УДК 532.593+538.5.54+621.3.08

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ТОЛЩИНЫ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ НА РЕГИСТРИРУЕМЫЙ СИГНАЛ ИНДУКЦИОННОГО ДАТЧИКА МАССОВОЙ СКОРОСТИ

Ю. Н. Жугин, Ю. Л. Левакова

Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. Е. И. Забабахина, 456770 Снежинск

Рассмотрена задача о возмущении магнитного поля витка с постоянным током, расположенного над проводящей пластиной, приводимой в движение плоской ударной волной прямоугольного профиля. Показано, что по регистрируемой с помощью витка электродвижущей силе индукции можно определить не только скорость пластины, но и ее динамическую электропроводность. Получены приближенные расчетные зависимости для скорости пластины при известной ее электропроводности как для проводящего полупространства, так и для пластины с толщиной, сравнимой с толщиной скин-слоя. На основе сопоставления с экспериментальными данными и уточнения расчетных зависимостей сделан вывод о том, что предлагаемые в работе подходы могут быть использованы для определения электропроводности металлов в ударно-волновых процессах.

Введение. В [1] для регистрации кратковременных процессов, происходящих при ударном сжатии конденсированных сред, предложен индукционный датчик. На его основе в [2] разработан индукционный метод непрерывной регистрации скорости конденсированных сред в ударно-волновых процессах. Принцип действия индукционного датчика основан на осциллографической регистрации электродвижущей силы (ЭДС) индукции, возникающей в катушке (датчике) с постоянным током, расположенной над проводящей пластиной, после приведения пластины в движение ударной волной. Диаметр пластины, ее электропроводность и толщина (0,2–0,3 мм для меди и алюминия) достаточно велики. Изменение магнитного потока через контур датчика обусловлено нестационарными вихревыми токами, возникающими в меняющем свою толщину поверхностном слое металлической пластины (нестационарный скин-эффект). Экспериментально показано [2], что пластины достаточно большой толщины из меди и алюминия в интересующие нас интервалы времени лабораторного эксперимента в расчетах можно приближенно считать идеально проводящими. В то же время для свинца и висмута, обладающих существенно меньшими электропроводностями, это предположение неверно, и при получении соответствующих расчетных зависимостей необходимо учитывать конечность их электропроводности.

При использовании пластин с толщиной, меньшей толщины нестационарного скин-слоя, экспериментально наблюдается эффект диффузии магнитного поля через движущуюся пластину, проявляющийся в снижении амплитуды регистрируемого сигнала. При неизменной скорости пластины снижение тем больше, чем тоньше пластина и меньше ее электропроводность. Заметное снижение амплитуды регистрируемого сигнала наблюдается и в случае полупространства с электропроводностью, существенно меньшей, чем у алюминия и меди.

Электромагнитный метод измерения параметров ударно-сжатых сред, по физическим принципам близкий к индукционному методу, рассмотрен в [3]. В [3] также приведена формула, полученная методом изображений и позволяющая измерять массовую скорость

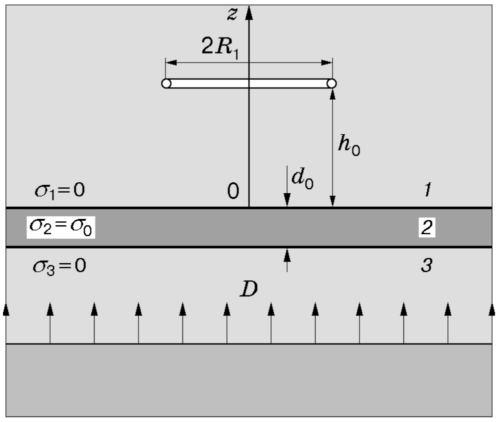

Рис. 1. Расчетная схема

и электропроводность металлических пленок с пренебрежимо малой толщиной в слоистой системе диэлектрик — пленка — диэлектрик. Однако экспериментальных данных в случае применения такой системы для измерения массовой скорости и электропроводности в работе [3] не представлено.

Цель настоящей работы состоит в получении (с использованием отличного от [3] подхода) расчетных зависимостей для ЭДС индукции, учитывающих конечность электропроводности металлических пластин различной толщины. Как отмечалось в [4], полное решение подобных задач невозможно без громоздких численных расчетов. Это обстоятельство обусловливает необходимость использования приближенных подходов, позволяющих учесть основные особенности взаимодействия движущихся проводников с электромагнитными полями, что удобно для решения прикладных задач.

1. Постановка задачи. Виток радиуса R_1 с пренебрежимо малым сечением провода подключен к стабилизированному источнику постоянного тока и расположен в конденсированной диэлектрической среде *1* на высоте h_0 над проводящей пластиной толщиной d_0 (среда *2*) с электропроводностью σ_0, во всем пространстве установилось стационарное магнитное поле (рис. 1). Магнитная проницаемость сред равна $\mu\mu_0$ ($\mu = 1$; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума).

