

трудно построить, исходя из точной формулы (3.6), подбирая A_1 из уравнения $a = 0$, а остальные коэффициенты произвольно.

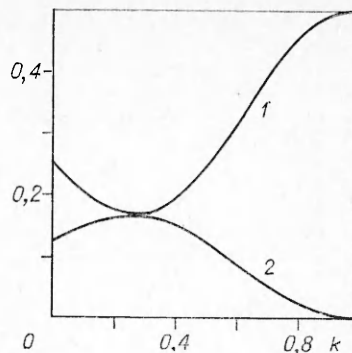
На фиг. 4 кривые 1, 2 представляют зависимости c_*/σ , Q/σ от k для пластинки ($A_1 = 0$). При $k = 0$ мощность источника $Q = \sigma/8$, а коэффициент сопротивления равен $\sigma/4$, т. е. в 2 раза меньше, чем при $Q = 0$. В пределе $\sigma \rightarrow 0$ это соответствует случаю, отмеченному в [1].

Как видно из фиг. 4, наименьшее сопротивление при фиксированном числе $c_* = \sigma/6$ получается при $Q = \sigma/6$.

Интересно отметить, что при $Q > \sigma/8$ одному и тому же значению мощности источника соответствуют два режима обтекания. Кроме того, при всех допустимых мощностях источника величина χ с точностью до малых порядка σ не меняется.

При отсутствии источника из формул (4.2) получаются результаты $A_1 \neq -2$, $c_* = \sigma/2$, $\chi = \sigma/2$, $\delta = \sigma/8$, относящиеся к обтеканию произвольных контуров по классической схеме Эфроса.

Доказано, что вид зависимостей (2.11) аналогичен соответствующим соотношениям в плоской задаче. В обоих случаях коэффициент сопротивления, отнесенный к миделю, убывает с увеличением σ , а степень удлинения каверны $1/\chi$ не зависит от мощности источника q . Существенной особенностью осесимметричной задачи является то, что для практических расчетов вместе с асимптотически главным членом порядка χ^2 и χ^3 следует учитывать и член порядка χ^2 даже для очень малых чисел кавитации.



Ф и г. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. П. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
2. Сотина Н. Б., Фоминных В. В. О моделировании источником тонкой струйки, вытекающей из тела. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5.
3. Сотина Н. Б., Фоминных В. В. Кавитационное обтекание клина при наличии источника на клине или в потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
5. Нестерук П. Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
6. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений. Препринт № 40—79. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
8. Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г. Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках. — ПММ. 1973, т. 37, вып. 4.
9. Петров А. Г. Вариационный принцип Гамильтона. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 1.
10. Петров А. Г. Прямой вариационный метод расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений. — ДАН СССР, 1981, № 6.
11. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947.
12. Гуревич М. П. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
13. Сотина Н. Б. Асимптотический закон расширения струй при наличии в потоке гидродинамических особенностей. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3.

Поступила 5/VII 1983 г.

УДК 533.7.011.72

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МГД-УДАРНОГО ФРОНТА В НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ

Н. Н. КОТИНА, А. А. РУМЯНЦЕВ
(Ленинград)

Рассмотрена эволюция случайных искривлений фронта МГД-ударной волны, распространяющейся в направлении убывания плотности проводящей среды. Выяснено, что магнитное поле, поперечное по отношению к этому направлению, приводит к усилению эффекта неустойчивости.

Первоначально синусоидальные искривления фронта с течением времени приобретают более сложную форму, которая соответствует синусоидальному ускоренному движению продвинутых элементов фронта, их укрупнению. Это приводит, по-видимому, к явлению опрокидывания и турбулизации фронта.

