УДК 539.375

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЭНЕРГИИ В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ, СОДЕРЖАЩИХ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРЕЩИНЫ

Е. М. Рудой

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: rem@hydro.nsc.ru

Рассматриваются уравнения двумерной теории упругости в негладких областях. Области содержат криволинейные трещины, длина которых может меняться. На берегах трещин задаются условия в виде неравенств, описывающих взаимное непроникание берегов трещин. Доказана сходимость решений задач равновесия с возмущенной трещиной к решению задачи равновесия с невозмущенной трещиной в соответствующем пространстве. Получена производная функционала энергии по длине криволинейной трещины.

Ключевые слова: упругость, трещина, критерий Гриффитса, вариационное неравенство, производная функционала энергии, негладкая область.

Введение. В работе исследуется задача о равновесии упругого тела в рамках двумерной теории упругости. Тело содержит криволинейную трещину, на берегах которой задаются условия непроникания в виде системы равенств и неравенств. Тело изготовлено из однородного анизотропного материала, подчиняющегося закону Гука. Считается, что на внешней границе выполнены однородные краевые условия.

Рассматриваются математические вопросы теории трещин и, в частности, теории разрушения, в которой широко используется энергетический критерий Гриффитса. В соответствии с этим критерием развитие (распространение) трещины начинается тогда, когда производная функционала энергии по длине трещины достигнет критической величины 2γ, которая характеризуется физико-механическими свойствами материала.

В работе получена формула производной функционала энергии по параметру, характеризующему длину криволинейной трещины, на берегах которой задаются условия непроникания в виде системы равенств и неравенств. При этом установлена сильная сходимость решения задачи равновесия в возмущенной области к решению задачи равновесия в невозмущенной области.

В настоящее время имеется большое количество работ, в которых изучена зависимость решений эллиптических уравнений от параметров для различных возмущений областей. Случай гладких областей рассмотрен в [1]. Результаты, относящиеся к дифференцированию функционалов энергии для линейных краевых задач в негладких областях, можно найти в [2, 3].

Впервые производная функционалов энергии для нелинейных эллиптических задач с условиями в виде неравенств на границе была получена в [4]. При этом метод получения производной, описанный в [4], позволяет избежать вычисления краевых условий для материальной производной от решения, которая, вообще говоря, определяется неоднознач-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00124).

но. Затем были получены аналогичные производные для различных задач теории упругости [5–10] с использованием вариационных постановок [11]. При этом предполагалось, что трещины являются прямолинейными, либо накладывались дополнительные условия на возмущение области, при которых множество допустимых смещений точек тела для невозмущенной задачи переходит взаимно однозначно в множество допустимых смещений точек тела для возмущенной задачи равновесия.

С помощью полученных формул были выведены инвариантные интегралы типа Черепанова — Райса [4, 5, 10]. Такой интеграл определяет скорость высвобождения энергии при квазистатическом росте трещины и используется в механике разрушения при описании роста трещины. В работе [12] представлено математическое обоснование инвариантного интеграла для линейных задач.

В [10] рассмотрена задача о равновесии тела, состоящего из двух однородных анизотропных тел, на общей границе которых находится криволинейная трещина со свободными от напряжений берегами, и получена формула для производной функционала энергии по параметру, характеризующему изменение длины трещины. Для нахождения производной функционала энергии строилась замена координат, переводящая возмущенную область в невозмущенную взаимно однозначно. Так как на границе области заданы естественные краевые условия в виде равенств, то при такой замене координат пространство допустимых смещений с возмущенной областью отображается на пространство допустимых смещений с невозмущенной областью также взаимно однозначно, что существенно использовалось при выводе формулы для производной. Если же на границе области задавать краевые условия с односторонними ограничениями, то такой взаимной однозначности между пространствами допустимых смещений не будет.

Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей Γ, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Предположим, что область Ω делится кривой Σ на две подобласти Ω_1 и Ω_2, т. е. $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{\Sigma}$. При этом границы областей Ω_1 и Ω_2 также являются кусочно-гладкими. Кривая Σ на плоскости (x_1, x_2) задается функцией $\psi \in H^3(-l_0, l_1)$ так, что $\Sigma = \{x_2 = \psi(x_1),\ -l_0 < x_1 < l_1\}$, $l_0 > 0$, $l_1 > 0$. Трещина Γ_l, лежащая внутри области Ω, описывается частью кривой Σ:

$$\Gamma_l = \{x_2 = \psi(x_1), \quad 0 < x_1 < l\}, \qquad 0 < l < l_1,$$

где l — параметр, определяющий длину проекции Γ_l на ось x_1.

Пусть вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) = (-\psi_{x_1}, 1)/\sqrt{1 + \psi_{x_1}^2}$ является вектором нормали к кривой Σ. Считаем, что берег Σ^+ соответствует положительному направлению нормали, Σ^- — отрицательному.

Обозначим через Ω_0 область, ограниченную Γ, $\overline{\Gamma}_l^+$ и $\overline{\Gamma}_l^-$, т. е. $\Omega_0 = \Omega \backslash \overline{\Gamma}_l$. Задача равновесия будет рассматриваться в области Ω_0, имеющей негладкую границу $\Gamma \cup \Gamma_l^+ \cup \Gamma_l^-$.