По среде *3* снизу вверх с волновой скоростью D распространяется плоская ударная волна, фронт которой параллелен границе раздела сред. Взаимодействие движущегося ударно-сжатого диэлектрика с магнитным полем практически отсутствует [2, 5], если магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \mu_0\sigma u R_1 \ll 1$, что при массовой скорости $u = 5 \times 10^3$ м/с эквивалентно условию $\sigma \ll 10^4$ $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$. Для большинства конденсированных диэлектриков последнее условие выполняется в широком диапазоне значений давления ударного сжатия.

Задача о распространении ударной волны в неограниченном проводнике при наличии магнитного поля рассматривалась в [4, 6]. Показано, что при бесконечной проводимости металла магнитное поле перед ударной волной остается неизменным. В случае конечной проводимости ударная волна влияет на проводник перед ней в прилегающем слое толщиной $l \approx 1/(\mu_0\sigma D)$. Ширина электромагнитной волны в меди составляет 2,5 мкм ($D = 5\cdot 10^3$ м/с), в алюминии — 4 мкм, в свинце — 30 мкм. Очевидно, что для данных металлов виток практически не реагирует на движение ударной волны по проводнику вплоть до ее выхода на границу раздела сред *1* и *2*.

Известно, что характерное время, за которое затухает или диффундирует магнитное поле, $t \approx \mu_0\sigma\zeta^2$ (ζ — расстояние, на котором магнитное поле заметно изменяется) [5]. В данном случае изменение поля начинается с поверхности проводника. При распаде разрыва на границе сред *1* и *2* отраженная волна в проводнике (например, в меди) за время t

распространяется на толщину примерно $D_1 t$, а через время $t \geqslant \tau = 1/(\mu_0 \sigma D_1^2) \simeq 5 \times 10^{-4}$ мкс — уже на толщину $D_1 t \geqslant \zeta$.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ вся пластина сжимается в δ раз и в направлении витка приобретает массовую скорость u, обусловленную выходом ударной волны на границу раздела сред *1* и *2*. В экспериментах [2] с помощью индукционного датчика изучалось поведение металлов, находящихся под давлением $10 \div 20$ ГПа при значениях $\delta \simeq 1{,}1 \div 1{,}2$. Искажениями магнитного поля, обусловленными эффектами "вмороженности" магнитного поля в проводник с высокой электропроводностью, можно пренебречь, т. е. считать, что магнитное поле в сжатом металле при $t = +0$ определяется начальным магнитным полем витка с постоянным током.

Для решения поставленной задачи используется цилиндрическая система координат, связанная с поверхностью проводника (рис. 1). В этой системе координат виток с постоянным током приближается к границе раздела сред *1* и *2* со скоростью u, обусловливая тем самым переменность магнитного поля на поверхности проводника и как следствие возникновение в поверхностном слое нестационарных концентрических вихревых токов. Они вызывают изменение поля в среде *1* и появление в витке ЭДС индукции, зависящей от скорости движения проводника, его электропроводности и толщины пластины (достаточно малой).

2. Уравнение Гельмгольца для вектор-потенциала электромагнитного поля. *Квазистационарное поле.* В случае переменных полей для неподвижных, однородных и изотропных сред с постоянными по объему значениями ε, μ, σ уравнение Гельмгольца (при использовании системы единиц СИ) имеет вид

$$\Delta \boldsymbol{A} - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \boldsymbol{j}_{(e)},$$

где $\boldsymbol{A}$ — вектор-потенциал электромагнитного поля; $\boldsymbol{j}_{(e)}$ — плотность сторонних токов; t — время; ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; σ — ее электропроводность; ε_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума [7]. Поле датчика в диэлектрике считаем квазистационарным в том смысле, что волновыми процессами в средах *1* и *3* можно пренебречь. Это упрощение вполне оправданно, если выполняется условие $L \ll ct$ (L и t — характерные размер и время системы; c — скорость света). В проводящей среде будем считать $\mu = 1$ и рассматривать только те процессы, которые обусловлены наличием проводимости, т. е., так же как в диэлектриках, токами смещения пренебрегаем.

Таким образом, вне проводника ($\sigma = 0$) имеем

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}_{(e)}, \tag{2.1}$$

а для проводника ($\boldsymbol{j}_{(e)} = 0$)

$$\Delta \boldsymbol{A} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Решение уравнения Гельмгольца для области 1 (диэлектрик). Воспользуемся цилиндрической системой координат (ρ, φ, z) с осью z, связанной с проводником и направленной нормально к нему и совпадающей с осью витка. Начало координат поместим на поверхность проводника (рис. 1). Считаем, что диаметр сечения витка мал по сравнению с радиусом витка R_1, иными словами, ток течет вдоль линии с координатами $\rho = R_1$, $z = h$. Используя дельта-функцию Дирака, выражение для плотности тока запишем в виде

$$j_{(e)} = I_0 \delta(z - h) \delta(\rho - R_1). \tag{2.3}$$

В силу осевой симметрии задачи вектор-потенциал также имеет только φ-компоненту и от угла φ не зависит, т. е. $A = A_\varphi$. Тогда уравнение (2.1) в цилиндрических координатах принимает вид (см., например, [7])

