

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Г. М. Заславский

(Новосибирск)

В настоящей работе рассматривается динамическая система, поведение которой со временем описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \alpha x^2)x + F(t)x = 0 \quad (0.1)$$

где внешняя сила $F(t)$ очень близка к периодической с частотой $\Omega \ll \omega_0$. Хорошо известно [1,2], что подобного рода системы при достаточно малом параметре нелинейности α сохраняют условно периодическое движение. В дальнейшем такое движение будем называть устойчивым. Ниже исследуется вопрос: при каком условии система (0.1) представляет собой динамическую систему с перемешиванием в смысле [3,4]? Иными словами, каков критерий того, что динамическую систему (0.1) можно приближенно описывать статистическими законами. В дальнейшем это условие будем называть критерием стохастичности (КС). Следует сразу оговорить характер исследования, которое будет проведено ниже. Решение уравнения (0.1) может быть представлено в виде квазипериодического движения с существенно меняющейся фазой. Нахождение критерия связано с выяснением условия, при котором временные корреляции фаз экспоненциально убывают. Грубо говоря, необходимо указать, когда временную последовательность фаз можно приближенно рассматривать как последовательность случайных чисел. Ясно, что в этом случае речь идет о стохастичности движения системы не во всем фазовом пространстве, а в подобласти, в которой имеется эргодичность движения по фазе.

Определение критерия стохастичности связано с большими трудностями. В последнее время появился ряд работ, где этот критерий находится для простейших физических систем [5-8]¹. Названия этих работ свидетельствуют о том круте физических вопросов, в котором проблема определения КС существенна. Следует также отметить, что уравнение типа (0.1) использовалось Р. З. Сагдеевым, Б. В. Чириковым и автором для исследования устойчивости магнитных силовых линий в системах замкнутого типа.

Ниже будет предложен асимптотический метод определения критерия стохастичности для движения типа (0.1), допускающий обобщение также для систем несколько более сложного типа, чем (0.1). К излагаемому методу неприменим термин «математически строгий». Отдельные места, возможно, нуждаются в более строгом обосновании, хотя с «физической» точки зрения они кажутся вполне естественными.

§ 1. Параметрическая сила «мгновенного» действия. Начнем изучение уравнения (0.1) в случае, когда параметрическая сила $F(t)$ имеет характер периодических толчков, длящихся бесконечно малое время

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \alpha x^2)x + a \sum \delta(t - t_k)x = 0 \quad (1.1)$$

Толчки t_k следуют через равные интервалы $T = \Omega^{-1}$. Между двумя последовательными толчками x будет решением уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \alpha x^2)x = 0 \quad (1.2)$$

Это уравнение хорошо изучено при малой нелинейности

$$\alpha x^2 \ll 1 \quad (1.3)$$

¹ См. также: Ч и р и к о в Б. В. Диссертация. Новосибирск, 1959.

Однако для дальнейшего удобнее представить решение уравнения (1.2) в виде асимптотических рядов ВКБ-приближения [9]. Используя неравенство (1.3), напомним, следуя [8],

$$x_{\pm} = \omega^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_t^{\infty} \omega(t') dt' \right\} \quad (\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha x^2}) \quad (1.4)$$

Предполагается, что в дальнейшем в выражение для ω (1.4) будет подставлено некоторое приближение для $x(t)$. Например, в нулевом приближении

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha x_0^2}, \quad x_0 = A_0 \cos \omega_0 t \quad (1.5)$$

В действительности, приближение (1.5) недостаточно корректно. Действительно, если в (2.2) заменить частоту в соответствии с (1.5), то возникает параметрический резонанс, которого в действительности в исходном уравнении (1.2) нет. Эта неприятность легко устраняется, если в определении x_0 взять исправленную, в соответствии с обычной теорией [10], частоту

$$x_0 = A_0 \cos (\omega_0 + \Delta \omega) t, \quad \Delta \omega = \frac{3}{8} \alpha A_0^2 \quad (1.6)$$

В дальнейшем будет подразумеваться, что в выражении (1.5) для ω величина x_0 определена формулой (1.6).

