УДК 519.676

Об эффективности метода экспоненциального преобразования для решения стохастических задач переноса гамма-излучения*

И.Н. Медведев[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mail: min@osmf.sscc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 4, Vol. 14, 2021.

Медведев И.Н. Об эффективности метода экспоненциального преобразования для решения стохастических задач переноса гамма-излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 4. — С. 425–434.

В работе представлены способы применения экспоненциального преобразования моделируемого распределения плотности длины свободного пробега и его рандомизированной модификации с ветвлением траектории цепи Маркова в методе максимального сечения для решения задач переноса гамма-излучения в стохастически неоднородной среде. На примере переноса гамма-излучения сквозь толстый "брусок" воды, содержащий случайное количество шаров из воздуха или "чистого" алюминия, было проведено численное исследование эффективности упомянутых выше алгоритмов по сравнению со стандартным методом моделирования.

DOI: 10.15372/SJNM20210406

Ключевые слова: *алгоритм экспоненциального преобразования, ветвление траектории цепи Маркова, метод максимального сечения, перенос гамма-квантов, дисперсия весовой оценки, трудоемкость алгоритма, стохастическая среда.*

Medvedev I.N. About efficiency of exponential transformation method for solving stochastic problems of gamma-ray transport theory // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 425–434.

The paper presents the algorithm of exponential transformation (biasing) and its randomized modification with branching of a Markov chain trajectory for solving the problems of gamma-ray transport in an inhomogeneous medium. These algorithms were applied to a maximum (majorant) cross-section method or the Woodcock tracking which is extremely efficient for the simulation in an inhomogeneous medium. On an example of gamma-ray transport through a thick water slab containing a random amount of air or Al balls, the numerical study of the above algorithms in comparison with the standard simulation algorithm is performed.

Keywords: *exponential transformation algorithm, trajectory branching of the Markov chain, majorant cross-section method (Woodcock tracking), gamma-radiation transfer, variance of the weighted estimator, computation costs, stochastic medium.*

---

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0251-2021-0002).

1. Введение

Одним из классических способов радикального уменьшения трудоемкости вычислений оценки малых вероятностей прохождения частицы через толстый слой вещества ($0 < z < H$) является экспоненциальное преобразование моделируемого распределения плотности длины свободного пробега (см, например, [4, 11, 12]), которое состоит в замене заданного в модели полного сечения σ на $\sigma' = \sigma - c\cos v$. При такой замене моделируемую плотность можно представить в виде

$$p(l, \sigma, c) = (\sigma - c\cos v)e^{-l(\sigma - c\cos v)}, \tag{1}$$

и после каждого столкновения при рассеянии весовая оценка умножается на весовой множитель

$$\frac{\sigma e^{-lc^* \cos v}}{\sigma - c^* \cos v},$$

где v — это угол между направлением свободного пробега ω в точке столкновения и осью z, т. е. $\cos v = (\omega, 0z)$.

Отметим содержательный исторический обзор [17] по построению и обоснованию эффективных алгоритмов метода экспоненциального преобразования для задач переноса излучения через толстые слои. Большинство работ из этого обзора посвящены построению эффективных алгоритмов экспоненциального преобразования для тестовых задач переноса частиц на прямой с постоянными значениями σ_s и σ. В частности, в работе [18] был предложен общий подход численного исследования значений дисперсий весовых оценок для определения оптимальных значений параметра экспоненциального преобразования. Отдельно стоит выделить работы [10, 19], в которых авторы предложили алгоритмы экспоненциального преобразования с дополнительными весовыми модификациями моделирования выбора нового направления для некоторых простых типов индикатрис. В реальных задачах параметр σ может зависеть от скоростей частицы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ до и после столкновения соответственно, пространственных координат $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, энергий E и E' и т. д. (см., например, [3–5, 8]). В этом случае задача определения “корректного” значения параметра c требует отдельного трудоемкого теоретического и численного исследования. Здесь слово “корректный” означает, что дисперсия весовой оценки ограничена при использовании экспоненциального преобразования с таким значением c. В частности, для переноса гамма-излучения сечение комптоновского рассеяния σ_k зависит от E, а индикатриса рассеяния $w(\cdot, \cdot)$ зависит от E и E' (см., например, [4, 8]).

В настоящей статье представлено численное исследование эффективности использования алгоритма экспоненциального преобразования и его рандомизированной модификации по сравнению со стандартным алгоритмом моделирования на примере переноса гамма-излучения сквозь толстый “брусок”, заполненный водой и случайным количеством шариков воздуха или “чистого” алюминия.