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\,\frac{\partial A}{\partial\rho}\Big) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{\rho^2} = -\mu_0 j_{(e)}. \tag{2.4}$$

В соответствии с методикой [7, 8] уравнение (2.4) можно решить, применяя интегральное преобразование Фурье — Бесселя с ядром в виде функции Бесселя первого порядка. Формула преобразования имеет вид

$$A^* = \int\limits_0^\infty \rho J_1(\lambda\rho)A(\rho,z)\,d\rho, \tag{2.5}$$

где λ — параметр преобразования. Применив преобразование (2.5) к обеим частям уравнения (2.4), получим

$$\frac{d^2A^*}{dz^2} - \lambda^2 A^* = -\mu_0 j^*_{(e)},$$

где A^* является функцией только координаты z; $j^*_{(e)}$ — преобразованная плотность тока. Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$A^* = \frac{\mu_0}{2\lambda}\Big[\mathrm{e}^{\lambda z}\Big(B - \int\limits_0^z j^*_{(e)}\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\,d\xi\Big) + \mathrm{e}^{-\lambda z}\Big(C + \int\limits_0^z j^*_{(e)}\mathrm{e}^{\lambda\xi}\,d\xi\Big)\Big], \tag{2.6}$$

где ξ — переменная интегрирования вдоль направления z; B, C — величины, не зависящие от z и определяемые из граничных условий.

При $z\to\infty$ поле должно быть ограниченным. Это возможно при условии

$$B = \int\limits_0^\infty j^*_{(e)}\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\,d\xi.$$

Учитывая соотношение (2.3), получим

$$j^*_{(e)} = \int\limits_0^\infty \rho J_1(\lambda\rho) j_{(e)}(\rho,z)\,d\rho = I_0\int\limits_0^\infty \rho J_1(\lambda\rho)\delta(\rho-R_1)\delta(z-h)\,d\rho = I_0R_1J_1(\lambda R_1)\delta(z-h),$$

$$B = I_0R_1J_1(\lambda R_1)\int\limits_0^\infty \delta(\xi-h)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\,d\xi = I_0R_1J_1(\lambda R_1)\mathrm{e}^{-\lambda h}.$$

В [8] показано, что неизвестная величина $C = B\varphi_1$, а с учетом того, что

$$\int\limits_0^z j^*_{(e)}(\lambda,\xi)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\,d\xi = \begin{cases} 0, & z<h, \\ I_0R_1J_1(\lambda R_1)\mathrm{e}^{-\lambda h}, & z>h, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^z j^*_{(e)}(\lambda,\xi)\mathrm{e}^{+\lambda\xi}\,d\xi = \begin{cases} 0, & z>h, \\ I_0R_1J_1(\lambda R_1)\mathrm{e}^{\lambda h}, & z<h, \end{cases}$$

выражение (2.6) принимает вид

$$A_1^* = \mu_0(\mathrm{e}^{-\lambda|z-h|} + \varphi_1 \mathrm{e}^{-\lambda(z+h)}) I_0 R_1 J_1(\lambda R_1)/(2\lambda). \tag{2.7}$$

Очевидно, что задача нахождения поля в области *1* сводится к отысканию вида функции φ_1.

Для определения φ_1 используются известные граничные условия [7, 8] для вектор-потенциала магнитного поля и его производной по z, которые остаются справедливыми для соответствующих величин, полученных с помощью интегральных преобразований различного рода.

В области *1* для $z < h$

$$A_1^* = K_\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda(h-z)} + \varphi_1 \mathrm{e}^{-\lambda(h+z)}), \tag{2.8}$$

где $K_\lambda = \mu_0 I_0 R_1 J_1(\lambda R_1)/(2\lambda)$; $h = h_0 - ut$. Тогда

$$A_1^* = K_\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}\mathrm{e}^{\lambda ut} + \mathrm{e}^{-\lambda(h_0+z)}\Phi_1(t)), \quad \frac{dA_1^*}{dz} = \lambda K_\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}\mathrm{e}^{\lambda ut} - \mathrm{e}^{-\lambda(h_0+z)}\Phi_1(t)), \tag{2.9}$$

где $\Phi_1 = \varphi_1 \mathrm{e}^{\lambda ut}$.

Применив преобразование Лапласа [9] к обеим частям уравнений (2.9), получим уравнения

$$\begin{aligned} L[A_1^*] &= \frac{K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}}{s-\lambda u} + K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(h_0+z)} L[\Phi_1(t)], \\ L\Big[\frac{dA_1^*}{dz}\Big] &= \frac{\lambda K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}}{s-\lambda u} - \lambda K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(h_0+z)} L[\Phi_1(t)]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Решение уравнения Гельмгольца для области 2 (*проводник*). Уравнение (2.2) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\Big) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{A_2}{\rho^2} = \mu_0\sigma\frac{\partial A_2}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Применяя к уравнению (2.11) преобразование Фурье — Бесселя, получим

$$\frac{\partial^2 A_2^*}{\partial z^2} - \lambda^2 A_2^* = \mu_0\sigma\frac{\partial A_2^*}{\partial t}. \tag{2.12}$$

