого соединения в окрестностях особых точек должен быть выбран тот вариант геометрии клеевого излишка, который определяет границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности. Достаточно близкими к оптимальному варианту являются геометрические формы, для которых отсутствуют сингулярные решения.

Результаты оптимизации геометрии клеевого соединения внахлестку могут быть применены также в тех случаях, когда на поверхность тела выходит граница соединения двух материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Williams M. L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* 1952. V. 19, N 4. P. 526–528.
2. **Партон В. З.** Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. М.: Наука, 1981.
3. **Матвеев В. П.** Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 1995. № 5. С. 71–77.
4. **Матвеев В. П., Накарякова Т. О., Севодина Н. В. и др.** Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // *Прикл. математика и механика.* 2008. Т. 72, вып. 3. С. 487–494.
5. **Adams R. D., Peppiatt N. A.** Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // *J. Strain Anal. Engng.* 1974. V. 9, N 3. P. 185–196.
6. **Crocombe A. D., Adams R. D.** Influence of the spew fillet and other parameters on the stress distribution in the single lap joint // *J. Adhes.* 1981. V. 13. P. 141–155.
7. **Adams R. D., Atkins R. W., Harris J. A., et al.** Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic/steel double-lap joints // *J. Adhes.* 1986. V. 20. P. 29–53.
8. **Adams R. D., Harris J. A.** The influence of local geometry on the strength of adhesive joints // *Intern. J. Adhesion Adhesives.* 1987. V. 2, N 1. P. 69–80.
9. **Dorn L., Liu W.** The stress state and failure properties of adhesive-bonded plastic/metal joints // *Intern. J. Adhesion Adhesives.* 1993. V. 13, N 1. P. 21–31.
10. **Tsai M. Y., Morton J.** The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints // *Compos. Struct.* 1995. V. 32. P. 123–131.
11. **Lang T. P., Mallick P. K.** Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints // *Intern. J. Adhesion Adhesives.* 1998. V. 18, N 1. P. 167–177.
12. **Zhao X., Adams R. D., da Silva L. F. M.** Single lap joints with rounded adherend corners: stress and strain analysis // *J. Adhes. Sci. Technol.* 2011. V. 25, N 8. P. 819–836.
13. **Минакова С. Г.** Анализ сингулярности напряжений в точке поверхности, где имеет место контакт разнородных упругих материалов, при некоторых углах раствора клиньев, образующих зону контакта // *Напряжения и деформации в конструкциях и материалах.* Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1985. С. 69–72.
14. **Matveyenko V. P., Borzenkov S. M.** Semianalytical singular element and its application to stress calculation and optimization // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 1996. V. 39, N 10. P. 1659–1680.
15. **Матвеев В. П., Федоров А. Ю.** Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // *Вычисл. механика сплош. сред.* 2011. Т. 4, № 4. С. 63–70.

*Поступила в редакцию 13/ХІІ 2012 г.,  
в окончательном варианте — 7/ІІІ 2013 г.*