2. Стандартный алгоритм моделирования переноса гамма-излучения

Предположим, что для заданной среды и начальной энергии основные процессы взаимодействия гамма-кванта со средой являются комптоновское рассеяние и поглощение [8]. Микроскопическое сечение комптоновского рассеяния определяется следующим выражением [7, 4]:

$$\sigma(\tilde{E}) = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\tilde{E}}{\tilde{E}^3} \left[\frac{2\tilde{E}(1+\tilde{E})}{1+2\tilde{E}} - \ln(1+2\tilde{E}) \right] + \frac{1}{2\tilde{E}} \ln(1+2\tilde{E}) - \frac{1+3\tilde{E}}{(1+2\tilde{E})^2} \right\},$$

где r_e — классический радиус электрона. Здесь $\tilde{E}$ — безразмерная энергия гамма-кванта, т. е. значение энергии в МэВ, деленное на $m_e c^2$; m_e — масса покоя электрона; c — скорость света. Макроскопическое сечение комптоновского рассеяния задается следующем соотношением:

$$\sigma_k(E) = \rho_m N_A \frac{Z}{A} \sigma(\tilde{E}), \tag{2}$$

где ρ_m — плотность вещества, N_A — число Авогадро, Z и A — это число электронов в молекуле и молекулярный вес соответственно. Значение макроскопического сечения поглощения $\sigma_c(E)$ может быть вычислено во время расчетов из табличных данных (см., например, [7]) с использованием линейной интерполяции.

Опишем общую схему прямого моделирования переноса гамма-излучения при комптоновском рассеянии и поглощении [14]:

(0) Выбор начальной точки в соответствии с заданной плотностью распределения $\pi(x)$ источника.

(1) Моделирование случайного пробега l по формуле $l = -(\ln\alpha)/\sigma(E)$.

(2) Проверка вылета частицы из среды.

(3) Пересчет координат радиус вектора $\mathbf{r}'$ нового местоположения частицы $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \omega l$.

(4) Вычисление нового значения энергии E'. Известно (см. [4]), что если гамма-квант с безразмерной энергией E рассеивается в результате эффекта Комптона, то индикатриса рассеяния $g(E, E')$ пропорциональна функции

$$f(E,E') = \frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E'}\right)\left(2 + \frac{1}{E} - \frac{1}{E'}\right), \quad E(1+2E)^{-1} < E' < E.$$

Это выражение непосредственно вытекает из формулы Клейн–Нишины для дифференциального сечения комптоновского рассеяния. Здесь и далее символ α — случайное число, равномерно распределенное в интервале $(0,1)$. Случайную переменную E' можно моделировать с использованием простого варианта метода исключения (см. [4]):

(а) реализуем $E_0 = E(1+2E\alpha_1)(1+2E)^{-1}$;

(б) если $\alpha_2[1+2E+(1+2E)^{-1}] > f(E_0, E)$, то снова выполняется пункт (а), иначе $E' = E_0$ и алгоритм завершается. Этот алгоритм вытекает из неравенства $f(E,E') \le 1 + 2E + (1+2E)^{-1}$.

(5) Выбор случайного типа столкновения: комптоновское рассеяние или поглощение с соответствующими вероятностями $\sigma_k(E')/\sigma(E')$ и $\sigma_c(E')/\sigma(E')$.

(6) В случае комптоновского рассеяния величина косинуса угла рассеяния между старым $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ и новым $\omega' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ направлениями в данном случае определяется формулой (см. [4, 13]):

$$\mu(\omega, \omega') = 1 - \frac{1}{E'} + \frac{1}{E}.$$

Далее, азимутальный угол θ моделируется по формуле $\theta = 2\pi\alpha$, и координаты нового направления пробега ω' пересчитываются по стандартным формулам (см., например, [6, 4]):

$$\omega'_x = \omega_x \mu(\omega,\omega') - (\omega_y \sin\theta + \omega_x\omega_z\cos\theta)\sqrt{\frac{1-\mu^2(\omega,\omega')}{1-\omega_z^2}},$$

$$\omega'_y = \omega_y \mu(\omega,\omega') + (\omega_x \sin\theta - \omega_y\omega_z\cos\theta)\sqrt{\frac{1-\mu^2(\omega,\omega')}{1-\omega_z^2}},$$

$$\omega'_z = \omega_z \mu(\omega,\omega') + (1-\omega_z^2)\cos\theta\sqrt{\frac{1-\mu^2(\omega,\omega')}{1-\omega_z^2}}.$$

(7) Переход в п. (1).

3. Модификации метода максимального сечения

Рассмотрим вероятность P_H вылета гамма-квантов через верхнюю поверхность $z = H$ бруска

$$|x| \le X_{\max}, \qquad |y| \le Y_{\max}, \qquad z \in [0, H]$$

из мононаправленного источника $\mathbf{r}_0 = (0,0,0)$. Вероятность P_H можно, естественно, оценить с помощью прямого моделирования (см. описанную выше схему) и бернуллиевской оценки ξ_{x_0}, которая подсчитывает количество прошедших частиц в п. (2).

Алгоритм экспоненциального преобразования состоит в том, что в п. (1) длина свободного пробега моделируется соответственно плотности $(\sigma(E) - c\cos v)e^{-(\sigma(E)-c\cos v)l}$, где корректное значение c лежит в интервале $(0, \sqrt{\sigma(E)\sigma_c(E)}]$ (см. [14]). Предположим, что $c^* = \sqrt{\sigma(E)\sigma_c(E)}$ и $Q_0 = 1$. В этом случае в п. (3) после n-го столкновения необходимо пересчитывать накопленный вес по формуле

$$Q_n = Q_{n-1}\frac{\sigma(E)e^{-lc^*\cos v}}{\sigma(E) - c^*\cos v} \tag{3}$$

и подсчитывать вероятность прохождения с использованием бернуллиевской весовой оценки $\xi^*_{x_0}$, в которой суммируются веса проходящих частиц, в частности, в случае прохождения $Q'_N = Q_N e^{-c^*(H-z_N)}$.