Второе замечание относительно решений (1.4) связано с неравенством

$$\omega \gg \Omega \quad (1.7)$$

при котором будет исследоваться (1.1). Согласно (1.7), между двумя последовательными толчками будет находиться большое число точек $\text{Re} t^*$ таких, что $\omega(t^*) = 0$. Вблизи точек t^* асимптотические решения (1.4) становятся неприменимыми вследствие явления Стокса. Последовательный учет всех особенностей t^* приведет к умножению решений (1.4) на медленно меняющийся со временем периодический множитель. Последним эффектом будем пренебрегать, если влияние толчков $F(t)$ существеннее (соответствующая оценка содержится в приложении 1). Между двумя последовательными толчками в точках t_{n-1} и t_n решение типа (2.4) запишем в виде

$$x_{\pm}^{(n)} t \approx \omega_n^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_{t_n}^t \omega_n(t') dt' \right\} \\ \omega_n = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha x_n^2}, \quad x_n = A_n x_+^{(n)} + \bar{A}_n x_-^{(n)} \quad (1.8)$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение. Используя непрерывность решения в точках t_n и уравнение (1.1), находим связь между $A_n, \bar{A}_n$ и $A_{n+1}, \bar{A}_{n+1}$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ \bar{A}_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{n+1} \\ \omega_n \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} (\beta_n^+ + i\varepsilon_n) \exp iS_{n+1} & (\beta_n^- + i\varepsilon_n) \exp iS_{n+1} \\ (\beta_n^- - i\varepsilon_n) \exp (-iS_{n+1}) & (\beta_n^+ - i\varepsilon_n) \exp (-iS_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix} \\ \varepsilon_n = \frac{a}{\omega_{n+1}}, \quad S_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_{n+1}(t') dt' = \int_{t_n}^{t_n^+ + T} \omega_{n+1}(t') dt', \quad \beta_n^{\pm} = 1 \pm \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}$$

Уравнение (1.9) удобно переписать в сокращенном виде

$$A_{n+1} = M_n A_n \quad (1.10)$$

Матрица перехода M эквивалентна оператору сдвига на T , действующему на решения $x(t)$. Отметим также, что смысл проделанных преобразований заключался в замене исходного уравнения (1.1) эквивалентным уравнением (1.9) (или 1.10) в конечных разностях.

Из (2.9) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - S_{n+1}) &= \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg} \varphi_n + \varepsilon_n \\ \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|^2 + \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} &\left(1 - \beta_n \sin^2 \varphi_n + \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \varepsilon_n \sin 2\varphi_n + \varepsilon_n^2 \cos^2 \varphi_n \right) \\ A_n &= |A_n| \exp i\varphi_n, \quad A_{n+1} = |A_{n+1}| \exp i\varphi_{n+1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Возможность использования формул (1.9) — (1.11) предполагает ограничение сверху на интенсивность толчка a . Действительно, условие (1.3) слабой нелинейности дает, согласно (1.11),

$$\alpha x_n^2 \max(\varepsilon_n, \varepsilon_n^2) \ll 1 \quad (1.12)$$

Неравенство (1.12) означает, что в течение всего времени рассмотрения процесса нелинейность остается малой, и представление решений уравнения (1.1) в виде (1.8) имеет смысл.

Уравнение (1.11) устанавливает следующую связь между фазами¹ φ_n и φ_{n+1} :

$$\varphi_{n+1} = \left\{ S_{n+1} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg} \varphi_n + \varepsilon_n \right) \right\} \quad (1.13)$$

где {...} означает дробную часть числа, стоящего в фигурных скобках. Оценка интеграла S_{n+1} с учетом (1.7) дает вместо (1.13)

$$\varphi_{n+1} \approx \left\{ \omega_0 T \left(1 + \frac{\alpha}{2\omega_0} |A_{n+1}|^2 \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg} \varphi_n + \varepsilon_n \right) \right\} \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) можно сокращенно записать в виде

$$\varphi_{n+1} = \{kf(\varphi_n)\} \quad (1.15)$$

где за счет большого значения k выражение $kf(\varphi_n) \gg 1$ почти для всех φ_n , исключая малые области $\Delta\varphi \sim k^{-1}$.