Применяя к (2.12) преобразование Лапласа, имеем

$$L\Big[\frac{d^2 A_2^*}{dz^2}\Big] - \lambda^2 L[A_2^*] = \frac{1}{a^2}(sL(A_2^*) - A_{20}^*), \tag{2.13}$$

где s — параметр преобразования Лапласа; A_{20}^* — начальная величина преобразованного вектор-потенциала A_2^*; $a^2 = 1/(\mu_0\sigma)$. После несложных преобразований уравнения (2.13) с учетом выражения (2.7) для поля витка в свободном пространстве ($\varphi_1 = 0$) получаем

$$L\Big[\frac{d^2 A_2^*}{dz^2}\Big] - \beta^2 L[A_2^*] = -\frac{K_\lambda}{a^2}\mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}, \tag{2.14}$$

где $\beta^2 = (\lambda^2 a^2 + s)/a^2$.

Из уравнения (2.14) следует

$$L[A_2^*] = A\mathrm{e}^{\beta z} + B\mathrm{e}^{-\beta z} + \frac{K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}}{s}, \quad L\Big[\frac{dA_2^*}{dz^2}\Big] = A\beta\mathrm{e}^{\beta z} - B\beta\mathrm{e}^{-\beta z} + \frac{\lambda K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(h_0-z)}}{s}. \tag{2.15}$$

Решение уравнения Гельмгольца для области 3 (диэлектрик). В области *3* ($j_{(e)} = 0$, $\sigma = 0$) с помощью преобразований Фурье — Бесселя и Лапласа уравнение Гельмгольца приводится к виду

$$L\Big[\frac{d^2A_3^*}{dz^2}\Big] - \lambda^2 L[A_3^*] = 0$$

и имеет решение $L[A_3^*] = D\mathrm{e}^{\lambda z} + E\mathrm{e}^{-\lambda z}$.

При $z \to -\infty$ поле ограничено, поэтому коэффициент E должен быть равен нулю. Таким образом,

$$L[A_3^*] = D\mathrm{e}^{-\lambda z}, \qquad L\Big[\frac{dA_3^*}{dz}\Big] = D\lambda\mathrm{e}^{\lambda z}. \tag{2.16}$$

3. Поле витка, расположенного над проводящими полупространством и пластиной конечной толщины, приводимыми в движение ударной волной. Используя соотношения (2.10), (2.15) и (2.16), потребуем выполнения граничных условий для преобразованных вектор-потенциалов и их производных при $z = 0$ и $z = -d$ [7, 8].

Система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}
A + B - K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda h_0} L[\Phi_1] = K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda h_0}\Big(\frac{1}{s-\lambda u} - \frac{1}{s}\Big),
\\
A - B + \frac{K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda h_0}}{\alpha}\, L[\Phi_1] = \frac{K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda h_0}}{\alpha}\Big(\frac{1}{s-\lambda u} - \frac{1}{s}\Big),
\\
A\mathrm{e}^{-\beta d} + B\mathrm{e}^{\beta d} + K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda h_0 - \lambda d}/s = D\mathrm{e}^{-\lambda d}, \quad A\alpha\mathrm{e}^{-\beta d} - B\alpha\mathrm{e}^{\beta d} + K_\lambda \mathrm{e}^{-\lambda h_0 - \lambda d}/s = D\mathrm{e}^{-\lambda d},
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\alpha = \beta/\lambda = \sqrt{s + \lambda^2 a^2}/(\lambda a)$. Решая систему уравнений (3.1), находим

$$L[\Phi_1] = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big(\frac{1}{s-\lambda u} - \frac{1}{s}\Big)\Big[1 + \frac{4\alpha\mathrm{e}^{-2\beta d}}{(1-\alpha)^2\mathrm{e}^{-2\beta d} - (1+\alpha)^2}\Big]. \tag{3.2}$$

В корректности полученного решения легко убедиться, так как при $d = 0$ имеем $L[\Phi_1] = L[\varphi_1] = 0$, т. е. возмущение начального поля витка отсутствует.

Проводящее полупространство ($d \to \infty$). Из (3.2) следует, что при $d \to \infty$

$$L[\Phi_1] = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big(\frac{1}{s-\lambda u} - \frac{1}{s}\Big). \tag{3.3}$$

Приближение идеальной проводимости. Рассмотрим наиболее простой случай, когда электропроводность достаточно велика. Величину $a = \sqrt{1/(\mu_0\sigma)}$ можно устремить к нулю, а α — к бесконечности (см. формулу (3.3)). Тогда $L[\Phi_1] = 1/s - 1/(s - \lambda u)$ или после обратного преобразования Лапласа [9] $\Phi_1 = 1 - \mathrm{e}^{\lambda ut}$. Учитывая, что $\Phi_1 = \varphi_1\mathrm{e}^{\lambda ut}$, получаем

$$\varphi_1 = -1 + \mathrm{e}^{-\lambda ut}. \tag{3.4}$$

С помощью функции φ_1 можно найти формулу для ЭДС индукции, возникающей в витке ($z = h$, $\rho = R_1$) после приведения в движение ударной волной поверхности идеально проводящего полупространства ($\sigma \to \infty$).

