

5. Бувич Ю. А., Марков В. Г. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензий измеренной концентрации. — ПММ, 1973, № 6.
6. Бувич Ю. А., Корнеева Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде. — ПМТФ, 1974, № 4.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М., 1947.
8. Милн-Томсон. Теоретическая гидродинамика. М., 1964.
9. Воинов О. В. Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости. — В сб.: Научная конференция. М., изд. Ин-та механ. МГУ, 1970.
10. Гарипов Р. М. Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. — ПМТФ, 1973, № 6.
11. Головин А. М., Чижев В. Е. К расчету бинарной коррелятивной функции в двухфазной системе. — ПММ, 1977, № 6.

УДК 532.526

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ СТРУЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Бобнев, С. М. Хайтман
(Новосибирск)

В [1] было получено автомодельное решение для температуры в плоской полуограниченной струе. Для нахождения температурной константы автомодельности $\alpha_T = 1/2$ использовалось интегральное условие сохранения

$$\int_0^{\infty} uT \left(\int_0^y u dy \right) dy = \text{const},$$

которое вообще не выполняется (этот интеграл не зависит от продольной координаты только в предположении о подобии профилей скорости и температуры при числе Прандтля, равном единице). В данной работе построены автомодельные решения при разных числах Прандтля, установлена зависимость константы автомодельности от числа Прандтля.

Задачу о плоской ламинарной полуограниченной струе, движущейся вдоль твердой стенки, в приближении пограничного слоя можно записать в безразмерном виде

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

$$(3) \quad u = v = 0 \text{ при } y = 0, \quad u = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty;$$

$$(4) \quad T = 0 \text{ при } y = 0, \quad T = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty,$$

где $x, yR^{-3/4}$ — декартовы прямоугольные координаты (x, y — внутренние координаты в соответствующем пределе пограничного слоя асимптотическом разложении по малому параметру R^{-1}); $R = (L_m I_m / \rho_m)^{1/3} / \mu_m$ — некоторый аналог числа Рейнольдса; $uR^{1/2}, vR^{-1/4}$ — продольная и поперечная составляющие скорости; T — разность температур в данной точке и на бесконечности; $\text{Pr} = c_{pm} \mu_m / \lambda_m$ — число Прандтля. При безразмеривании считались заданными масштабы удельной теплоемкости при постоянном давлении c_{pm} , динамической вязкости μ_m , теплопровод-

ности λ_m , длины L_m , плотности ρ_m , температуры T_m , инварианта Акатнова

$$I_m = \rho_m V_m^3 L_m^2 \int_0^\infty u^2 \left(\int_0^y u dy \right) dy.$$

В качестве масштаба скорости выбрали

$$V_m = (I_m / \rho_m L_m^2)^{1/3}.$$

Для задач (1)–(4) следовало бы поставить начальные условия при $x = x_0$, однако в рамках данной работы будут рассматриваться только автомодельные решения. Для замыкания динамической задачи (1), (3) сформируем условие сохранения Акатнова

$$(5) \quad \int_0^\infty u^2 \left(\int_0^y u dy \right) dy = 1.$$

Что же касается тепловой задачи, то из ее вида следует, что решения (2), (4) определяются с точностью до постоянного множителя, величину которого пока задавать не будем.

Задача (1) – (5) допускает автомодельное решение

$$(6) \quad u(x, y) = x^{-1/2} F'(\eta), \quad v(x, y) = x^{-3/4} V(\eta), \quad T(x, y) = x^{\alpha_T} \Theta(\eta), \quad y = \eta x^{3/4},$$

здесь и в дальнейшем штрих означает производную по η ; F, V, Θ, η – автомодельные переменные. Подставив (6) в (1) – (5), получим для динамической задачи

$$(7) \quad 4F''' + F''F + 2F'^2 = 0, \quad F = F' = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad F' = 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty;$$

$$(8) \quad \int_0^\infty FF'^2 d\eta = 1,$$

а для тепловой

$$(9) \quad \Theta'' + \text{Pr} \left(\frac{4}{3} F\Theta' - \alpha_T F'\Theta \right) = 0, \quad \Theta = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad \Theta = 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty,$$

причем для нахождения поперечной скорости можно использовать формулу

$$V = (1/4)(3\eta F' - F).$$

Линейное однородное уравнение с однородными граничными условиями (9) представляет сингулярную краевую задачу о собственных значениях, роль собственного значения при этом выполняет параметр α_T . Задача (9) имеет, по-видимому, счетное множество решений. Из этого множества из физических соображений выбиралось знакоположительное решение. Численные расчеты показали, что оно единственно.

