УДК 539.376+539.135

НЕЛИНЕЙНЫЙ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГИЙ ОСЦИЛЛЯТОР ПРИ МОНОГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Ю. И. Карковский, С. И. Мешков

(Куйбышев)

Исследование стационарного режима вынужденных колебаний наследственно-упругой одномассовой системы при учете трех слагаемых ряда кратно-интегральных соотношений Вольтерра — Фреше [1] позволяет установить основные закономерности частотной зависимости амплитуды и фазы [2]. Дальнейший интерес представляет аналогичная задача при учете всех слагаемых ряда кратно-интегральных соотношений. Ниже приводится реализация такой возможности в общем случае. В качестве конкретного примера рассмотрены сепарабельные весовые функции, состоящие из произведения экспоненциальных ядер релаксации с выделением мгновенной части.

1. Для одномерного осциллятора, возбуждаемого внешней моногармонической силой, уравнение движения относительно координаты записывается в виде

$$M\ddot{x}+f(x,\ \dot{x})=b\cos\omega t, \tag{1.1}$$

где M — масса; $f(x,\ \dot{x})$ — восстанавливающая сила системы; b — амплитуда вынуждающей силы; ω — циклическая частота; t — время.

Согласно методу эквивалентной линеаризации [3], уравнение (1.1) можно переписать:

$$M\ddot{x}+\omega^{-1}\eta\dot{x}+kx+\varepsilon(x,\ \dot{x})=b\cos\omega t. \tag{1.2}$$

Здесь $\varepsilon(x,\ \dot{x})$ означает погрешность, возникающую при замене нелинейной функции $f(x,\ \dot{x})$ эквивалентной линейной вязко-упругой частью

$$\varepsilon(x,\ \dot{x})=f(x,\ \dot{x})-kx-\omega^{-1}\eta\dot{x}. \tag{1.3}$$

Стационарное решение уравнения (1.2) при $\varepsilon(x,\ \dot{x})=0$

$$x=a\cos\theta,\ \theta=\omega t-\varphi \tag{1.4}$$

позволяет найти амплитуду a и тангенс угла сдвига фаз

$$a=b\,[\eta^2+(k-M\omega^2)^2]^{-\frac{1}{2}};\quad \operatorname{tg}\varphi=\eta\,(k-M\omega^2)^{-1}. \tag{1.5}$$

Коэффициенты k и η определяются из условия минимальности ошибки $\varepsilon(x,\dot{x})$, которое записывается в виде двух равенств, осредненных по периоду колебаний [4]

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial k}[\varepsilon(x,\dot{x})]^2\right\rangle=0;\quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta}[\varepsilon(x,\dot{x})]^2\right\rangle=0. \tag{1.6}$$

Этот критерий оптимальности для величин k и η является наилучшим [5] при замене нелинейного уравнения (1.1) эквивалентным ему линеаризованным уравнением (1.2).

Подстановка (1.3), (1.4) в (1.6) приводит к формулам, учитывающим нелинейные свойства системы

$$(1.7)\qquad k=\frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a,\theta)\cos\theta d\theta,\quad \eta=-\frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a,\theta)\sin\theta d\theta.$$

Величина k играет роль динамического модуля, а η пропорциональна площади петли гистерезиса. Можно определить величину, обратную добротности системы Q^{-1}, принимаемую в качестве меры внутреннего трения

$$Q^{-1}=\frac{\Delta W}{2\pi W}=\frac{2}{\pi k a^2}\int_0^T \dot{x}\cos\omega t dt=\frac{b\sin\varphi}{ak}=\frac{\eta}{k}.$$

Здесь при вычислении упругой энергии деформирования W использован динамический модуль. Величина, обратная добротности Q^{-1}, совпадает с тангенсом угла сдвига фаз $\operatorname{tg}\varphi$ в квазистатическом случае, т. е. при $M=0$.

2. Приведенный метод расчета можно применить к наследственно-упругой системе

$$(2.1)\qquad f(x,\dot{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\overset{n}{\cdots}\int g_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{i=1}^{n} x(t-t_i)\,dt_i.$$

Подстановка (2.1) с учетом (1.4) в (1.7) позволяет найти коэффициенты эквивалентной линеаризации.