Введем вектор перемещений $\boldsymbol{W} = (u_1, u_2)$. Предполагаем, что тело изготовлено из однородного упругого материала, который подчиняется закону Гука. Запишем формулы для компонент тензоров деформаций и напряжений

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \qquad \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{W}), \qquad i, j = 1, 2$$

с симметричным и положительно-определенным тензором коэффициентов упругости $\{c_{ijkl}\}$, т. е. $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$, $c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0\xi_{ij}\xi_{ij}$, $c_0 > 0$, $\xi_{ij} = \xi_{ji}$. Для простоты вычислений будем полагать, что c_{ijkl} — константы.

Считаем, что на внешней границе выполнены следующие краевые условия:

$$\boldsymbol{W} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1}$$

Условия (1) соответствуют условию защемления на внешней границе.

Пусть $\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W})$ — функционал потенциальной энергии тела:

$$\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{W}.$$

Здесь $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ — заданный вектор внешних сил, $\boldsymbol{f} \in [C^1(\overline{\Omega})]^2$.

Определим функциональное пространство, в котором будет исследоваться задача равновесия. Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_0)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_0)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Обозначим через $H(\Omega_0)$ декартово произведение двух таких подпространств: $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Следует отметить, что функции из $H(\Omega_0)$ могут принимать, вообще говоря, различные значения на берегах трещины Γ_l^+ и Γ_l^-.

Для того чтобы предотвратить проникание берегов трещины друг в друга, будем рассматривать следующее условие типа Синьорини:

$$[\boldsymbol{W}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_l. \tag{2}$$

Здесь $[\boldsymbol{W}] = \boldsymbol{W}^+ - \boldsymbol{W}^-$ ($\boldsymbol{W}^+$, $\boldsymbol{W}^-$ — значения функции $\boldsymbol{W}$ на положительном и отрицательном берегах разреза Γ_l соответственно). Следует отметить, что условие (2) инвариантно относительно выбора направления нормали $\boldsymbol{\nu}$, так как при изменении направления на $-\boldsymbol{\nu}$ значение скачка $[\,\cdot\,]$ на берегах трещины также меняет знак.

Введем множество допустимых смещений

$$K_0(\Omega_0) = \{\boldsymbol{W} \in H(\Omega_0) \mid [\boldsymbol{W}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_l\},$$

которое включает условия (1) на внешней границе Γ и условие (2) непроникания берегов трещины. Задачу о равновесии тела сформулируем как задачу минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W})$ на множестве допустимых смещений $K_0(\Omega_0)$:

$$\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0) = \inf_{\boldsymbol{W} \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}). \tag{3}$$

Так как $\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W})$ — слабо полунепрерывный снизу и коэрцитивный функционал, $K_0(\Omega_0)$ — замкнутое и выпуклое множество, $H(\Omega_0)$ — гильбертово пространство, то существует решение $\boldsymbol{W}_0 \in K_0(\Omega_0)$ задачи (3), которое является единственным и, в силу того, что функционал $\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W})$ — выпуклый и дифференцируемый, удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_0) \geqslant \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{W} \in K_0(\Omega_0). \tag{4}$$

Вариационное неравенство (4) эквивалентно задаче минимизации (3) [11].

Заметим, что решение задачи (3) в области Ω_0 удовлетворяет уравнениям равновесия

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)}{\partial x_j} = f_i, \qquad i = 1, 2 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_0, \tag{5}$$

граничному условию (1), условию непроникания (2) и краевым условиям на трещине Γ_l

$$[\sigma_\nu(\boldsymbol{W}_0)] = 0, \quad \sigma_\nu(\boldsymbol{W}_0) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{W}_0) = 0, \quad \sigma_\nu(\boldsymbol{W}_0)[\boldsymbol{W}_0] \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \tag{6}$$

которым можно придать точный смысл в пространстве $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_l))^*$, где $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_l))^*$ — сопряженное пространство к $H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)$ [11]. Операторы $\sigma_\nu(\boldsymbol{W})$ и $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{W}) = (\sigma_{\tau 1}(\boldsymbol{W}), \sigma_{\tau 2}(\boldsymbol{W}))$ обозначают нормальные напряжения и касательную компоненту вектора сил на Γ_l соответственно и определяются по формулам

$$\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\nu_j\} = \sigma_\nu(\boldsymbol{W})\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{W}).$$

Далее рассмотрим семейство областей с трещинами, зависящее от малого параметра δ. Определим множество

$$\Gamma_{l+\delta} = \{x_2 = \psi(x_1),\ 0 < x_1 < l + \delta\}, \qquad 0 < l + \delta < l_1,$$