Задачи (7), (9) инвариантны к преобразованию

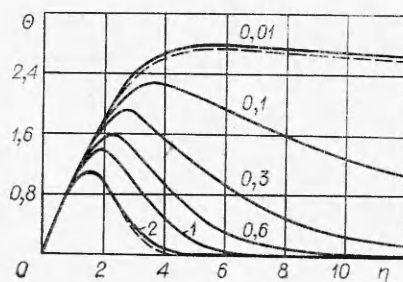
$$(10) \quad F \rightarrow C_1 F, \quad \Theta \rightarrow C_2 \Theta, \quad \eta \rightarrow C_1^{-1} \eta,$$

т. е. вместо инварианта Акатнова (8) можно использовать для задачи (7) условие нетривиальности в форме

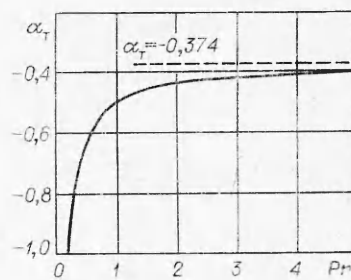
$$(11) \quad F'' = 1 \text{ при } \eta = 0,$$

а при нормировке решения для температуры выбрать условие

$$(12) \quad \Theta' = 1 \text{ при } \eta = 0.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, с помощью (10) краевую задачу (7), (8) привели к задаче Коши (7), (11). Решив задачи (7), (11), (9), (12), можно затем, воспользовавшись инвариантными свойствами (10), пронормировать решения согласно (8) или же каким-либо другим образом. Задача (7), (11), (9), (12) была решена численно при разных значениях числа Прандтля. На фиг. 1 представлено семейство кривых Θ как функции η , числа y кривых соответствуют числу Прандтля. Профиль $F'(\eta)$, характеризующий продольную скорость (6), совпадает с профилем безразмерной температуры при $Pr = 1$. Максимум профиля температуры при $Pr \rightarrow 0$ смещается в сторону увеличения координаты η (т. е. удаляется от стенки при фиксированной координате x). Температура с ростом η (или y при фиксированном x) убывает медленнее при малых числах Прандтля по сравнению с небольшими. При $Pr \gg 1$ температурный профиль становится значительно «уже» динамического ($Pr = 1$), и, наоборот, при $Pr \rightarrow 0$ «толщина» температурного профиля устремляется к бесконечности. Отметим, что инвариант Акатнова для задачи (7), (11) оказался равным

$$\int_0^{\infty} u^2 \left(\int_0^y u dy \right) dy = 7,49.$$

Значение этой постоянной будет необходимо, если возникнет необходимость пронормировать решение согласно (8).

На фиг. 2 изображена зависимость температурной константы автомодельности α_T (собственного значения задачи (9)) от числа Прандтля. Видно, что $\alpha_T \rightarrow \text{const}$ при $Pr \rightarrow \infty$ и $\alpha_T \rightarrow -\infty$ при $Pr \rightarrow 0$. Из формул (6) следует, что при $Pr \rightarrow 0$ ($\alpha_T \rightarrow -\infty$) разность температур в струе и на бесконечности быстро затухает (эквивалент «большой» теплопроводности), а при $Pr \rightarrow \infty$ максимальная температура в струе затухает независимо от числа Прандтля, так как при этом $\alpha_T \rightarrow \text{const}$.

Поясним предельное поведение решений задачи (7), (11), (9), (12) в случаях сколь угодно больших и сколь угодно малых значений числа Прандтля. При исследовании будут использованы идеи и терминология методов возмущений [2].

Пусть

$$(13) \quad \varepsilon = 1/Pr \rightarrow 0.$$

Тогда асимптотическое разложение, связанное с внутренним предельным процессом, когда

(14) $\xi = \eta/\delta(\varepsilon)$ фиксировано, $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно построить в виде

$$(15) \quad \Theta(\varepsilon, \eta) = v_0(\varepsilon)\Theta_0(\xi) + \dots, \quad \alpha_T(\varepsilon) = \alpha_0 + \dots, \quad F(\eta) = F_0\delta^2\xi^2 + \dots,$$

где выписаны лишь нулевые (главные) члены разложений; $\delta(\varepsilon)$ — величина, характеризующая масштаб внутренней переменной ξ ;

$v_0(\epsilon)$ — нулевой член асимптотической последовательности для $\Theta(\epsilon, \eta)$. Из вида задачи (9), (12), (7), (11) следует

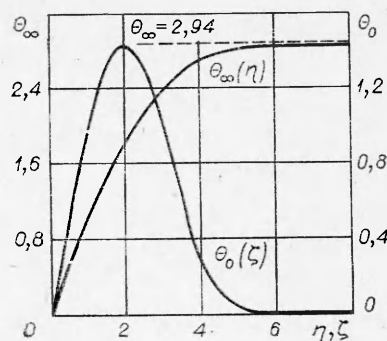
$$(16) \quad F_0 = 1/2, \quad v_0 = \delta = \epsilon^{1/2}.$$