Ограничиваясь для простоты сепарабельными [6] весовыми функциями

$$(2.2)\qquad g_n(t_1,\ldots,t_n)=\prod_{i=1}^{n} g(t_i);\quad g(t)=E_\infty[\delta(t)-\nu_\varepsilon R(t)],$$

$$\nu_\varepsilon\equiv(E_\infty-E_0)E_\infty^{-1},$$

где $R(t)$ — ядро релаксации; $\delta(t)$ — дельта-функция; E_∞ и E_0 — соответственно нерелаксированное и релаксированное значения упругого модуля, можно получить

$$(2.3)\qquad k=g'(\omega)F\left(1,\frac{3}{2};\,2;\,1-y^2\right)=g'(\omega)\frac{2}{y(1+y)};$$

$$\eta=-g''(\omega)\frac{2}{y(1+y)};\qquad y\equiv\sqrt{1-a^2|g(\omega)|^2}.$$

Здесь $F\left(1,\frac{3}{2};\,2;\,1-y^2\right)$ —гипергеометрическая функция [7],

$$(2.4)\qquad g(\omega)\equiv\int_0^{\infty} g(t)\exp(-i\omega t)\,dt;$$

$$g'(\omega)\equiv\operatorname{Re}g(\omega),\quad g''(\omega)\equiv-\operatorname{Im}g(\omega).$$

Из первого соотношения (1.5) получается уравнение для определения амплитуды

$$(2.5)\qquad P(y)\equiv\Omega^4y^5+\Omega^4y^4+(b^2C-4A\Omega^2-\Omega^4)y^3+(b^2C-\Omega^4)y^2+4(C+ \\ +A\Omega^2)y-4C=0,$$

где введены обозначения

$$A \equiv E_\infty^{-1} g'(\omega), \quad C \equiv E_\infty^{-2} |g(\omega)|^2; \quad \Omega \equiv \omega\omega_\infty^{-1}, \quad \omega_\infty^2 \equiv E_\infty M^{-1}. \tag{2.6}$$

Решая уравнение (2.5) относительно y, можно найти амплитуду и тангенс угла сдвига фаз

$$a = E_\infty^{-1} \sqrt{(1-y^2)C^{-1}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{E_\infty^{-1} g''(\omega)}{A - \Omega^2 (y^2+y)\, 2^{-1}}. \tag{2.7}$$

В силу очевидных неравенств $P(0)=-4C<0$, $P(1)=2b^2C>0$, а также наличия одной или трех перемен знаков [8] в системе коэффициентов полинома $P(y)$ при любых значениях b и Ω можно установить, что на интервале $(0,1)$ уравнение (2.5) имеет не менее одного и не более трех корней. Поэтому амплитуда и фаза колебаний, определяемые по формулам (2.7), неоднозначны. Это — характерное свойство нелинейных систем [9].

В качестве конкретного примера интересно исследовать ядро релаксации, соответствующее стандартному линейному телу

$$R(t) = \tau_\varepsilon^{-1} \exp\left(-t\tau_\varepsilon^{-1}\right), \tag{2.8}$$

так как при

$$f(x, \dot{x}) = \int_0^\infty g(t') F[x(t-t')]\, dt',$$

где

$$F[x(t)] = x(t),$$

амплитуды стационарного режима имеют общую точку пересечения, определяемую «квазирезонансной» частотой [10].

Действительно, приравнивая к нулю производную от амплитуды по времени релаксации, из формулы (1.5) можно получить значение частоты

$$\omega_*^2 = \frac{1}{2M} \frac{\dfrac{\partial}{\partial\tau_\varepsilon}(k^2+\eta^2)}{\dfrac{\partial}{\partial\tau_\varepsilon} k} = \psi(a) \frac{\omega_\infty^2 + \omega_0^2}{2}. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\psi(a) \equiv \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a\cos\theta)\cos\theta\, d\theta, \quad \omega_0^2 \equiv E_0 M^{-1}.$$

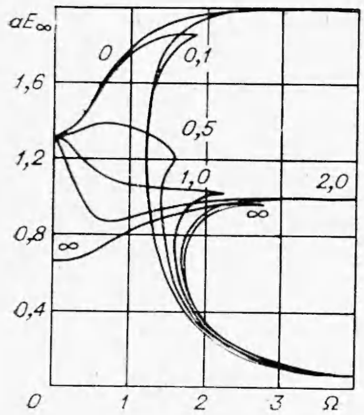
Коэффициенты k и η вычисляются по формулам (1.7).