Исследование устойчивости фронта ударной волны относительно его искривления проводится уже в течение примерно двух десятилетий (см., например, [1]). Было выяснено, что фронт ударной волны в так называемом эволюционном режиме распространения в однородной среде устойчив и восстанавливает свою неискаженную случайны-

ми возмущениями форму. При распространении же в среде убывающей плотности как плоские, так и сферические фронты оказываются неустойчивыми. Сначала это было показано для газодинамических ударных волн без магнитного поля [2, 3]. Качественно эффект неустойчивости связан с тем, что ударные фронты ускоряют свое движение в направлении, обратном градиенту плотности. Поэтому, например, элемент фронта, случайно опередивший регулярный фронт, оказывается в области с меньшей плотностью, и его скорость оказывается больше, так что опережение нарастает.

Изменение скорости фронта как функция его положения удачно аппроксимируется формулой [4] $u(x) \sim \rho^{-\lambda}$, где $\lambda = 2 + (2\gamma/\gamma - 1)^{1/2}$; γ — показатель адиабаты. Магнитное поле в проводящей среде, если его вектор напряженности параллелен фронту, увеличивает эффективный показатель адиабаты среды [5] и соответственно изменяет параметр λ . Ускорение движения невозмущенного фронта увеличивается, увеличивается и темп нарастания со временем флуктуационных смещений на нем [6]. При этом последние увеличиваются со временем по степенному закону, но всегда значительно быстрее, чем происходит нарастание скорости регулярного фронта. Конечно, факт неустойчивости в теоретическом отношении должен быть подтвержден нелинейным (по степени отклонений) расчетом, что и было сделано в [7]. Здесь же этот расчет проведен в общем случае МГД-ударной волны.

Рассмотрим сильную МГД-ударную волну, в которой газовым давлением перед фронтом можно пренебречь. Магнитное поле в невозмущенной среде $H(x)$ будем считать направленным вдоль фронта, параллельно оси y . Кроме того, среду предполагаем идеально проводящей, так что выполнено условие вмороженности магнитного поля.

Предположим, что искривление фронта зависит от y , а направление распространения невозмущенной волны выберем за x . Обозначим координату невозмущенного фронта через $X(t)$, координату возмущенного фронта $\Xi(y, t) = X(t) + \xi(y, t)$ и будем считать производную $[d\xi/dy]$ величиной достаточно малой, чтобы воспользоваться далее методом итераций.

Запишем граничные условия, связывающие газодинамические величины перед и позади каждого участка искривленного фронта. Согласно [8], локальные граничные условия, соответствующие непрерывности потоков массы, импульса, энергии, нормальной к участку фронта компоненты магнитного поля, касательной компоненты напряженности электрического поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\rho(v_x - \dot{\Xi} \cos^2 \theta)\} &= 0, \\ \left\{ -\rho \dot{\Xi}^2 \cos^2 \theta + p + \rho v_x^2 + \frac{H_y^2 - H_x^2}{8\pi} - \operatorname{tg} \theta \left(\rho v_x v_y - \frac{H_x H_y}{4\pi} \right) \right\} &= 0, \\ \left\{ -\rho v_y \dot{\Xi} + \left(\rho v_x v_y - \frac{H_x H_y}{4\pi} \right) - \operatorname{tg} \theta \left(p + \rho v_x^2 + \frac{H_x^2 - H_y^2}{8\pi} \right) \right\} &= 0, \\ \left\{ -\dot{\Xi} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{1}{4\pi} (v_x H^2 - H_x v \cdot \mathbf{H}) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} \theta \rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - \frac{1}{4\pi} \operatorname{tg} \theta (v_y H^2 - H_y v \cdot \mathbf{H}) \right\} = 0, \\ \{H_x - \operatorname{tg} \theta H_y\} &= 0, \quad \{(v_x - \dot{\Xi}) H_y - v_y H_x\} = 0. \end{aligned}$$

Здесь фигурные скобки означают разность соответствующих величин позади и впереди участка фронта; p , ρ , ε , w — давление, плотность, удельная внутренняя энергия, энтальпия газа за фронтом; индексом нуль в дальнейшем будем отмечать невозмущенные величины перед фронтом; v_x и v_y — компоненты скорости газа в лабораторной системе отсчета, т. е. в той системе отсчета, где газ покоится перед фронтом; $\theta = \theta(y, t)$ — угол наклона участка искривленного фронта к плоскости (y, z) невозмущенного фронта, так что $\cos \theta = 1 - (1/2)(d\xi/dy)^2$. В случае отсутствия магнитного поля граничные условия принимают вид известных соотношений на наклонном ударном фронте [7].