характеризующее возмущение трещины Γ_l вдоль кривой Σ. Обозначим через $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_{l+\delta}$ область с трещиной $\Gamma_{l+\delta}$. Определим функционал потенциальной энергии тела, занимающего возмущенную область Ω_δ, в виде

$$\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{W}.$$

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\delta)$. Введем множество допустимых смещений точек тела, занимающего возмущенную область Ω_δ, формулой

$$K_\delta(\Omega_\delta) = \{\boldsymbol{W} \in H(\Omega_\delta) \mid [\boldsymbol{W}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_{l+\delta}\}.$$

В области Ω_δ сформулируем задачу равновесия как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$:

$$\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) = \inf_{\boldsymbol{W} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}), \tag{7}$$

которая, в свою очередь, эквивалентна вариационному неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}^\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^\delta) \geqslant \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^\delta) \qquad \forall\, \boldsymbol{W} \in K_\delta(\Omega_\delta)$$

и имеет единственное решение $\boldsymbol{W}^\delta \in K_\delta(\Omega_\delta)$ в силу тех же соображений, что и для задачи (3).

Основная цель настоящей работы — найти производную функционала энергии по параметру возмущения области Ω_0, который характеризует изменение длины трещины Γ_l, т. е. вычислить предел

$$G = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta},$$

где $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}^\delta$ — решения задач равновесия в невозмущенной и возмущенной областях соответственно. Величина G характеризует скорость высвобождения энергии при квазистатическом росте трещины. Согласно критерию Гриффитса [13, 14] трещина начнет распространяться, когда G достигнет некоторого критического значения 2γ, характерного для материала, из которого изготовлено тело. Величина γ определяет поверхностную энергию, приходящуюся на единицу свободной поверхности тела, в нашем случае — на единицу длины трещины.

Вспомогательные утверждения и формулы. Следуя [4, 8], введем отображение возмущенной области Ω_δ на исходную область Ω_0. Пусть $B_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ — шар радиуса $\epsilon > 0$ с центром, расположенным в вершине трещины $(l, \psi(l))$. Будем считать, что ϵ достаточно мало́, так что $\overline{B}_\epsilon \subset \Omega$ и вторая вершина трещины $(0, \psi(0))$ лежит вне замкнутого шара $\overline{B}_\epsilon$. Возьмем гладкую срезающую функцию θ такую, что $\operatorname{supp}\theta \subset B_\epsilon$ и $\theta \equiv 1$ в $B_{\epsilon/2}$. Для достаточно малых $\delta < \epsilon/2$, таких, что $(l + \delta, \psi(l + \delta)) \in B_\epsilon$ (такое включение возможно в силу гладкости функции ψ), рассмотрим преобразование независимых переменных

$$y_1 = x_1 - \delta\theta(x_1, x_2), \qquad y_2 = x_2 + \psi(x_1 - \delta\theta(x_1, x_2)) - \psi(x_1) \tag{8}$$
$$((y_1, y_2) \in \Omega_0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_\delta),$$

которое отображает возмущенную область Ω_δ на невозмущенную область Ω_0 взаимно однозначно. Функциональная матрица преобразования

$$A = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 - \delta\theta_{,1}(\boldsymbol{x}) & (1 - \delta\theta_{,1}(\boldsymbol{x}))\psi'(x_1 - \delta\theta(\boldsymbol{x})) - \psi'(x_1) \\ -\delta\theta_{,2}(\boldsymbol{x}) & 1 - \delta\theta_{,2}(\boldsymbol{x})\psi'(x_1 - \delta\theta(\boldsymbol{x})) \end{pmatrix}$$

($\psi'(t) = d\psi(t)/dt$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$) имеет якобиан

$$J_\delta = 1 - \delta\,\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}, \qquad \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} + \psi'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

который строго положителен при малых δ. Производная $\partial/\partial\boldsymbol{\tau}$ обозначает дифференцирование вдоль кривой Σ, где $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1)$ — касательный вектор к Σ.

Так как пространство $H^3(-l_0, l_1)$ вложено в $C^2[-l_0+\delta_1, l_1-\delta_1]$, где $\delta_1 > 0$ — достаточно малая величина [15], то в окрестности B_ϵ справедливы следующие формулы Тейлора:

$$\psi'(x_1 \pm \delta\theta(\boldsymbol{x})) = \psi'(x_1) \pm \delta\theta(\boldsymbol{x})\psi''(x_1) + R_\pm(\delta, \boldsymbol{x}), \tag{9}$$

где $R_\pm = o(\pm\delta\theta(\boldsymbol{x}))$ — дополнительные члены в форме Пеано [16]. В силу гладкости θ и ψ имеют место сходимости

$$\frac{R_\pm(\delta, \boldsymbol{x})}{\delta} \to 0 \qquad \text{сильно в} \quad L_\infty(\Omega), \tag{10}$$

и, кроме того, $R_\pm(\delta, \cdot\,) \in H^1(\Omega)$.