Подстановка в (2.9) значений k и η из формул (2.3) с учетом (2.2), (2.4), (2.8) приводит к выражению

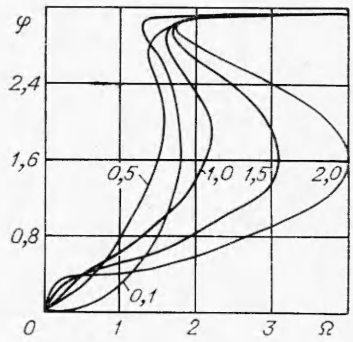
$$\omega_*^2 = \omega_\infty^2 \frac{1+y(1-y)}{y^3(1+y)} \left[\frac{2}{2-\nu_\varepsilon} + \frac{(1-y)(1+2y)}{2y^2} \frac{1-\nu_\varepsilon+\omega^2\tau_\varepsilon^2}{(1-\nu_\varepsilon)^2+\omega^2\tau_\varepsilon^2} \right]^{-1},$$

которое зависит от времени релаксации τ_ε. Поэтому общей точки пересечения амплитуд не существует в отличие от специального вида нелинейности, в частном случае эквивалентного предположению о подобии изохронных кривых ползучести [11], когда величина $x(t)$ имеет смысл перемещения. На фиг. 1, 2 приведены частотные зависимости амплитуды и угла сдвига фаз соответственно при следующих численных значениях параметров: $b=1$, $\nu_\varepsilon=0{,}5$. Цифры у кривых означают времена релаксации. На фиг. 1 верхняя ветвь кривой для $\tau_\varepsilon=\infty$, асимптотически стремящаяся к постоянному значению, равному E_∞^{-1}, при $\Omega\to\infty$ построена только в области частот $\Omega\in[0,\ 2,\ 5]$, чтобы избежать наложения на кривую, соответствующую $\tau_\varepsilon=2$, верхняя ветвь которой оканчивается в точке $\Omega\approx4$.

На фиг. 1 видно, что не существует общей точки пересечения амплитуд, которые остаются конечными при любых значениях частоты, в том числе и в обоих ассоциированных упругих случаях ($\tau_\varepsilon=0$, $\tau_\varepsilon=\infty$).



Фиг. 1



Фиг. 2

В этих предельных случаях для получения амплитуды как функции частоты удобно воспользоваться обратной зависимостью частоты от амплитуды, не прибегая к решению уравнения (2.5). Разрешая уравнение (1.5) относительно инерционного слагаемого, можно получить

$$\tau_\varepsilon=0,\quad \omega^2=\omega_0^2\left[F\left(1,\ \frac{3}{2};\ 2;\ a^2E_0^2\right)\pm\frac{b}{aE_0}\right];$$

при

$$\tau_\varepsilon=\infty,\quad \omega^2=\omega_\infty^2\left[F\left(1,\ \frac{3}{2};\ 2;\ a^2E_\infty^2\right)\pm\frac{b}{aE_\infty}\right].$$

Отсюда следует, что графики частотной зависимости амплитуд получаются один из другого изменением масштаба по осям a и ω. При $aE_0\to\to1$, $aE_\infty\to1$ и $a\to0$ значения ω^2 становятся сколь угодно большими. Следовательно, при $\Omega\to\infty$ уравнение (2.5) всегда имеет три корня

$$1>y_3>y_2>y_1>0;\quad y^2\equiv\begin{Bmatrix}1-aE_0\\1-aE_\infty\end{Bmatrix}. \tag{2.10}$$

При этом справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\Omega\to\infty}(y_1,y_2)=0;\quad \lim_{\Omega\to\infty}y_3=1. \tag{2.11}$$

Из выражений (2.10), (2.11) с учетом последней формулы (2.3) можно установить, что для ассоциированных упругих случаев существуют три значения амплитуды при любых достаточно больших частотах, причем

$$0 < a_3 < a_2 < a_1 < \begin{cases} E_0^{-1}, & \tau_\varepsilon = 0 \\ E_\infty^{-1}, & \tau_\varepsilon = \infty \end{cases}$$

и

$$\lim_{\omega\to\infty} (a_1, a_2) = \begin{cases} E_0^{-1}, & \tau_\varepsilon = 0 \\ E_\infty^{-1}, & \tau_\varepsilon = \infty \end{cases}, \quad \lim_{\omega\to\infty} a_3 = 0.$$