Исключая величины v_y , H_x , получим систему трех независимых уравнений, определяющих ударную адиабату:

$$\begin{aligned} (1) \quad \{\rho(v_x - \dot{\Xi} \cos^2 \theta)\} &= 0, \\ \left\{ -\rho \dot{\Xi}^2 \cos^2 \theta + p^* + \frac{\rho v^2}{\cos^2 \theta} + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{4\pi} H_0 (H_y - H_0) \right\} &= 0, \\ \left\{ \rho (v_x - \dot{\Xi}) \left(\frac{v^2}{2} + w^* \right) + p^* \dot{\Xi} + \operatorname{tg}^2 \theta \left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w^* - \frac{H_0^2}{4\pi \rho} \right) \right] \right\} &= 0, \end{aligned}$$

где $p^* = p + H^2/8\pi$; $w^* = w + H^2/4\pi\rho$; $p_0^* = H_0^2/8\pi$. Если бы фронт ударной волны

сместился из точки X в точку $(X + \xi(t))$, оставаясь в плоскости (y, z) , то скорость его равнялась бы величине $u(X + \xi)$, т. е. функции, определяемой решением задачи о движении невозмущенного фронта в неоднородной по плотности среде. Это решение будем считать (например, автомодельного типа) известным. При этом граничные условия на фронте удовлетворяются при некоторых определенных значениях газодинамических величин $p = \tilde{p}(X + \xi)$, $\rho = \tilde{\rho}(X + \xi)$, $v = \tilde{v}(X + \xi)$, $H = \tilde{H}(X + \xi)$. Малые искривления фронта вызывают, вообще говоря, и малые изменения газодинамических величин. В граничных условиях (1) теперь запишем $p = \tilde{p} + \delta p$, $\rho = \tilde{\rho} + \delta \rho$, $\xi = u(X + \xi) + \delta u$, где $\delta u = \dot{\xi} - \xi du/dX - (1/2)\xi^2 d^2u/dX^2 + \dots$

Именно на этом этапе перейдем к осуществлению процедуры итерации. Так, в первом приближении по параметру искривления фронта $|d\xi/dy| \ll 1$ получим систему уравнений для указанных малых отклонений газодинамических величин, которая в случае идеального газа с показателем адиабаты, согласно работе [6], имеет вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \left(\frac{u}{v} - 1\right) \frac{\delta \rho_1}{\rho} - \frac{\delta v_1}{v} + \frac{\delta u_1}{u} &= 0, \\ \left(1 - \frac{\rho c_s^*}{\rho_0 u}\right)^{-1} \frac{\delta u_1}{u} + \frac{\delta v_1}{v} &= 0, \\ \left(\frac{H_0^2 \rho}{8\pi \rho_0^2} - \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}\right) \frac{\delta \rho_1}{\rho} + \left(\frac{c_s^2 v}{(\gamma - 1) c_s^*} - v^2 - \frac{\rho_0^* v}{\rho_0 u}\right) \frac{\delta v_1}{v} + \frac{\rho_0^* v}{\rho_0 u} \frac{\delta u_1}{u} &= 0, \end{aligned}$$