Применяя обратное преобразование Фурье — Бесселя, находим истинное значение поля в области *1*

$$A_1 = \int\limits_0^\infty A_1^*(\lambda, R_1) J_1(\lambda\rho)\lambda\, d\lambda.$$

С учетом (2.8) получим

$$A_1 = \frac{\mu_0 R_1 I_0}{2}\Bigl[\int\limits_0^\infty J_1(\lambda R_1)J_1(\lambda\rho)\mathrm{e}^{-\lambda|z-h|}\,d\lambda + \int\limits_0^\infty J_1(\lambda R_1)J_1(\lambda\rho)\varphi_1\mathrm{e}^{-\lambda|z+h|}\,d\lambda\Bigr].$$

ЭДС индукции имеет вид

$$E(t) = -\frac{d}{dt}\oint A_1\,dl = -\mu_0 I_0\pi R_1^2\int\limits_0^\infty J_1^2(\lambda R_1)\Bigl(\frac{d\varphi_1}{dt} + 2\lambda u\varphi_1\Bigr)\mathrm{e}^{-2\lambda h}\,d\lambda \tag{3.5}$$

(интегрирование проводится вдоль контура витка). Подставляя (3.4) в (3.5) и учитывая, что

$$\int\limits_0^\infty J_1^2(\lambda R_1)\mathrm{e}^{-m\lambda}\lambda\,d\lambda = \frac{m}{\pi R_1^3}\,\frac{k}{4}\Bigl[\frac{2-k^2}{1-k^2}\,E(k^2) - 2K(k^2)\Bigr]$$

($k^2 = 1/[1+(m/(2R_1))^2\,]$; $E(k^2)$, $K(k^2)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода), можно убедиться, что выражение (3.5) совпадает с выражением для ЭДС индукции, полученным в [2] с использованием метода изображений.

Полупространство с конечной электропроводностью. Теперь в формуле (3.3) будем устремлять к нулю величины, пропорциональные $a^2 = 1/(\mu_0\sigma)$, оставляя величины, пропорциональные $a = 1/\sqrt{\mu_0\sigma}$. Получаем

$$L[\Phi_1] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-\lambda u} + \frac{2a\lambda}{(s-\lambda u)(a\lambda+\sqrt{s})} - \frac{2a\lambda}{s(a\lambda+\sqrt{s})}. \tag{3.6}$$

Применяя к (3.6) обратное преобразование Лапласа и соотношение $\varphi_1 = \Phi_1\mathrm{e}^{-\lambda ut}$, имеем

$$\varphi_1 = -1 + \mathrm{e}^{-\lambda ut} + \frac{2a\lambda}{\sqrt{\lambda u}}\operatorname{erf}\sqrt{\lambda ut} - \frac{4a\lambda\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\lambda ut}. \tag{3.7}$$

В соответствии с (3.5) находим, что ЭДС для полупространства с конечной электропроводностью

$$E_\sigma = E_{\sigma\to\infty} - 4I_0R_1^2u\sqrt{\frac{\pi\mu_0 t}{\sigma}}\int\limits_0^\infty J_1^2(\lambda R_1)\lambda^2\mathrm{e}^{-2\lambda h}\Bigl\{\sqrt{\pi}\,\frac{\operatorname{erf}\sqrt{\lambda ut}}{\sqrt{\lambda ut}} - \mathrm{e}^{-\lambda ut}\Bigr\}\,d\lambda. \tag{3.8}$$

Зависимость (3.8) по аналогии со случаем идеальной проводимости может быть представлена в виде $E_\sigma = I_0\alpha_\sigma u$. Для количественной оценки зависимости $\alpha_\sigma(t)$ при известной массовой скорости можно использовать начальное значение электропроводности металла. Более точные данные можно получить с помощью измерений электропроводности металла в близких условиях нагружения с использованием известных методов [10, 11], в частности метода тонких пластин.

Сопоставление с экспериментом. В работе [2] для сравнительных исследований выбран свинец, начальная удельная электропроводность которого примерно в 10 раз меньше электропроводности меди. Выполнено две серии опытов. В первой серии плоская ударная волна прямоугольного профиля из алюминиевого экрана (толщиной 10 мм) взрывного устройства (диаметром 120 мм) вводилась последовательно в свинцовый образец, а затем в образец из полиметилметакрилата. Толщина образцов составляла 5 и 6 мм соответственно, их диаметр — 100 мм. Сигнал регистрировался датчиком — катушкой индуктивности, состоящей из 8 витков изолированного медного провода диаметром 1 мм со средним радиусом $R_N \simeq 16$ мм; толщина и ширина оболочки составляют 2,5 и 5 мм. В этом случае ЭДС увеличивается в N^2 раз [2].