В силу (9) функциональная матрица A допускает представление

$$A = I - \delta \begin{pmatrix} \theta_{,1}(\boldsymbol{x}) & \theta(\boldsymbol{x})\psi''(x_1) + \theta_{,1}(\boldsymbol{x})\psi'(x_1) \\ \theta_{,2}(\boldsymbol{x}) & \theta_{,2}(\boldsymbol{x})\psi'(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & R_1(\delta, \boldsymbol{x}) \\ 0 & R_2(\delta, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} R_1(\delta, \boldsymbol{x}) = R_-(\delta, \boldsymbol{x}) - \delta^2\theta(\boldsymbol{x})\theta_{,1}(\boldsymbol{x})\psi''(x_1) + \delta\theta_{,1}(\boldsymbol{x})R_-(\delta, \boldsymbol{x}), \\ R_2(\delta, \boldsymbol{x}) = \delta^2\theta_{,2}(\boldsymbol{x})\psi''(x_1) - \delta R_-(\delta, \boldsymbol{x}). \end{gathered} \tag{12}$$

Из (10) и предполагаемой гладкости функций θ и ψ очевидно, что функции R_i $(i = 1, 2)$ равномерно ограничены по δ, $\boldsymbol{x}$ при малых δ и $R_i = o(\delta)$.

Так как при преобразовании независимых переменных (8) область Ω_δ отображается на область Ω_0 взаимно однозначно, то существует обратное преобразование $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\delta, \boldsymbol{y})$, отображающее область Ω_0 на область Ω_δ. Обозначим через $\tilde{u}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in \Omega_0$ преобразованную функцию $u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_\delta$, т. е. $\tilde{u}(\boldsymbol{y}) = \tilde{u}(x_1 - \delta\theta(\boldsymbol{x}), x_2 + \psi(x_1 - \delta\theta(\boldsymbol{x})) - \psi(x_1)) \equiv u(\boldsymbol{x})$. Используя (11), можно переписать формулы преобразования производных в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_1} - \delta\theta_{,1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_1} - \delta(\theta\varphi)_{,1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2} + R_1\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2} - \delta\theta_{,2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_1} - \delta(\theta\varphi)_{,2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2} + R_2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\varphi(x_1, x_2) = \psi'(x_1)$. Поэтому компоненты преобразованных тензоров деформаций и напряжений принимают вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) = \varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{W}}) - \delta E^\delta_{ij}(\theta; \tilde{\boldsymbol{W}}) + o(\delta)r_{ij}(\tilde{\boldsymbol{W}}), \\ \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) = c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\tilde{\boldsymbol{W}}) - \delta E^\delta_{kl}(\theta; \tilde{\boldsymbol{W}}) + o(\delta)r_{kl}(\tilde{\boldsymbol{W}})). \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь r_{ij} — некоторые непрерывные формы, которые можно выписать в точном виде по аналогии с формулами (12), используя (13). В (14) использовано обозначение

$$E_{ij}^{\delta}(\theta;\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\Big(\theta_{,j}^{\delta}\,\frac{\partial u_i}{\partial y_1} + \theta_{,i}^{\delta}\,\frac{\partial u_j}{\partial y_1} + (\theta\varphi)_{,j}^{\delta}\,\frac{\partial u_i}{\partial y_2} + (\theta\varphi)_{,i}^{\delta}\,\frac{\partial u_j}{\partial y_2}\Big),$$

где $\theta_{,i}^{\delta}(\boldsymbol{y}) = \theta_{,i}(\boldsymbol{x}(\delta,\boldsymbol{y}))$; $(\theta\varphi)_{,i}^{\delta}(\boldsymbol{y}) = (\theta\varphi)_{,i}(\boldsymbol{x}(\delta,\boldsymbol{y}))$; $i = 1, 2$. При этом справедливы следующие сходимости при $\delta \to 0$:

$$\theta_{,i}^{\delta} \to \theta_{,i} \qquad \text{сильно в} \quad L_\infty(\Omega_0),$$
$$(\theta\varphi)_{,i}^{\delta} \to (\theta\varphi)_{,i} \qquad \text{сильно в} \quad L_\infty(\Omega_0).$$

Применим преобразование независимых переменных (8) к интегралам, входящим в $\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W})$, и воспользуемся формулами (14). Тогда выполнено равенство $\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W}) = \Pi_\delta(\Omega_0;\tilde{\boldsymbol{W}})$ с

$$\Pi_\delta(\Omega_0;\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} J_\delta^{-1} c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{W}) - \delta E_{kl}^{\delta}(\theta;\boldsymbol{W}) + o(\delta) r_{kl}(\boldsymbol{W})) \times$$
$$\times (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - \delta E_{ij}^{\delta}(\theta;\boldsymbol{W}) + o(\delta) r_{ij}(\boldsymbol{W})) - \int\limits_{\Omega_0} J_\delta^{-1} \boldsymbol{f}^{\delta}\cdot\boldsymbol{W}, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{f}^{\delta}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\delta,\boldsymbol{y}))$. Множество допустимых смещений $K_\delta(\Omega_\delta)$ перейдет в множество $K_\delta(\Omega_0)$ взаимно однозначно:

$$K_\delta(\Omega_0) = \{\boldsymbol{W} \in H(\Omega_0) \mid [\boldsymbol{W}]\cdot\boldsymbol{\nu}^{\delta} \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_l\}.$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}^{\delta}$ — преобразованный вектор нормали $\boldsymbol{\nu}$, т. е. $\boldsymbol{\nu}^{\delta}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}(\delta,\boldsymbol{y}))$, $\boldsymbol{y} \in \Omega_0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_\delta$. Отметим, что вектор $\boldsymbol{\nu}^{\delta}$, вообще говоря, не совпадает с вектором нормали $\boldsymbol{\nu}$ к Γ_l. В случае прямолинейных трещин $\boldsymbol{\nu}^{\delta} = \boldsymbol{\nu} = \text{const}$ на Γ_l.