Дальнейшее исследование сводится к изучению уравнения движения в конечных разностях (1.15) фаз осциллятора. В [11] было показано, что динамическая система, описываемая уравнением

$$\varphi_{n+1} = \{k\varphi_n\}, \quad k \gg 1 \quad (1.16)$$

является системой с перемешиванием, т. е. фазы φ_n можно с определенной степенью точности считать случайными. Это обстоятельство можно конкретизировать, вычисляя корреляцию фаз

$$R(1) = \left(\int_0^1 \left(\varphi_{n+1} - \frac{1}{2} \right) \left(\varphi_n - \frac{1}{2} \right) d\varphi_n \right) \left[\int_0^1 \left(\varphi_n - \frac{1}{2} \right)^2 d\varphi_n \right]^{-1} \quad (1.17)$$

Интеграл (1.17) для уравнения типа (1.16) вычислялся в [6]. При $k \gg 1$ имеем

$$R(1) \approx C_1 / k \quad (1.18)$$

Здесь константа $C_1 \sim 1$. Нетрудно показать, что

$$R(m) = \int_0^1 \left(\varphi_{n+m} - \frac{1}{2} \right) \left(\varphi_n - \frac{1}{2} \right) d\varphi_n \left[\int_0^1 \left(\varphi_n - \frac{1}{2} \right)^2 d\varphi_n \right]^{-1} \approx \frac{C_m}{k^m} \quad (1.19)$$

¹ В дальнейшем для удобства фазы нормированы таким образом, что их изменение происходит в области (0,1).

Здесь по-прежнему $C_m \sim 1$. Уравнения (1.18), (1.19) означают, что вообще

$$R(n) \approx C(n)e^{-n \ln k} \quad (1.20)$$

где $C(n)$ — медленно меняющаяся функция от n по сравнению с экспоненциальным множителем. Последнее есть следствие условия $k \gg 1$. Очевидно, что результат (1.20) означает экспоненциальное расщепление корреляции фаз. Таким образом, условие $k \gg 1$ для задачи (1.16) можно рассматривать как ¹ критерий стохастичности.

Аналогичный корреляционный анализ можно провести для уравнения (1.15). Подставляя (1.14) в (1.17) и опуская несложные оценки, получаем

$$R(1) \sim K^{-1}, \quad K = \max(a/\omega, a^2/\omega^2) \alpha G^2 \omega / \Omega \gg 1 \quad (1.21)$$

где G — амплитуда колебания. Неравенство (1.21) — критерий стохастичности для фаз нелинейного осциллятора, описываемого уравнением (2.1). Как уже отмечалось, имеются области фаз $\Delta\varphi_n \sim K^{-1}$, в которых критерий стохастичности не выполняется. В связи с этим более строгий анализ нуждается в оценке времени пребывания системы в таких областях (см. приложение 2). Условие (1.21) расщепления корреляций фаз можно записать в обычном виде

$$R(\tau) = \frac{\langle (\varphi(t) - 1/2)(\varphi(t+\tau) - 1/2) \rangle}{\langle (\varphi(t) - 1/2)^2 \rangle} \sim \exp \frac{-\tau}{\tau_0}, \quad \tau_0 = \frac{T}{\ln K} = (\Omega \ln K)^{-1} \quad (1.22)$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по фазовому пространству $\varphi(t)$.

Неравенство (1.21) обеспечивается очень большим расстоянием между толчками и, следовательно, возможностью большого набега фазы между ними. При заданном большом параметре ω / Ω уменьшение параметра нелинейности α и интенсивности толчка a / ω приводит к нарушению неравенства (1.21) в соответствии с теоремой Колмогорова об устойчивости движения [1].