Вторая серия опытов отличалась от первой тем, что на границу раздела свинец — диэлектрик помещалась медная пластина диаметром 100 мм и толщиной 0,3 мм, достаточно быстро приобретающая скорость этой границы, что позволило определить массовую скорость границы раздела свинца с полиметилметакрилатом [2]. В опытах использовались два типа взрывных устройств I и II с известными параметрами ударной волны за ее фронтом в алюминиевом экране, обеспечивающими исходные давления в образце из свинца 41; 79 ГПа, в образце из полиметилметакрилата 10; 20 ГПа соответственно.

На рис. 2 расчетная зависимость $\alpha_\sigma(\xi)$ для идеального проводника (кривая *1*) и результаты расчетов по формуле (3.8) для меди (кривая *2*) сопоставляются с экспериментальными данными для свинца (кривые *3*, *4* для взрывных устройств II и I соответственно). При смещении $\xi = 2$ мм значение α_σ для идеального проводника на 1 % превышает значение α_σ для меди. С помощью соотношения (3.8) для опытов со свинцом оценены динамические значения электропроводностей, которые для кривых *3* и *4* составляют $4{,}3 \cdot 10^6$ и $4{,}1 \cdot 10^6$ $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$. Степень соответствия расчетных значений электропроводностей экспериментальным кривым отражают точки на рис. 2.

Пластина конечной толщины. Перейдем к приближенному анализу части решения (3.2), зависящей от толщины металлической пластины:

$$L[\Delta\Phi_1] = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big(\frac{1}{s-\lambda u} - \frac{1}{s}\Big)\frac{4\alpha \mathrm{e}^{-2\beta d}}{(1-\alpha)^2\mathrm{e}^{-2\beta d} - (1+\alpha)^2}. \tag{3.9}$$

Будем считать, что $(1-\alpha)/(1+\alpha) \simeq -1$. В правой части выражения (3.9), содержащей члены с толщиной проводящей пластины d, будем устремлять к нулю лишь величины, пропорциональные $a^2 = 1/(\mu_0\sigma)$, оставляя величины, содержащие $a = 1/\sqrt{\mu_0\sigma}$. При этом

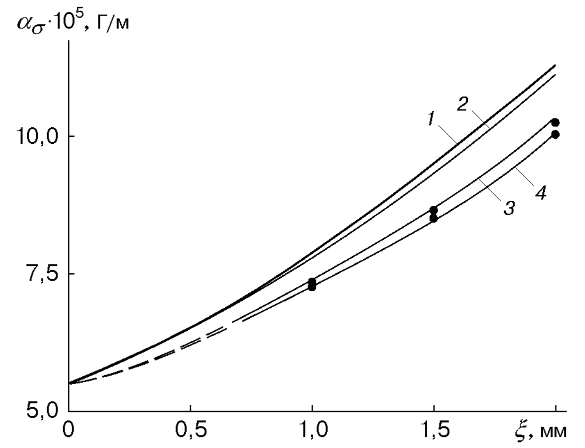

Рис. 2

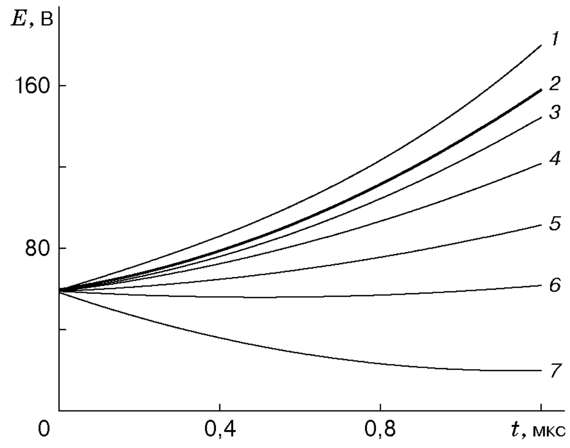

Рис. 3

Рис. 2. Расчетные зависимости $\alpha_\sigma(\xi)$ для идеально проводящего полупространства (*1*) и полупространства из меди (*2*) и экспериментальные зависимости для пластин из свинца (*3*, *4*)

Рис. 3. Расчетные зависимости $E(t)$ для пластин различной толщины d_0 с конечной электропроводностью σ:
1 — $\sigma \to \infty$; *2* — $d_0 \to \infty$; *3–7* — $d_0 = 0{,}20$; 0,10; 0,05; 0,03; 0,01 мм

соотношение (3.9) принимает вид

$$L[\Delta\varphi_d] = \frac{-4a\lambda \exp(-2d\sqrt{s}/a)/(s-\lambda u) + 4a\lambda \exp(-2d\sqrt{s}/a)/s}{\sqrt{s}\,(\exp(-2d\sqrt{s}/a)-1) - 2a\lambda(\exp(-2d\sqrt{s}/a)+1)}. \tag{3.10}$$