Так как при малых Ω система коэффициентов уравнения (2.5) имеет всего одну перемену знаков, то в этом случае имеется только один положительный корень. Частота, начиная с которой уравнение (2.5) имеет три положительных корня, определяется по формуле

$$\Omega_+^2 = F\left(1, \frac{3}{2}; 2; z_*\right) + \frac{b}{z_*}, \quad \Omega_+^2 = \begin{cases} \omega^2\omega_0^{-2} \\ \omega^2\omega_\infty^{-2} \end{cases}.$$

Здесь z_* представляет собой корень уравнения

$$\frac{d}{dz}\left[F\left(1, \frac{3}{2}; 2; z\right) + \frac{b}{z}\right] = 0,$$

которое заменой переменной

$$z = 2\xi(1+\xi^2)^{-1}$$

приводится к виду

$$\xi^5 + \xi^3 + 12^{-1}b\xi^2 - 12^{-1}b = 0.$$

Для всех промежуточных времен релаксации $0 < \tau_\varepsilon < \infty$ амплитуды и фазы вычислялись по формулам (2.7). При этом значения y, принадлежащие интервалу (0,1), определялись из уравнения (2.5), коэффициенты которого для каждой частоты вычислялись по формулам (2.6) с учетом (2.2), (2.4), (2.8).

Таким образом, исследование стационарного режима вынужденных колебаний нелинейного наследственно-упругого осциллятора методом эквивалентной линеаризации позволяет выяснить основные особенности частотной зависимости амплитуд и фаз колебаний для разных значений реологических параметров. Показано, что даже для экспоненциальных ядер релаксации не существует общей точки пересечения амплитуд, имеющей место в линейном случае [12], а также для нелинейности специального вида [10], когда интегральный оператор представляет собой оператор Гаммерштейна [13], т. е. произведение линейного оператора на нелинейный оператор суперпозиции.

Поступила 10 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations. N. Y., 1959.
2. *Мешков С. И.* Стационарный режим нелинейного наследственно-упругого осциллятора.— ПМТФ, 1970, № 3, с. 111.
3. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. Киев, изд. АН УССР, 1937.

4. *Iwan W. D.* A distributed-element model for hysteresis and its steady state dynamic response.— «Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.», 1966, vol. 33, N 4, p. 893. Русский перевод: Айвен. «Распределенная» модель гистерезисных явлений и ее поведение при установившихся вынужденных колебаниях. М., «Мир», 1966.
5. *Блаквер О.* Анализ нелинейных систем. М., «Мир», 1969.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
8. *Ван Трис Г.* Синтез оптимальных нелинейных систем управления. М., «Мир», 1964.
9. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. 10-е изд. М., «Наука», 1971.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
11. *Блитштейн Ю. М., Мешков С. И., Чебан В. Г.* К определению параметров релаксационного спектра при вынужденных колебаниях наследственно-упругого осциллятора. Прикладная математика и программирование. Кишинев, изд. АН МССР, 1970, вып. 3, с. 3.
12. *Мешков С. И., Шермергор Т. Д., Постников В. С.* Вынужденные колебания стандартного линейного тела.— В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев, «Наукова думка», 1966.
13. *Забрейко П. П. и др.* Интегральные уравнения. Сер. Справочная и математическая библиотека. М., «Наука», 1968.

УДК 539.374

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Для предотвращения концентрации напряжений представляет интерес отыскание контура тела, который не имеет каких-либо предпочтительных для хрупкого разрушения или пластической деформации участков. Такой контур называется «равнопрочным».

Рассматривается плоская задача об отыскании «равнопрочной» формы отверстия в анизотропной среде. Критерием, определяющим «равнопрочную» форму отверстия, служит условие отсутствия концентрации напряжений на контуре отверстия.

Обратная задача теории упругости для изотропной среды была решена в работе [1].

Рассмотрим задачу об определении «равнопрочного» контура отверстия в анизотропной среде, находящейся в однородном поле напряжений

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty,\ \sigma_y = \sigma_y^\infty,\ \tau_{xy} = 0.$$

Пусть на неизвестном контуре отверстия L приложены постоянная нормальная нагрузка и равная нулю касательная

$$\sigma_n = -p,\ \tau_{tn} = 0 \tag{1}$$

(t и n — направления касательной и нормали к L).