§ 2. «Адиабатическая» параметрическая сила. Рассмотрим случай силы $F(t)$ в уравнении (1.1), являющийся в каком-то смысле обратным случаю § 1

$$x'' + \omega_0^2 (1 + \alpha x^2)x - V \cos \Omega t x = 0 \quad (2.1)$$

где по-прежнему $\omega_0 \gg \Omega$. При таком условии осциллятор находится в адиабатических условиях, и изменение его адиабатического инварианта экспоненциально мало. Последнее не позволяет получить большого набега фазы и соответствует тому, что в уравнении типа (1.15) значение k всегда мало. Исключение составляет случай $V \sim \omega_0^2$. Как хорошо известно для линейного осциллятора, при $V \sim \omega_0^2$ относительное изменение адиабатического инварианта ~ 1 . Естественно поэтому рассмотреть область

$$0 < \omega_0^2 - V \ll \omega_0^2 \quad (2.2)$$

более детально. Для того чтобы нелинейность можно было считать малой, положим

$$\alpha x^2 \ll (\omega_0^2 - V) / \omega_0^2 \quad (2.3)$$

¹ В действительности, как показано в [11], для стохастичности достаточно просто $k > 1$.

Неравенство (2.3) позволяет записать решение уравнения (2.1) в виде, аналогичном (1.8), с заменой

$$\omega_n(t) = \sqrt{\omega_0^2(1 + \alpha x_n^2) - V \cos \Omega t} \quad (2.4)$$

Особыми точками асимптотического решения (1.8) будут точки, в которых $\omega_n(t) = 0$. Основной вклад в изменение адиабатического инварианта осциллятора дают те точки t_0 в комплексной плоскости t , которые наиболее близко расположены к действительной оси. Согласно (2.2), $\text{Re} t_0 \sim \sim 2\pi / \Omega$. Точки $\text{Re} t_0$ можно интерпретировать как «толчки» по аналогии со случаем, рассмотренным в предыдущем параграфе. Матрица перехода M через толчок аналогична (1.9) с заменой

$$\varepsilon_n = e^{-\delta}, \quad \delta \approx \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^2 - V}{\omega_0^2} \frac{\omega_0}{\Omega} \quad (2.5)$$

Условие стохастичности (1.21) принимает в рассматриваемом случае вид

$$K = e^{-\delta} \alpha G^2 \omega / \Omega \gg 1 \quad (2.6)$$

Однако, согласно (2.2), (2.3), неравенство (2.6) не может быть выполнено. При достаточно малых δ и на границе неравенства (2.3) можно получить $K \sim 1$. Это соответствует промежуточной области между устойчивостью системы и стохастичностью. Движение системы носит очень запутанный характер, и исследование его затруднено.

Движение осциллятора, близкое к стохастическому, можно получить, если заменить неравенство (2.2) на

$$0 < V - \omega_0^2 \leq \omega_0^2$$

и, следовательно, (2.3) — на

$$\alpha x^2 \omega_0^2 \leq V - \omega_0^2 \quad (2.7)$$

В этом случае имеются области, в которых $\omega_n^2(t) < 0$, и движение становится неустойчивым. Амплитуда осциллятора экспоненциально растет, и ее изменение после прохождения области обычной неустойчивости может оказаться достаточным для выполнения критерия стохастичности. Действительно, матрица перехода M в этом случае имеет вид [12]

$$M \approx \left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + e^{2|\delta|}} & i e^{|\delta|} \\ -i e^{|\delta|} & \sqrt{1 + e^{2|\delta|}} \end{pmatrix}$$

Здесь δ определено выражением (2.5). Если теперь считать $\delta \gg 1$, то неустойчивость развивается не очень сильно, $\Delta x_n / x_n \sim e^{|\delta|}$, и критерий стохастичности имеет вид

$$K = e^{|\delta|} \alpha G^2 \omega / \Omega \gg 1 \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть из (2.8) и (2.7), что для не очень больших δ стохастическая неустойчивость того же порядка, что и неустойчивость в области $\omega^2 < 0$, а неравенство (2.8) является не очень сильным: $K > 1$. Случай же $K \gg 1$ можно обеспечить достаточно большими значениями δ , при которых рост амплитуды вследствие прохождения через область динамической неустойчивости много больше, чем рост амплитуды вследствие стохастической неустойчивости.