Обратное преобразование Лапласа для $L[\Delta\varphi_d]$ (3.10) приводит к интегральному уравнению Вольтерры первого рода типа свертки [9]

$$\int_0^t \Delta\varphi_d(\tau)\exp(\lambda u\tau)\Big\{\frac{\exp(-d^2/[a^2(t-\tau)])-1}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} - 2a\lambda\Big[1+\operatorname{erfc}\Big(\frac{d}{a\sqrt{t-\tau}}\Big)\Big]\Big\}\,d\tau =$$
$$= 4a\lambda\int_0^t \operatorname{erfc}\frac{d}{a\sqrt{\tau}}\,d\tau - 2a\lambda\int_0^t \exp(\lambda u\tau)\Big\{\exp\Big(-\frac{2d}{a}\sqrt{\lambda u}\Big)\operatorname{erfc}\Big(\frac{d}{a\sqrt{\tau}}-\sqrt{\lambda u\tau}\Big) +$$
$$+ \exp\Big(\frac{2d}{a}\sqrt{\lambda u}\Big)\operatorname{erfc}\Big(\frac{d}{a\sqrt{t}}+\sqrt{\lambda u\tau}\Big)\Big\}\,d\tau. \tag{3.11}$$

Функции $\Delta\varphi_d(t)$, определенные для пластин различной толщины и электропроводности, близкой к электропроводности свинца, численно рассчитаны Я. К. Хисамдиновым и А. А. Трусниковым. В расчетах интегралы в левой и правой частях интегрального уравнения (3.11) заменяются суммами, что делает возможным переход к системе алгебраических уравнений [12]. Пример зависимостей $E(t)$, соответствующих φ_1 по (3.7) с дополнительными членами $\Delta\varphi_d$, определенными из (3.11), представлен на рис. 3. Исходные параметры следующие: $\sigma = 5{,}865\cdot 10^6$ $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$, $u = 2{,}7\cdot 10^3$ м/с, $I_0 = 500$ А, $N = 8$, $R_N = 16\cdot 10^{-3}$ м, $h_0 = 8{,}25\cdot 10^{-3}$ м, $\delta = 1{,}2$.

Эксперименты с медными и алюминиевыми пластинами конечной толщины. Если толщина пластины достигает значений, меньших толщины поверхностного токового слоя в металле, то начинает проявляться эффект диффузии через нее магнитного поля, что приводит к снижению регистрируемого сигнала. Влияние этого эффекта на сигнал изучалось в серии опытов на примере меди и алюминия [2]. Толщина пластины (фольги) при ее диаметре не менее 100 мм изменялась от 0,01 до 0,3 мм. Диэлектрическая среда, в которую помещалась фольга (полиметилметакрилат), подвергалась нагружению плоской ударной волной прямоугольного профиля. Установлено, что при давлении в диэлектрике

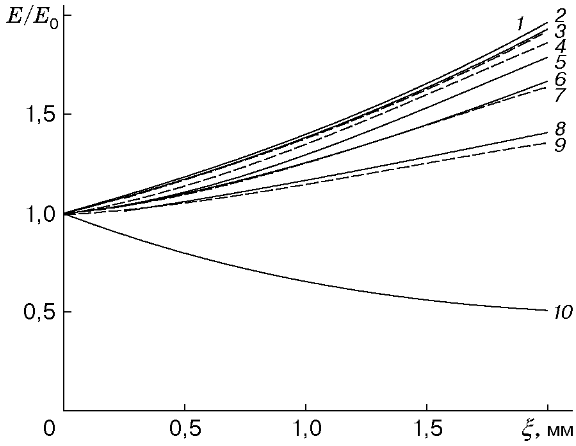

Рис. 4. Сглаженные экспериментальные зависимости $E/E_0(\xi)$ для алюминиевых и медных пластин различной толщины d_0 [мм]:
1 — $\sigma \to \infty$; *2* — 0,20 (Cu); *3* — 0,30 (Al); *4* — 0,10 (Cu); *5* — 0,10 (Al); *6* — 0,05 (Al); *7* — 0,03 (Cu); *8* — 0,03 (Al); *9* — 0,015 (Cu); *10* — 0,01 (Al)

