

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ КОНЕЧНОГО ИЗГИБА ТОНКОСТЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБ

С. В. Левяков

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск

Рассматривается система нелинейных уравнений Э. Рейсснера для задачи об упругом деформировании тонкостенных криволинейных труб при чистом изгибе. Уточняется формулировка задачи и проводится сравнение численного решения уравнений с результатами конечно-элементного анализа.

Введение. Одно из направлений исследования устойчивости труб при изгибе связано с учетом докритического деформирования (сплющивания) поперечных сечений. В [1] исследовано нелинейное деформирование тонкостенной цилиндрической оболочки при чистом изгибе и вычислено критическое значение изгибающего момента, при котором происходит потеря устойчивости в результате прогрессирующего сплющивания поперечных сечений оболочки. В [1] анализ основывался на предположении, что сплющивание постоянно по длине трубы. Это позволило рассматривать задачу в одномерной постановке. Исследования, проводимые в этом направлении, обзор которых можно найти, например, в [2, 3], посвящены уточнению результатов работы [1] и развитию теории конечного изгиба труб с криволинейной осью.

В [4] показано, что задача о плоском конечном изгибе криволинейной тонкостенной трубы произвольного поперечного сечения сводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, которая дополняется двумя интегральными условиями. Однако в известной автору литературе какие-либо решения полученных уравнений отсутствуют.

В настоящей работе уточняется формулировка задачи, предложенная в [4]. Для случая кругового поперечного сечения исследуется влияние геометрических параметров трубы и проводится сравнение с конечно-элементным решением.

Постановка задачи и разрешающие уравнения. Тонкостенная криволинейная труба с радиусом поперечного сечения b и радиусом кривизны осевой линии a нагружена в плоскости кривизны внешним изгибающим моментом M (см. рисунок). В деформированном состоянии труба является тороидальной оболочкой, для которой форма поперечного сечения и радиус кривизны осевой линии ρ не известны. Так как поперечное сечение оболочки сохраняет симметрию относительно оси r , при построении решений достаточно рассмотреть половину поперечного сечения и искать решение в интервале $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$.

Согласно [4] система разрешающих уравнений задачи включает:

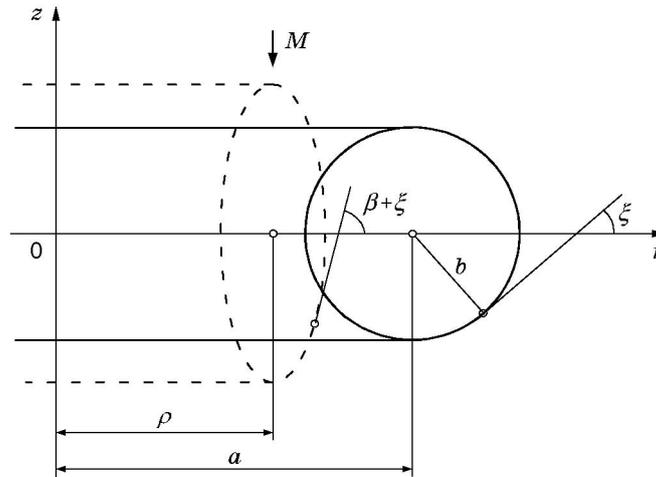
— уравнение совместности деформаций

$$\frac{aB}{b^2} \left[\left(1 + \frac{b}{a} \sin \xi \right) \Psi' \right]' = k \cos \xi + (1 + k) [\cos (\beta + \xi) - \cos \xi];$$

— уравнение равновесия изгибающих моментов

$$\frac{aD}{b^2} \left[\left(1 + \frac{b}{a} \sin \xi \right) \beta' \right]' = (1 + k) \Psi \sin (\beta + \xi) - C \cos (\beta + \xi),$$

общее решение которых подчиняется граничным условиям $\Psi(\pm\pi/2) = 0$, $\beta(\pm\pi/2) = 0$;



— интегральные условия равновесия, из которых определяются параметры k и C :

$$\begin{aligned} -2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi \cos(\beta + \xi) d\xi &= M; \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Psi \sin(\beta + \xi) d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Psi(\xi)$ — функция напряжений; $\beta(\xi)$ — угол поворота касательной к контуру поперечного сечения; $k = a/\rho - 1$; B, D — коэффициенты упругости; C — неизвестный параметр, имеющий смысл внутреннего усилия, действующего в направлении оси z ; штрихом обозначена производная по координате ξ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (1) получено из условия равенства нулю изгибающего момента относительно оси r [4]

$$\oint \Psi \sin(\beta + \xi) d\xi = 0, \quad (2)$$

которое, как нетрудно показать, удовлетворяется тождественно в силу симметрии распределения деформаций и напряжений относительно оси r и, следовательно, не может использоваться в качестве дополнительного условия. Переход от интеграла (2) по замкнутому контуру к интегралу (1) по области $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$ не правомерен, так как при этом нарушается смысл условия (2). Поэтому вместо (1) следует использовать условие