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *При достаточно малых δ решение $\boldsymbol{W}^{\delta}$ возмущенной задачи* (7), *отображенное на невозмущенную область Ω_0 с помощью преобразования* (8), *является единственным решением $\boldsymbol{W}_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$ задачи минимизации функционала $\Pi_\delta(\Omega_0;\boldsymbol{W})$ на множестве $K_\delta(\Omega_0)$. При этом последняя эквивалентна вариационному неравенству*

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\delta^{-1} c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{W}_\delta) - \delta E_{kl}^{\delta}(\theta;\boldsymbol{W}_\delta) + o(\delta) r_{kl}(\boldsymbol{W}_\delta))(\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) -$$
$$- \delta E_{ij}^{\delta}(\theta;\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) + o(\delta) r_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta)) \geqslant \int\limits_{\Omega_0} J_\delta^{-1} \boldsymbol{f}^{\delta}\cdot(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta), \qquad (16)$$

справедливому для всех функций $\boldsymbol{W}$ из множества $K_\delta(\Omega_0)$.

Подставляя $\boldsymbol{W} = 0$ и $\boldsymbol{W} = 2\boldsymbol{W}_\delta$ в качестве пробных функций в (16), складывая полученные неравенства и применяя неравенства Корна и Гёльдера, будем иметь равномерную оценку

$$\|\boldsymbol{W}_\delta\|_{H(\Omega_0)} \leqslant c \qquad (17)$$

при достаточно малых $\delta \geqslant 0$.

Сходимость решений. Используя гладкость функций ψ, $\boldsymbol{f}$, можно разложить операторы в задаче (16) в ряд по δ. Действительно, имеем

$$J_\delta^{-1} = 1 + \delta\,\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}} + o(\delta) \qquad \text{в} \quad \Omega_0; \qquad (18)$$

$$f_i^\delta = f_i + \delta\theta \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\tau}} + o(\delta) \quad \text{в} \quad \Omega_0, \qquad i = 1, 2. \tag{19}$$

Тогда из (18) и (19) следует

$$J_\delta^{-1} f_i^\delta = f_i + \delta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\theta f_i) + o(\delta) \quad \text{в} \quad \Omega_0, \qquad i = 1, 2. \tag{20}$$

Поэтому в силу (20) можно разложить в ряд по δ правую часть (16)

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\delta^{-1} \boldsymbol{f}^\delta (\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) = \int\limits_{\Omega_0} \Big(\Big(f_i + \delta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\theta f_i)\Big)(u_i - u_{i\delta}) + o(\delta) r_2(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}_\delta)\Big) \tag{21}$$

с некоторой непрерывной формой r_2.

Левая часть неравенства (16) допускает разложение в ряд по δ

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\delta^{-1} c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{W}_\delta) - \delta E_{kl}^\delta(\theta; \boldsymbol{W}_\delta) + o(\delta) r_{kl}(\boldsymbol{W}_\delta)) \times$$

$$\times (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) - \delta E_{ij}^\delta(\theta; \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) + o(\delta) r_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta)) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} \Big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) - \delta\Big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta) E_{ij}^\delta(\theta; \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) +$$

$$+ c_{ijkl} E_{kl}^\delta(\theta; \boldsymbol{W}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta) + \frac{\partial\theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_\delta)\Big) + o(\delta) r_3(\boldsymbol{W}; \boldsymbol{W}_\delta)\Big) \tag{22}$$

с непрерывной формой r_3.

Для доказательства теоремы о сходимости решений задач равновесия, определенных в возмущенных областях, понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\boldsymbol{W}_0 = (u_{10}, u_{20}) \in K_0(\Omega_0)$, $\boldsymbol{W}_\delta = (u_{1\delta}, u_{2\delta}) \in K_\delta(\Omega_0)$ *— решения задач* (4) *и* (16) *соответственно. Тогда справедливы следующие включения:*

$$\boldsymbol{W}_\delta^1 = \boldsymbol{W}_0 + \delta \boldsymbol{Q}_\delta^1 \in K_\delta(\Omega_0), \qquad \boldsymbol{W}_\delta^2 = \boldsymbol{W}_\delta - \delta \boldsymbol{Q}_\delta^2 \in K_0(\Omega_0),$$

где

$$\boldsymbol{Q}_\delta^1 = (0, \theta^\delta \psi'' u_{10} + (R_+^\delta/\delta) u_{10}), \qquad \boldsymbol{Q}_\delta^2 = (0, \theta^\delta \psi'' u_{1\delta} + (R_+^\delta/\delta) u_{1\delta}).$$

Доказательство. В силу гладкости функций ψ и θ, финитности θ и принадлежности u_{10} пространству $H^{1,0}(\Omega_0)$ очевидно, что функции $\boldsymbol{W}_\delta^1$ и $\boldsymbol{W}_\delta^2$ принадлежат пространству $H(\Omega_0)$. Покажем, что соответствующие условия на трещине Γ_l также выполняются.