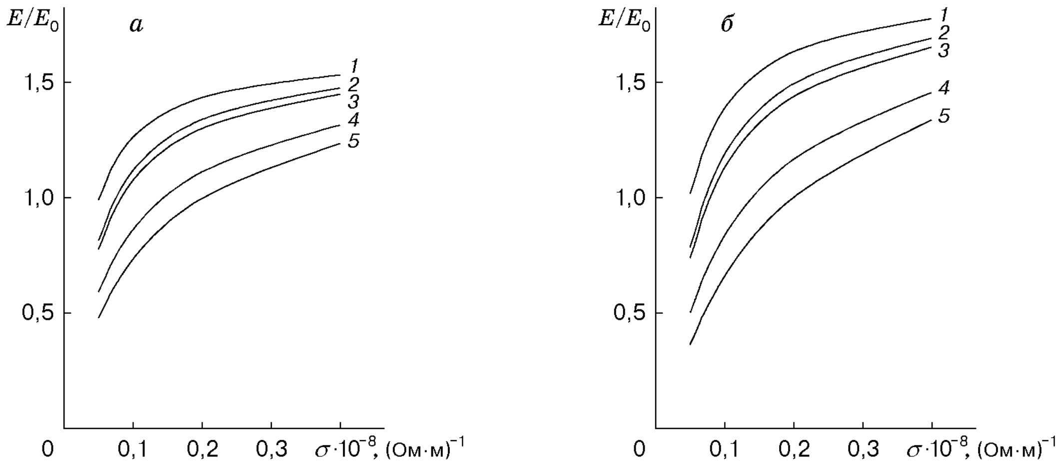

Рис. 5. Расчетные зависимости отношения $E/E_0(\sigma)$ при $t = 0{,}6$ мкс (*а*) и $t = 0{,}8$ мкс (*б*) для алюминиевых и медных пластин различной толщины d_0 [мм]:
1 — 0,05 (Al); *2* — 0,03 (Cu); *3* — 0,03 (Al); *4* — 0,015 (Cu); *5* — 0,01 (Al)

$P \simeq 20$ ГПа сигнал практически не зависит от толщины фольги, если ее величина не менее 0,1 мм для меди и 0,2 мм для алюминия. При давлении в диэлектрике $P \simeq 60$ ГПа критическая толщина медной и алюминиевой фольги составляет 0,2 и 0,3 мм соответственно.

На рис. 4 представлены экспериментальные зависимости E/E_0 от смещения $\xi = ut$ для медной и алюминиевой фольги различной толщины d_0. В экспериментах в качестве диэлектрика применялся полиметилметакрилат, параметры нагружения: $u = 2{,}45 \cdot 10^{-3}$ м/с, $P = 18{,}5$ ГПа. В качестве датчика использовалась катушка индуктивности с числом витков $N = 8$ и средним радиусом $R_N = 15{,}85 \cdot 10^{-3}$ м. Расстояние от проводящей поверхности до среднего сечения катушки составляло $h_0 = 8{,}16 \cdot 10^{-3}$ м, сила тока $I_0 = 500$ А. Из сравнительного анализа рис. 3 и 4 следует, что расчетные и экспериментальные зависимости E/E_0 от величины ξ качественно аналогичны.

Была предпринята попытка определения динамических значений электропроводности меди и алюминия для условий нагружения, приведенных выше. С использованием значений φ_1, вычисленных по формулам (3.7), и $\Delta\varphi_d$ из (3.11) при $t = 0{,}6$ мкс и $t = 0{,}8$ мкс получены расчетные зависимости E/E_0 от электропроводности σ (рис. 5,*а*,*б* соответственно) для экспериментов с фольгой различной толщины d_0. Динамические значения электропроводности для меди по сравнению с начальным уменьшились при $d_0 = 0{,}015$; 0,03 мм примерно в 1,9 раза, для алюминия при $d_0 = 0{,}03$; 0,05 мм — в 2,1 раза, при $d_0 = 0{,}01$ мм — в 6 раз.

Заключение. Представленные в работе расчетные зависимости для определения скорости металлических пластин достаточно большой (в электромагнитном смысле) толщины с учетом конечности их электропроводности способствуют развитию индукционного метода измерения массовых скоростей конденсированных веществ [2].

В работе продемонстрирована возможность бесконтактных измерений электропроводности металлов в ударно-волновых процессах. На данном этапе исследований обоснованная интерпретация полученных расчетно-экспериментальных результатов по оценке динамических значений электропроводности затруднена. Она станет возможной после усовершенствования электромагнитной модели, оценки погрешности измерений электропроводности и определения области применимости расчетных зависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А. с. 468150 СССР, G 01p3/42.** Индукционный датчик для регистрации кратковременных процессов / Ю. Н. Жугин, К. К. Крупников. № 1861600; Заявл. 25.12.72; Опубл. 25.04.75; Бюл. № 15; Приоритет 25.12.72.
2. **Жугин Ю. Н., Крупников К. К.** Индукционный метод непрерывной регистрации скорости конденсированной среды в ударно-волновых процессах // ПМТФ. 1983. № 1. С. 102–108.
3. **Fritz J. N., Morgan J. A.** An electromagnetic technique for measuring material velocity // Rev. Sci. Instrum. 1973. V. 44, N 2. P. 215–221.
4. **Бюргерс Ж. М.** Проникание ударной волны в магнитное поле. Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума). М.: Атомиздат, 1958.
5. **Шерклиф Дж.** Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967.
6. **Забабахин Е. И., Нечаев М. Н.** Ударные волны поля и их кумуляция // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1957. Т. 33, вып. 2. С. 442–450.
7. **Гринберг Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
8. **Соболев В. С., Шкарлет Ю. М.** Накладные и экранные датчики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
9. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965.
10. **Килер Р.** Электропроводность конденсированных сред при высоких давлениях // Физика высоких плотностей энергии: Сб. ст. / Пер. с англ. М.: Мир, 1974. С. 120–143.
11. **Гончаров А. И., Родионов В. Н.** Электросопротивление меди и алюминия при ударно-волновых нагружениях // Тез. докл. II Всесоюз. конф. “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, Киев, 9–11 сент. 1985 г. Киев: Наук. думка, 1985. С. 72, 73.
12. **Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 10/XI 1999 г.,
в окончательном варианте — 25/I 2000 г.