Подставив ряды (15) в задачу (9), (12), получим на пределе (13), (14)

$$(17) \quad \frac{d^2 \Theta_0}{d\xi^2} = -\frac{1}{8} \xi^2 \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \alpha_0 \xi \Theta_0, \quad \Theta_0 = 0,$$

$$\Theta_0' = 1 \quad \text{при} \quad \xi = 0,$$

$$\Theta_0 = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$



Ф и г. 3

На фиг. 3 показано решение задачи о собственных значениях (17), полученное численным образом. Из расчетов следует, что собственное значение $\alpha_0 = -0,374$. Заметим, что возникшая в нулевом приближении по ϵ задача (17) удовлетворяет всем граничным условиям (в нуле и на бесконечности), т. е. в данном случае нет необходимости строить внешнее разложение и производить сращивание, и разложение решений задачи (7), (11), (9), (12) в виде (15) является равномерно пригодным по η .

На фиг. 1 штриховыми линиями показаны приближенные решения, соответствующие нулевому приближению разложения (15). Видно, что уже при $Pr = 2$ совпадение точного и приближенного решения удовлетворительно, т. е. даже при умеренно больших числах Прандтля можно исключить явным образом критерий подобия Pr и пользоваться для описания неизотермичного течения задачей (17), куда число Прандтля (ϵ) не входит.

Рассмотрим теперь случай $Pr \ll 1$. Пусть

$$(18) \quad \epsilon = Pr \rightarrow 0.$$

Для решений задачи (7), (11), (9), (12) рассмотрим сначала внешний предел, когда

$$(19) \quad \xi = \eta/\Delta(\epsilon) \text{ фиксировано, } \Delta \rightarrow \infty \text{ при } \epsilon \rightarrow 0,$$

где $\Delta(\epsilon)$ — величина, характеризующая масштаб внешней переменной ξ . Динамическая задача (7), (11) имеет аналитическое решение [1], которое при $\eta \rightarrow \infty$ экспоненциально стремится к постоянной

$$(20) \quad F = F_\infty + TST(\eta), \quad F' = TST(\eta) \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (F_\infty = 4,16),$$

т. е. в уравнении (9) на внешнем пределе член, содержащий F' , пропадает. Оставшиеся члены уравнения (9) будут иметь одинаковый порядок, если на внешнем пределе (19) положить

$$(21) \quad \Delta(\epsilon) = \epsilon^{-1}.$$

Тогда разложения, связанные с пределом (18), (19), (21), можно построить в виде

$$(22) \quad \Theta(\eta, \epsilon) = \tilde{v}_\infty(\epsilon) \tilde{\Theta}_\infty(\xi) + \dots, \quad F(\eta) = F_\infty + \dots$$

Подставив разложения (22) и имея в виду (18) — (21), получим в нулевом приближении по ϵ задачу

$$(23) \quad \frac{d^2 \tilde{\Theta}_\infty}{d\xi^2} = -\frac{1}{4} F_\infty \frac{d\tilde{\Theta}_\infty}{d\xi}, \quad \tilde{\Theta}_\infty = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Решением задачи (23) является

$$(24) \quad \tilde{\Theta}_{\infty} = \tilde{C}_{\infty} \exp \left(-\frac{1}{4} F_{\infty} \xi \right).$$

Величины $\tilde{v}_{\infty}(\varepsilon)$ в (22) и $\tilde{C}_{\infty}$ в (24) могут быть определены в дальнейшем из условия сращивания внешнего разложения с внутренним.

Для того чтобы построить разложение, пригодное вблизи границы $\eta = 0$, сформулируем внутренний предельный процесс, когда (25) η фиксировано при $\varepsilon \rightarrow 0$, а разложение решений задачи (9), (12) на пределе (18), (25) — в виде

$$(26) \quad \Theta(\varepsilon, \eta) = \Theta_{\infty}(\eta) + \dots, \alpha_T(\varepsilon) = \alpha_{\infty} \varepsilon^{-1} + \dots$$

Тогда, подставив (26) в задачу (9), (12) и имея в виду определения (18), (25), получим в нулевом приближении по ε задачу

$$(27) \quad \Theta''_{\infty} = \alpha_{\infty} F' \Theta_{\infty}, \quad \Theta_{\infty} = 0, \quad \Theta'_{\infty} = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Отметим, что при формулировании внутреннего предельного процесса (18), (25) и построении асимптотического разложения (26) руководствовались тем, чтобы: 1) в задачу нулевого приближения вошло собственное значение α_{∞} ; 2) предел (18), (25) был «характерным» (пределом пограничного слоя [2]).