Рассмотрим произвольную функцию $\boldsymbol{W} \in K_\delta(\Omega_0)$. Для нее выполнено условие

$$[\boldsymbol{W}] \cdot \boldsymbol{\nu}^\delta \geqslant 0 \qquad \text{п. в. на} \quad \Gamma_l. \tag{23}$$

Так как преобразование координат (8) отображает область Ω_δ на область Ω_0, то $x_1 = y_1 + \delta\theta^\delta(\boldsymbol{y})$, где $\theta^\delta(\boldsymbol{y}) = \theta(\boldsymbol{x}(\delta, \boldsymbol{y}))$; $\boldsymbol{y} \in \Omega_0$; $\boldsymbol{x} \in \Omega_\delta$. В силу (9) и того, что $\boldsymbol{\nu} = (-\psi_{,1}(x_1), 1)/\sqrt{1 + \psi_{,1}^2(x_1)}$, условие (23) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$-\psi'(y_1)[u_1] + [u_2] - \delta\theta^\delta\psi''(y_1)[u_1] - R_+^\delta(\delta, \boldsymbol{y})[u_1] \geqslant 0 \qquad \text{п. в. на} \quad \Gamma_l. \tag{24}$$

Для функции $\boldsymbol{W}_\delta^1$ из (24) получим

$$-\psi'[u_{10}] + [u_{20}] + \delta\theta^\delta\psi''[u_{10}] + R_+^\delta[u_{10}] - \delta\theta^\delta\psi''[u_{10}] - R_+^\delta[u_{10}] = -\psi'[u_{10}] + [u_{20}].$$

Так как $\boldsymbol{W}_0 \in K_0(\Omega_0)$, то

$$-\psi'[u_{10}] + [u_{20}] \geqslant 0 \qquad \text{п. в. на} \quad \Gamma_l. \tag{25}$$

Так как $\boldsymbol{W}_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$, для функции $\boldsymbol{W}_\delta^2$ из (25) получим

$$\psi'[u_{1\delta}] + [u_{2\delta}] - \delta\theta^\delta\psi''[u_{1\delta}] - R_+^\delta[u_{1\delta}] \geqslant 0 \qquad \text{п. в. на} \quad \Gamma_l.$$

Лемма доказана.

Докажем теорему о сходимости решений задач равновесия, определенных в возмущенных областях.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{W}_0$ *— решение невозмущенной задачи* (3), $\boldsymbol{W}^\delta$ *— решение возмущенной задачи* (7), $\boldsymbol{W}_\delta(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{W}^\delta(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y} \in \Omega_0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_\delta$. *Тогда справедлива следующая сходимость при* $\delta \to 0$*:*

$$\boldsymbol{W}_\delta \to \boldsymbol{W}_0 \qquad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0).$$

Доказательство. Функции $\boldsymbol{W}_0$ и $\boldsymbol{W}_\delta$ удовлетворяют вариационным неравенствам (4) и (16) соответственно. В силу леммы 2 в качестве пробной функции в (4) можно подставить $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_\delta^2$, а в качестве пробной функции в (16) — $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_\delta^1$. Применим формулы (21), (22) и сложим полученные неравенства. В результате имеем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0) \leqslant \delta\Big(\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{Q}_\delta^1) - \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{Q}_\delta^2) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta)E_{ij}^\delta(\theta; \boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0 - \delta\boldsymbol{Q}_\delta^1) - \int\limits_{\Omega_0} c_{ijkl}E_{kl}^\delta(\theta; \boldsymbol{W}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0 - \delta\boldsymbol{Q}_\delta^1) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,\sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0 - \delta\boldsymbol{Q}_\delta^1) + \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0) + \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Q}_\delta^2 - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Q}_\delta^1 -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \Big(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,(\theta f_i)(u_{i\delta} - u_{i0} - \delta\boldsymbol{Q}_{\delta i}^1)\Big) + o(\delta)r_4(\boldsymbol{W}_0 - \delta\boldsymbol{Q}_\delta^1, \boldsymbol{W}_\delta)\Big) \tag{26}$$

с некоторой ограниченной формой r_4.

В силу первого неравенства Корна левая часть неравенства (26) эквивалентна норме элемента $\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0$ в пространстве $H(\Omega_0)$. В правой части неравенства (26) интегралы при δ ограничены в силу (17). Таким образом, справедлива равномерная по δ оценка

$$\|\boldsymbol{W}_\delta - \boldsymbol{W}_0\|_{H(\Omega_0)} \leqslant c\delta.$$

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает очевидное следствие.