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\beta + \xi) d\xi = 0,$$

которое означает равенство ординат точек сечения $\xi = -\pi/2$ и $\xi = \pi/2$.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \psi = \sqrt{\frac{B}{D}} \Psi, \quad \mu = \frac{b^2}{a\sqrt{BD}}, \quad \alpha = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a}\right) \frac{b^2}{\sqrt{BD}}, \quad c = C \frac{b^2}{aD}, \quad m = \frac{M}{\pi b} \sqrt{\frac{B}{D}}. \quad (3)$$

С учетом замечания и (3) система для определения функций ψ, β и параметров α, c принимает вид

$$[(1 + \lambda \sin \xi)\psi']' - (\mu + \alpha) \cos(\beta + \xi) + \mu \cos \xi = 0; \quad (4)$$

$$[(1 + \lambda \sin \xi)\beta']' - (\mu + \alpha)\psi \sin(\beta + \xi) + c \cos(\beta + \xi) = 0; \quad (5)$$

$$\psi(\pm\pi/2) = 0, \quad \beta(\pm\pi/2) = 0; \quad (6)$$

$$-\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \cos(\beta + \xi) d\xi = m; \quad (7)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\beta + \xi) d\xi = 0. \quad (8)$$

Численный метод решения задачи. Используем пошаговый процесс построения решения системы нелинейных уравнений (4)–(8) с итерационным уточнением решения методом Ньютона. В качестве параметра продолжения решения примем параметр искривления осевой линии оболочки α . Заменяя производные в (4), (5) конечными разностями и используя в (8) численное интегрирование по правилу трапеций, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_i \delta\psi_{i-1} - 2\delta\psi_i + B_i \delta\psi_{i+1} + C_i \delta\beta_i &= D_i, \\ A_i \delta\beta_{i-1} - E_i \delta\beta_i + B_i \delta\beta_{i+1} - C_i \delta\psi_i + F_i \delta c &= G_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \sum_{i=1}^{n-1} \cos(\xi_i + \beta_i) \delta\beta_i &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sin(\xi_i + \beta_i), \end{aligned}$$

где

$$A_i = 1 - \frac{h}{2} \frac{\lambda \cos \xi_i}{1 + \lambda \sin \xi_i}, \quad B_i = 1 + \frac{h}{2} \frac{\lambda \cos \xi_i}{1 + \lambda \sin \xi_i}, \quad C_i = q_i(\mu + \alpha) \sin(\xi_i + \beta_i),$$

$$D_i = -A_i\psi_{i-1} + 2\psi_i - B_i\psi_{i+1} + q_i[(\mu + \alpha) \cos(\xi_i + \beta_i) - \mu \cos \xi_i],$$

$$E_i = 2 + q_i[\psi_i(\mu + \alpha) \cos(\xi_i + \beta_i) + c \sin(\xi_i + \beta_i)],$$

$$F_i = q_i \cos(\xi_i + \beta_i), \quad G_i = -A_i\beta_{i-1} + 2\beta_i - B_i\beta_{i+1} + C_i\psi_i - F_i c, \quad q_i = h^2/(1 + \lambda \sin \xi_i),$$

n — число равных отрезков длиной h , на которые разбивается интервал $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$.

Граничные условия имеют вид $\delta\beta_0 = \delta\beta_n = \delta\psi_0 = \delta\psi_n = 0$.

В качестве начального приближения можно использовать нулевое решение. В этом случае первая итерация на первом шаге процесса дает линейное решение задачи.

Результаты расчетов. Рассмотрим изотропный материал оболочки с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Учитывая, что $B = 1/(Et)$, $D = Et^3/(12(1 - \nu^2))$ (t — толщина оболочки), согласно (3) параметр начальной кривизны трубы представим в виде $\mu = \sqrt{12(1 - \nu^2)} (b/t)\lambda$.