Задача (27) при $\eta \rightarrow \infty$ (см. формулы (20)) имеет очевидное асимптотическое решение

$$(28) \quad \Theta_{\infty} = C_{\infty} + C_3 \eta + \text{TST}(\eta).$$

Из вида решения на внешнем пределе (24) следует, что в формуле (28) следует положить $C_3 = 0$. Таким образом, для задачи на внутреннем пределе (27) можно поставить условие

$$(29) \quad \Theta'_{\infty} = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Задача (27), (29) является задачей о собственных значениях. На фиг. 3 изображены рассчитанная численно функция Θ_{∞} от η . При $\eta \rightarrow \infty$ величина $\Theta_{\infty} = 2,94$. Собственное значение из расчета оказывается равным $\alpha_{\infty} = -0,125$. Срачивая внутреннее и внешнее разложения на пределе, промежуточном между внутренним и внешним, можно получить для внешнего разложения

$$\tilde{v}_{\infty}(\varepsilon) = 1, \quad \tilde{C}_{\infty} = C_{\infty} = 2,94.$$

Складывая внешнее и внутреннее разложения и вычитая общую часть, получим равномерно пригодное по η приближение

$$(30) \quad \Theta(\varepsilon, \eta) = \Theta_{\infty}(\eta) + C_{\infty} \left[\exp \left(-\frac{1}{4} F_{\infty} \varepsilon \eta \right) - 1 \right].$$

На фиг. 1 показано штриховыми линиями приближенное решение при $\text{Pr} = 0,01$. Очевидно удовлетворительное совпадение с точным решением. Таким образом, и при малых числах Прандтля можно исключить критерий подобия Pr и для описания температурного профиля будет справедлива формула (30).

При численном интегрировании использовался метод Рунге — Кутты. Собственные значения подбирались из условия равенства нулю температуры на бесконечности (или ее производной для задачи (27), (29)) методом деления отрезка пополам.

Поступила 19 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., Наука, 1965.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.

УДК 532.556.2 : 532.135

ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ
С КАВЕРНОЙ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ

Г. И. Бурдэ, Е. П. Ильясов, Ю. И. Терентьев,
Г. З. Файнбург
(Пермь)

Задача о течении жидкости в канале с каверной представляет интерес для многочисленных приложений. Различным вариантам этой задачи для случая ньютоновской жидкости посвящено значительное число работ (см. обзор [1]). Однако в литературе практически отсутствуют работы, рассматривающие аналогичные течения неньютоновских жидкостей [2, 3].

Между тем задача о течении вязкопластической жидкости в зазоре с углублением представляет интерес для практики нефтяного бурения, поскольку моделирует в известной степени процесс цементирования скважин с кавернами в стенках.

1. В качестве модели неньютоновской жидкости была выбрана квазипластическая жидкость Уильямсона [4], в которой эффективная вязкость η задается выражением $\eta = \eta_{\infty} + \tau_0/(b + I)$, где η_{∞} — динамическая ньютоновская вязкость при бесконечно больших скоростях сдвига; τ_0 — некоторый аналог предельного напряжения сдвига жидкости Бингама; b — параметр модели Уильямсона; I — корень квадратный из второго инварианта тензора скоростей деформации. При $b = 0$ модель описывает вязкопластическую жидкость Бингама; случаю ньютоновской жидкости соответствует $\tau_0 = 0$.

Безразмерные уравнения, определяющие плоское стационарное течение, запишем через функцию тока ψ и завихренность Ω :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \Delta (\psi \Omega) - \Omega \Delta \psi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right),$$

$$(1.1) \quad \Delta \psi = -\Omega,$$

$$\nu = 1 + T \left[B + \operatorname{Re} \left[4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right].$$

В качестве единиц измерения длины и скорости выбраны полуширина канала d и средняя скорость U , определяемая по расходу; $\nu = \eta/\eta_{\infty}$ — безразмерная эффективная вязкость. Уравнения (1.1) содержат три критерия подобия: $\operatorname{Re} = U \rho d / \eta_{\infty}$ — число Рейнольдса, $T = \tau_0 \rho d^2 / \eta_{\infty}^2$ — аналог числа Хедстрема для жидкости Бингама, $B = b \rho d^2 / \eta_{\infty}$ — безразмерный параметр модели Уильямсона.

Форму расчетной области можно видеть на фиг. 1, 2. В качестве граничных условий во входном и выходном сечениях, расположенных на достаточном удалении от каверны, используется точное решение уравнений (1.1), соответствующее плоскопараллельному течению [5]. Остальные границы считаются твердыми, условия для ψ и Ω на них ставятся обычным образом.