где индекс 1 отмечает флуктуации первого порядка по параметру искривления $|d\xi/dy|$. Кроме того, использованы следующие соотношения: $\delta p^* = -\rho c_s^* \delta v$, $\delta p = -(\rho c_s^2/c_s^*) \times \delta v$, $c_s^2 = \gamma p/\rho$, $c_s^* = \sqrt{\gamma p/\rho + H^2/8\pi}$. Последние соотношения имеют место в так называемом квазиклассическом приближении, когда удовлетворяется неравенство $kl \gg 1$, где $k = k_y$ — характерное волновое число возмущения, $l = (d \ln \rho_0/dx)^{-1}$ — характерная длина изменения плотности [6, 7]. Для решения вопроса о неустойчивости достаточно выявить какие-либо возмущения, которые нарастают со временем. В предыдущих работах было показано, что рассматриваемый вид возмущений, соответствующий квазиклассическому приближению, приводит к неустойчивости фронта. В широком интервале изменения показателя адиабаты $1 < \gamma < 2$ решение системы (2) имеет вид $\delta p_1^* = 0$, $\delta \rho_1 = 0$, $\delta u_1 = 0$. Отсюда и следует спонтанное возрастание смещения ξ (при любом его знаке) в силу того, что величина du/dX для самого широкого класса решенных задач положительна.

Рассмотрим флуктуации газодинамических величин на фронте во втором порядке по параметру искривления. При этом в силу того, что $\delta p_1^* = 0$, $\delta \rho_1 = 0$ и т. д., можно записать $\delta p = \delta p_2$, $\delta v = \delta v_2$, $\delta u = \delta u_2 = \dot{\xi}_2 - \xi_2 \frac{du}{dX} - \frac{\xi_1^2}{2} \frac{d^2u}{dX^2}$. Итерация в системе (1) в рассматриваемом приближении приводит к следующей неоднородной системе уравнений относительно перечисленных поправок:

$$\begin{aligned} -\rho_0 u \frac{\delta \rho}{\rho} + \rho \delta v - (\rho - \rho_0) \delta u &= -\theta^2 (\rho - \rho_0) u, \\ \frac{\rho}{\rho_0} u_A^2 \delta \rho + (\pm \rho c_s^* - \rho_0 u) \delta v - \rho_0 v \delta u &= -\theta^2 \left(\rho v^2 + \frac{H_0^2}{4\pi} (H_y - H_0) \right), \\ \frac{u_A^2}{\rho_0} \delta \rho + (v - u \pm c_s^*) \delta v - v \delta u &= \frac{\theta^2}{\rho_0} \left(\rho u v^2 + \frac{H_0}{4\pi} u (H_y - H_0) - \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w^* \right) \right). \end{aligned}$$

Ее решение получим, полагая малым параметр $h^2 = H_0^2/8\pi\rho$, т. е. учитывая магнитное давление лишь как поправку. При $h^2 = 0$ решение системы приведено в [7]. Здесь учтем поправки, обусловленные магнитным давлением, с целью выяснить влияние магнитного поля на нелинейной стадии развития неустойчивости фронта. Оказывается, что смещения $\xi_{1,2}$ соответственно в первом и втором приближениях связаны следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d \ln u}{dx} = \frac{\xi_0 u}{2v_0^2} \frac{d^2u}{dx^2} + \theta^2 (1 - \eta f(\gamma)).$$

Для случая экспоненциальной зависимости плотности $\rho_0 \sim \exp(-x/l)$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \left(\frac{\lambda \xi_0^2}{2l} + \frac{1 - \eta f}{\lambda} \theta_0^2 \right) (l^2 z - l^2), \\ z &= \frac{\lambda X(t)}{l}, \quad \theta_0 = \theta(t=0). \end{aligned}$$

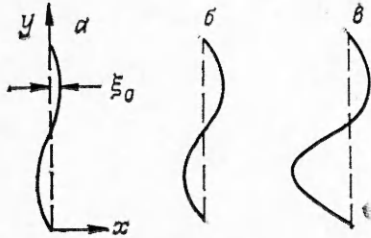
Здесь

$$(3) \quad f(\gamma) = \frac{(\gamma+1)\gamma}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} - \frac{(\gamma^2-1)(\gamma-1)}{4} - \frac{(\gamma+1)\lambda}{\gamma-1}, \quad \eta = \frac{4h^2}{(\gamma-1)^2},$$

$$X(t) = X_0 + \frac{l}{\lambda} \ln \frac{\lambda ut}{l},$$

причем $\xi_2 < \xi_1$, если $\lambda \xi_0 < l$ (это неравенство выполнено при $\xi_0 < l$).