Таким образом, в рассматриваемом случае (2.1) область значений начальных амплитуд, в которой может развиваться стохастическая неустойчивость, весьма мала.

Стохастическая неустойчивость системы (2.1), по-видимому, не может долго развиваться. Это связано с тем, что вследствие неустойчивости растет нелинейность и система выходит из области сильных резонансов.

§ 3. Внешняя сила «мгновенного» действия. Метод получения критерия стохастичности, рассмотренный в двух предыдущих параграфах, может быть обобщен и для систем, отличных от (0.1). Пусть, например, сила $F(t)$ «толчкового» типа, введенная в § 1, является внешней [5]

$$x'' + \omega_0^2(1 + \alpha x^2)x = \omega_0 P \sum_k \delta(t - t_k) \quad (3.1)$$

где толчки t_k следуют через равные интервалы $T = \Omega^{-1}$. Между двумя последовательными толчками, как и в § 1, имеем решения в виде (1.8). В точке t_n связь между амплитудами и фазами следующая:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} |A_n| \cos \varphi_n &= \frac{1}{\sqrt{\omega_{n+1}}} |A_{n+1}| \cos(\varphi_{n+1} - S_{n+1}) \\ \operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - S_{n+1}) &= \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg} \varphi_n + \varepsilon_n, \\ \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|^2 &= \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \left[1 - \beta_n \sin^2 \varphi_n + 2\varepsilon_n^0 \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \sin \varphi_n + (\varepsilon_n^0)^2 \right] \\ \varepsilon_n &= \frac{\varepsilon_n^0}{\cos \varphi_n}, \quad \varepsilon_n^0 = \frac{P}{A_n} \frac{\sqrt{\omega_n}}{\omega_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формулы (3.2) показывают, что рассмотрение аналогично § 1 с заменой ε_n в матрице перехода (1.9). В данном случае параметр ε_n зависит от амплитуды A_n и фазы φ_n , и поэтому матрица перехода является нелинейной.

Аналогично (1.24), получаем критерий стохастичности

$$K = \max (\varepsilon_n^0, (\varepsilon_n^0)^2) \alpha G^2 \omega / \Omega \gg 1 \quad (3.3)$$

или, подставляя значение ε_n^0 из (4.2),

$$K = \alpha G P \omega / \Omega \gg 1 \quad (P \ll G), \quad K = \alpha P^2 \omega / \Omega \gg 1 \quad (P \gg G) \quad (3.4)$$

В последнем неравенстве уравнения (3.4) предполагается выполненным условие малости нелинейного члена αx^2 в уравнении (3.1)

$$\alpha P^2 \ll 1$$

§ 4. Заключительные замечания. 1. Различные случаи, рассмотренные в §§ 1–3, показывают, что общая идея получения критерия стохастичности связана с построением матрицы перехода, соответствующей оператору сдвига во времени, и в определении эффективного параметра ε , характеризующего относительное изменение адиабатического инварианта системы. Ясно, что легко провести вывод критерия на случай малой нелинейности произвольного вида и для $F(t)$ такой, что

$$F_{\varepsilon}^{(n)}(t) = Q \sum_k \delta(t - t_k) \quad (4.1)$$

где порядок производной n любой.

2. В случае, когда $F(t) = A \sin \Omega t$, рассмотренном в § 2, роль $F(t)$ может играть другой осциллятор y с настолько большой инерцией, чтобы влиянием осциллятора x на y в первом порядке можно было пренебречь. Подобного рода задача рассматривалась в [8].

3. Последнее замечание связано с очень серьезным вопросом о времени, в течение которого можно применять полученные результаты. При выполнении критерия стохастичности можно описывать поведение системы кинетическим уравнением. Однако по истечении большого времени нелинейность в среднем становится большой, и для исследования задачи необходимы другие методы. Вопрос об оценке такого времени остается открытым.

В заключение благодарю Р. З. Сагдеева, обратившего внимание автора на круг рассмотренных задач, Б. В. Чирикова — за полезные советы и замечания.