Следствие. *Справедливы следующие сходимости:*

$$\boldsymbol{Q}_\delta^1 \to \boldsymbol{Q}_0 \qquad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0),$$

$$\boldsymbol{Q}_\delta^2 \to \boldsymbol{Q}_0 \qquad \textit{сильно в} \quad H(\Omega_0),$$

$$E_{ij}^\delta(\theta; \boldsymbol{W}_0) \to E_{ij}(\theta; \boldsymbol{W}_0) \qquad \textit{сильно в} \quad L_2(\Omega_0),$$

$$E_{ij}^\delta(\theta; \boldsymbol{W}_\delta) \to E_{ij}(\theta; \boldsymbol{W}_0) \qquad \textit{сильно в} \quad L_2(\Omega_0),$$

где

$$\boldsymbol{Q}_0 = (0, \theta\psi''u_{10}), \qquad E_{ij}(\theta; \boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\Big(\theta_{,j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \theta_{,i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_1} + (\theta\varphi)_{,j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + (\theta\varphi)_{,i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_2}\Big). \tag{27}$$

Вывод формулы для производной функционала энергии по длине трещины. Для отыскания формулы производной функционала энергии по длине трещины будем использовать вариационные свойства решений задач равновесия в возмущенной и невозмущенной областях. Разложим функционал $\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W})$ в ряд по δ. Используя формулу (15) и учитывая (18), получаем

$$\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{W} -$$

$$- \delta \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) E^\delta_{ij}(\theta; \boldsymbol{W}) + \frac{1}{2} \delta \int\limits_{\Omega_0} \theta^\delta_{\boldsymbol{\tau}} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - \delta \int\limits_{\Omega_0} \Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_i) u_i + o(\delta) r_5(\boldsymbol{W}) \Big), \tag{28}$$

где r_5 — некоторая непрерывная форма.

Воспользуемся методом, предложенным в [4]. В силу леммы 1 справедливо равенство

$$\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) = \Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) \tag{29}$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$. Для того чтобы вычислить производную функционала энергии по длине трещины, необходимо найти предел

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta}. \tag{30}$$

Итак, в силу (29) и леммы 2 имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} = \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} \leqslant \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0 + \delta \boldsymbol{Q}^1_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} \leqslant \limsup_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0 + \delta \boldsymbol{Q}^1_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta}.$$

В силу следствия к теореме 1 и ограниченности формы r_5 из формулы (28) получаем

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0 + \delta \boldsymbol{Q}^1_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0 + \delta \boldsymbol{Q}^1_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0) E_{ij}(\theta; \boldsymbol{W}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_i) u_{i0} +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{Q}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{Q}_0.$$

В то же время справедливо соотношение

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} \geqslant \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta - \delta \boldsymbol{Q}^2_\delta)}{\delta},$$

и поэтому выполнено неравенство

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{W}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_0)}{\delta} \geqslant \liminf_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta - \delta \boldsymbol{Q}^2_\delta)}{\delta}.$$

Принимая во внимание теорему 1, следствие к ней и ограниченность формы r_5 из (28), находим

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta - \delta \boldsymbol{Q}^2_\delta)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{W}_\delta - \delta \boldsymbol{Q}^2_\delta)}{\delta} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,\sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)E_{ij}(\theta;\boldsymbol{W}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,(\theta f_i)u_{i0} +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Q}_0.$$

Получили, что нижний предел последовательности $\{1/\delta(\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W}^\delta) - \Pi(\Omega_0;\boldsymbol{W}_0))\}$ оценивается снизу той же константой, которой оценивается верхний предел этой последовательности сверху. Следовательно, предел (30) существует и равен этой константе.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W}^\delta)$ по длине проекции трещины Γ_l на ось x_1 существует и задается формулой*

$$\Pi'(l) = \frac{d\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W}^\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}\sigma_{ij}\,(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)E_{ij}(\theta;\boldsymbol{W}_0) -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,(\theta f_i)u_{i0} + \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{Q}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Q}_0, \qquad (31)$$

где $\boldsymbol{Q}_0$ и $E_{ij}(\theta;\boldsymbol{W}_0)$ определяются по формулам (27).

Замечание 1. Так как $\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W}^\delta)$ и $\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{W}_0)$ не зависят от срезающей функции θ, то производная $d\Pi(\Omega_\delta;\boldsymbol{W}^\delta)/d\delta\big|_{\delta=0}$ также не зависит от θ, несмотря на то, что θ входит в формулу (31). Это означает, что для двух различных функций θ_1 и θ_2 значения интегралов в (31) совпадают.

Замечание 2. Так как формула (31) задает производную функционала энергии по длине проекции трещины Γ_l на ось x_1, то производная функционала энергии по длине криволинейной трещины $\Pi'(s) = \Pi'(l)((\psi'(l))^2 + 1)^{-1/2}$, где $s = \int\limits_0^l \sqrt{(\psi'(t))^2 + 1}$ — длина трещины Γ_l.