Исследуем решение уравнений (4)–(8) в зависимости от геометрических параметров λ и b/t для $\nu = 0,3$. Ограничимся случаем, когда внешний изгибающий момент увеличивает кривизну трубы. В таблице приведены следующие характеристики критического состояния: безразмерный изгибающий момент m , относительное сплющивание поперечного сечения $\delta = 1 - \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\xi + \beta) d\xi$ и искривление поперечного сечения $\varkappa(0) = \beta'(0) - 1$ в

точке $\xi = 0$. Заметим, что значения m_{cr} , δ_{cr} , \varkappa_{cr} , стоящие в таблице на диагоналях, соответствуют одному и тому же значению параметра μ . Это позволяет исследовать влияние параметров λ и b/t , соответствующих фиксированному значению μ .

λ	m_{cr}			δ_{cr}			$\varepsilon_{cr}(0)$		
	$b/t = 25$	$b/t = 50$	$b/t = 100$	$b/t = 25$	$b/t = 50$	$b/t = 100$	$b/t = 25$	$b/t = 50$	$b/t = 100$
0,500	0,1642 (0,1703)	0,1195 (0,1226)	0,0862 (0,0877)	0,3139 (0,3326)	0,2879 (0,3011)	0,2692 (0,2769)	3,368 (3,542)	4,929 (5,145)	7,152 (7,343)
0,250	0,2229 (0,2249)	0,1642 (0,1653)	0,1195 (0,1200)	0,3484 (0,3525)	0,3138 (0,3168)	0,2880 (0,2894)	2,249 (2,245)	3,367 (3,383)	4,930 (4,941)
0,125	0,2979 (0,2984)	0,2228 (0,2232)	0,1639 (0,1643)	0,3980 (0,3987)	0,3483 (0,3489)	0,3138 (0,3139)	1,443 (1,428)	2,248 (2,242)	3,366 (3,359)

Примечание. В скобках приведены значения, полученные с использованием конечно-элементного алгоритма [3].

Из приведенных данных следует, что решения уравнений (4)–(8) близки к результатам, полученным с помощью конечно-элементной модели. Наибольшее различие сравниваемых решений наблюдается для труб с большой начальной кривизной и относительно толстой стенкой и не превышает 6 %. Данное различие можно объяснить тем, что уравнения (4)–(8) выведены при предположении, что меридиональная деформация и окружной изгибающий момент равны нулю.

Анализ данных, приведенных в таблице, показывает, что определяющим геометрическим параметром криволинейной трубы является μ , т. е. варьирование λ и b/t при постоянном значении μ слабо влияет на результаты. Например, уменьшение λ от 0,5 до 0,125 при $\mu = 41,307$ приводит к уменьшению критического момента m_{cr} лишь на 0,02 %. Следовательно, влиянием параметра λ в уравнениях (4), (5) можно пренебречь. Этот вывод подтверждается результатами численного решения уравнений (4)–(8) при $\lambda = 0$. Полученные в этом случае результаты совпадают (с точностью до трех цифр после запятой) с представленными в таблице. При этом установлено, что $c = 0$. Данные результаты позволяют рекомендовать упрощенный вариант уравнений, которые получаются из (4), (5), если отбросить члены с множителями λ и c , при этом следует отказаться от условия (8). Именно такой вариант уравнений рассматривался в работе [5], однако полученные в [5] приближенные решения имеют ограниченную область применения.

Заключение. Рассмотрена геометрически нелинейная формулировка задачи о чистом изгибе тонкостенной криволинейной трубы, предложенная в [4]. Уточнение системы разрешающих уравнений состоит в замене интегрального условия равновесия кинематическим условием, отражающим симметрию деформирования поперечного сечения. Численное решение уравнений показывает хорошее соответствие полученных результатов уточненному конечно-элементному решению в широком диапазоне геометрических параметров трубы. Учет параметров λ и c в уравнениях (4)–(8) слабо влияет на результаты расчетов. Основным параметром, определяющим начальную геометрию криволинейной трубы, является μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brazier L. G.** On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1927. V. 116. P. 104–114.
2. **Spence J., Toh S. L.** Collapse of thin orthotropic, elliptical cylindrical shells under combined bending and pressure loads // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. P. 363–371.

3. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Нелинейная задача Кармана для тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 2. С. 136–142.
4. **Reissner E.** On the finite pure bending of curved tubes // Intern. J. Solids Structures. 1981. V. 17. P. 839–844.
5. **Аксельрад Э. Л.** Изгиб тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1961. № 3. С. 124–132.

Поступила в редакцию 16/IV 2001 г.