Приложение 1. Оценим влияние на решения (2.4) точек t^* таких, что $\omega(t^*) = 0$. В соответствии с (1.5) и (1.6), особенности t^* удовлетворяют уравнению

$$1 + \alpha G^2 \cos^2 \omega t^* = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

Отсюда следует, что корни (A.1.1) лежат в комплексной плоскости очень далеко от действительной оси и периодически следуют вдоль действительной оси с частотой ω . Вклад такого рода особенностей в изменение амплитуды решения экспоненциально мал и порядка

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\beta} \right\} \ll 1, \quad \beta = \frac{d \ln \omega}{dt} \left(\frac{d \ln x}{dt} \right)^{-1} \ll 1 \quad (\text{A.1.2})$$

Здесь β — «параметр медленности».

Оценивая β согласно (1.2), (A.1.2), легко находим $\beta \sim \sqrt{\alpha G^2}$. Отсюда полное изменение амплитуды ΔG между двумя последовательными толчками равно

$$\frac{\Delta G}{G} \sim \frac{\omega}{\Omega} \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\alpha G^2}} \right\} \quad (\text{A.1.3})$$

С другой стороны, изменение вследствие толчка $\Delta G / G \sim \varepsilon = a / \omega$. Это

$$\frac{\omega}{\Omega} \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\alpha G^2}} \right\} \ll \frac{a}{\omega} \quad (\text{A.1.4})$$

Неравенство (A.1.4) благодаря экспоненциальной малости левой части легко может быть выполнено одновременно с критерием стохастичности (1.21).

Приложение 2. Пусть на каком-то шагу фаза осциллятора $\varphi_0 \ll K^{-1}$. Оценим время пребывания системы в области, в которой критерий стохастичности не выполняется, т. е. $\varphi \lesssim K^{-1}$. Эта оценка, вследствие малости размеров области ($K^{-1} \ll 1$), очевидно, равным образом относится к уравнениям (1.15), (1.16). В соответствии с этими уравнениями движения, для φ имеем

$$\varphi_1 = K\varphi_0, \quad \varphi_2 = K^2\varphi_0, \dots, \quad \varphi(t) \sim K^{\Omega t} \varphi_0 \quad (\Omega t \gg 1) \quad (\text{A.2.1})$$

Из условия достижения границы стохастичности и (A.2.1) получаем время t_0 пребывания системы в области $\varphi_0 K \ll 1$

$$t_0 \sim \frac{\ln \varphi_0^{-1}}{\Omega \ln K} \sim \tau_0 \ln \frac{1}{\varphi_0}$$

Из (A.2.2) и (1.22) следует, что $t_0 \gg \tau_0$. Отсюда — вероятность подобной флуктуации с $\varphi_0 \ll K^{-1}$ экспоненциально мала ($\sim \exp(-t_0 / \tau_0)$). Если $\varphi_0 \leq 1$, то из (A.2.1) видно, что система за несколько толчков достигает стохастической области.

Отличие уравнения (1.16) от (1.15) сказывается, в частности, в том, что в первом случае имеются три области, вероятность попадания системы в которые экспоненциально мала. В особом исследовании, которое здесь проводится, не будет, нуждается оценка времени пребывания системы в области φ , в которой $|K \cos \varphi| < 1$.

Поступила 20 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. н., 1963, т. 18, № 1, стр. 91.
3. Синай Я. Г. О потоках с конечной энтропией. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 6, стр. 1200.
4. Синай Я. Г. Вероятностные идеи в эргодической теории. Тр. Международного конгресса по математике, 1962, стр. 540.
5. Чириков Б. В. Резонансные процессы в магнитных ловушках. Атомная энергия, 1959, т. 6, стр. 630.
6. Заславский Г. М., Чириков Б. В. О механизме одномерного ускорения Ферми. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2, стр. 306.
7. Израйлев Ф. М., Чириков Б. В. Статистические свойства нелинейной струны. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 1, стр. 57.
8. Заславский Г. М. Асимптотический метод изучения неравновесных систем. ПМТФ, 1966, № 2.
9. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Изд. «Мир», 1965.
10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
11. Рохин В. А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 4, стр. 499.