На фигуре показано рассчитанное численно изменение формы искажений на фронте по мере продвижения невозмущенного фронта. Положение последнего для последовательных значений безразмерной координаты z отмечено линией. Начальное искажение имеет синусоидальный вид $\xi = \xi_0 \sin \kappa y$, и приняты следующие значения параметров: $\gamma = 5/3$, $h^2 = 1/9$, $\theta_0 = 0,1$, $\xi_0 = 0,1l$ ($\kappa \xi_0 = \theta_0$). Фигура, $a-c$ относится к положениям $z = 0; 1; 1,5$, соответствующие же моменты времени определены зависимостью $X(t)$ в формуле (3). Экстраполяция результатов на большие z может иметь лишь оценочный смысл, так как вступают в силу нелинейности более высокого порядка. В рассмотренном примере темп развития неустойчивости оказывается примерно в 2 раза выше, чем в отсутствие поля.



Если в первом приближении нарастание смещений фронта от его равновесного положения происходит симметрично относительно отстающих и опережающих участков, то при учете нелинейных поправок возникает асимметрия: опережение происходит относительно быстрее, чем отставание элементов фронта, и этот эффект тем существеннее, чем больше амплитуда смещений и кривизна фронта. Поправка, обусловленная магнитным давлением, как показывают расчеты при всех показателях адиабаты из указанного интервала, имеет один и тот же знак. Это приводит (при достаточно малом h) к увеличению крутизны фронта, так как его выступы с $\theta \neq 0$ больше ускоряются по отношению к фланговым участкам, чем в отсутствие магнитного поля. При этом $\gamma = 2; 5/3; 4/3; 6/5$ и $f = -0,08; -1,13; -5,19; -26,22$.

Таким образом, магнитное поле всегда усиливает эффект неустойчивости, так как оно приводит к увеличению темпа роста со временем скорости невозмущенного фронта. Отметим, что рассмотренная нами неустойчивость не сводится к известным видам неустойчивости движения проводящей среды, например к неустойчивости Рэлея—Тейлора. Действительно, в системе покоя невозмущенного фронта менее плотная невозмущенная среда движется с ускорением в направлении к нему, так что легкий газ оказывается эффективнее тяжелого, а не наоборот.

Рассмотренная неустойчивость может играть определенную роль при движении ударных волн в космической плазме, а также, по-видимому, и в лабораторной плазме [9], например, в установках, в которых возникает пинч-эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. М.: Атомиздат, 1968.
2. Вахрамеев Ю. С. Кумуляция ударной волны в неоднородной среде. — ПМТФ, 1966, № 4.
3. Гуревич Л. Э., Румянцев А. А. Распространение ударной волны в среде убывающей плотности. — ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 4.
4. Унзет Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
5. Румянцев А. А. О распространении ударной волны в неоднородной среде. — ЖЭТФ, 1972, № 11.
6. Калмыков Ю. К., Румянцев А. А. Распространение МГД-ударных волн в среде убывающей плотности. — ПМТФ, 1972, № 3.
7. Румянцев А. А. Движение искривленного фронта ударной волны в неоднородной среде. — ПМТФ, 1977, № 3.
8. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М.: Мир, 1964.
9. Кулаков А. В., Румянцев А. А. Генерация частиц высокой энергии ударной турбулентностью. — ЖТФ, 1979, т. 49, с. 21.

Поступила 5/VII 1983 г.