Анализ полученной формулы. Как отмечалось выше, в работе [10] получена формула для производной функционала энергии в задаче равновесия тела с криволинейной трещиной, находящейся на стыке двух тел. Если предположить, что упругие свойства этих тел одинаковы, то получится постановка задачи, принятая в настоящей работе, с той разницей, что в [10] исследован случай трещины со свободными от напряжений берегами. При этом формула (31) отличается от аналогичной формулы в [10] двумя последними членами, а именно:

$$\Delta(\boldsymbol{W}_0) = \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{Q}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Q}_0.$$

Предположим, что внешняя нагрузка $\boldsymbol{f}$ подобрана таким образом, что на трещине Γ_l нет контакта, т. е. берега свободны от напряжений. Покажем, что в этом случае $\Delta(\boldsymbol{W}_0) = 0$.

Известно, что справедливо следующее утверждение (обобщенная формула Грина [11]).

Утверждение. *Если функция $\boldsymbol{U} \in H(\Omega_0)$, $\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{U}) \in L_2(\Omega_0)$, то существуют функционалы, определенные на Γ_l:*

$$\sigma_\nu(\boldsymbol{U}), \sigma_{\tau i}(\boldsymbol{U}) \in (H^{1/2}_{00})^*, \qquad i = 1, 2,$$

и для любой функции $\boldsymbol{V} = (v_1, v_2) \in [H^1(\Omega_0)]^2$ *справедлива формула*

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{V}) = -\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{U})v_i + \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{U}), v_\nu \rangle_{\Gamma_l} + \langle \sigma_{\tau i}(\boldsymbol{U}), v_{\tau i} \rangle_{\Gamma_l}, \tag{32}$$

где v_ν, $v_{\tau i}$ *— следы функции* $\boldsymbol{V}$ *на трещине* Γ_l *по нормали* $\boldsymbol{\nu}$ *и касательной* $\boldsymbol{\tau}$ *соответственно. Скобки* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\Gamma_l}$ *обозначают двойственность между пространствами* $H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)$ *и* $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_l))^*$.

Поскольку $\boldsymbol{f} \in [C^1(\overline{\Omega})]^2 \subset [L_2(\Omega_0)]^2$, в силу (5) можно заключить, что $\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{W}_0) \in L_2(\Omega_0)$, $i = 1, 2$. Поэтому воспользуемся формулой (32) с $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}_0 \in H(\Omega_0)$. В результате получим

$$\Delta(\boldsymbol{W}_0) = -\int\limits_{\Omega_0} \theta\psi'' u_{01}(\sigma_{2j,j} + f_2) + \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{W}_0), [Q_{0\nu}] \rangle_{\Gamma_l} + \langle \sigma_{\tau i}(\boldsymbol{W}_0), [Q_{0\tau i}] \rangle_{\Gamma_l}.$$

Так как берега трещины не контактируют, то $[\boldsymbol{W}_0] \cdot \boldsymbol{\nu} > 0$ на Γ_l, и поэтому в силу (6) имеем

$$\sigma_\nu(\boldsymbol{W}_0) = 0. \tag{33}$$

Учитывая уравнения равновесия (5), краевые условия на трещине (6) и равенство (33), получаем, что $\Delta(\boldsymbol{W}_0) = 0$.

В заключение сделаем ряд замечаний. Во-первых, если трещина Γ_l является прямолинейной, т. е. $\psi'' = 0$, то формула (31) совпадает с полученными ранее результатами для прямолинейных трещин с условием непроникания берегов [4–6].

Во-вторых, все результаты работы сохраняют силу для случая криволинейной трещины, представляющей собой разрез вдоль простой кусочно-гладкой разомкнутой кривой без точек самопересечений, которую можно продолжить до пересечения с границей области Ω под ненулевым углом. При этом в окрестности конца трещины $x_1 = l$, где происходит ее возмущение, форма трещины определяется уравнением $x_2 = \psi(x_1)$ $(x_1 \in [l - \delta_0, l + \delta_0]$, $\delta_0 > 0)$, а параметр возмущения $\delta \in [0, \delta_0)$. Так как исследуется поведение функционала энергии при $\delta \to 0$, то параметр δ_0 может быть весьма малым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sokolowski J., Zolesio J. P.** Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992.
2. **Ohtsuka K.** Mathematics of brittle fracture // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan. Hiroshima: Hiroshima-Denki Inst. of Technol., 1997. P. 99–172.
3. **Мазья В. Г., Назаров С. А.** Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
4. **Khludnev A. M., Sokolowski J.** The Griffith formula and the Rice — Cherepanov integral for crack problems with uniteral conditions in nonsmooth domains // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, N 4. P. 379–394.
5. **Ковтуненко В. А.** Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 109–123.
6. **Соколовский Я., Хлуднев А. М.** О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.

7. **Рудой Е. М.** Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5. С. 155–161.
8. **Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.** On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 99–109.
9. **Рудой Е. М.** Асимптотика интеграла энергии при возмущении границы // Динамика сплошных сред / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 97–103.
10. **Kovtunenko V. A.** Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // Z. angew. Math. Phys. 2003. V. 54. P. 410–423.
11. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
12. **Назаров С. А., Полякова О. Р.** Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 104–119.
13. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
14. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974.
15. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
16. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1.

Поступила в редакцию 12/I 2004 г.,
в окончательном варианте — 9/III 2004 г.