Одним из естественных способов уменьшения дисперсии весовой оценки $\xi^*_{x_0}$ является дополнительное расщепление или ветвление моделируемой траектории цепи Маркова (см., например, [4, 6, 16]). Отметим, что в случае расщепления из каждой точки столкновения испускается фиксированное количество независимых траекторий. Термин “ветвление траектории” означает, что количество таких независимых траекторий (ветвей) случайно, а их среднее может быть вещественным.

Определим случайное неотрицательное целое число (число ветвей) $\nu(x,x')$ таким образом, что распределение вероятностей имеет вид (см. [15]):

$$P\big(\nu(x,x') = [\mathrm{E}\nu(x,x')]\big) = 1 + [\mathrm{E}\nu(x,x')] - \mathrm{E}\nu(x,x'),$$

$$P\big(\nu(x,x') = 1 + [\mathrm{E}\nu(x,x')]\big) = \mathrm{E}\nu(x,x') - [\mathrm{E}\nu(x,x')]. \tag{4}$$

Здесь стоит отметить, что среднее $\mathrm{E}\nu(x,x')$ желательно подбирать так, чтобы уменьшить величину Q_n. В случае дополнительного ветвления траектории при использовании экспоненциального преобразования (см. (3)) предлагается выбирать случайное число ветвей согласно распределения (4) для

$$\mathrm{E}\nu(E) = \frac{\sigma(E)}{\sigma(E) - c^* \cos v}. \tag{5}$$

При этом значение веса Q_n после каждого акта ветвления делится на $\mathrm{E}\nu(E)$. Выбор такого параметра ветвления позволяет уменьшить величину Q_n. Дополнительно стоит отметить, что при таком способе ветвления в каждой следующей точке комптоновского рассеяния в сторону вылета через границу $z = H$ испускается в среднем $\mathrm{E}\nu(E) > 1$ независимых траекторий, а в обратном направлении с вероятностью $\mathrm{E}\nu(E) < 1$ происходит дополнительное поглощение. Обозначим через $\zeta^*_{x_0}$ соответствующую рандомизированную весовую бернуллиевскую оценку с ветвлением траектории.

В реальных задачах среда может быть неоднородной и содержать различные примеси, геометрическое расположение которых может быть случайно, например, примеси могут иметь форму шаров. Учет таких примесей может существенно увеличить сложность прямого моделирования, так как каждый раз при моделировании длины свободного пробега необходима дополнительная проверка, какие области с примесями пересекает луч, вдоль которого движутся частицы. Более того, необходимо каждый раз вычислять и анализировать расстояния от точки рассеяния в направлении свободного пробега до сфер, содержащих примеси.

Для решения подобных неоднородных задач был разработан достаточно эффективный метод максимального сечения [4] (в иностранной литературе — метод Вудкока [20]). В предположении $\sigma(E, \mathbf{r}) \leq \sigma_{max}(E)$ метод основывается на искусственной модификации среды путем добавления δ-рассеяния с сечением $\sigma_{max}(E) - \sigma(E, \mathbf{r})$ без изменения интенсивности излучения. Длина свободного пробега при этом моделируется для модифицированной среды по формуле $l = -(\ln \alpha)/\sigma_{max}(E)$. В полученной таким образом точке столкновения с вероятностью $\sigma(E, \mathbf{r})/\sigma_{max}(E)$ моделируется физическое столкновение, а с вероятностью $1 - \sigma(E, \mathbf{r})/\sigma_{max}(E)$ фиксируется дельта-рассеяние, т. е. далее строится новый пробег в том же направлении и с тем же значением энергии. Здесь стоит отметить, что в методе максимального сечения рекомендуется использовать экспоненциальное преобразование только после физического столкновения, так как для ограниченности дисперсии соответствующей весовой оценки необходимо наличие вероятности поглощения [14].

4. Тестовая задача переноса гамма-излучения через стохастическую среду

Для решения задач переноса в стохастических средах наиболее естественными являются модели, основанные в некотором смысле на пуассоновских случайных точечных полях [9]. Рассмотрим неоднородный пуассоновский поток точек

$$R_\eta(V) = (r_1, r_2, \ldots, r_\eta), \quad r_i \in V,$$

в произвольной области V пространства R^3 с заданной интенсивностью $\lambda(x)$ и мерой интенсивности $\Lambda(V) = \int_V \lambda(x)dx < \infty$. Соответствующее распределение случайного числа $\eta(V)$ точек в области V определяется следующим соотношением:

$$P(\eta(V) = k) = e^{-\Lambda(V)} \frac{(\Lambda(V))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Известен следующий рандомизированный алгоритм построения пуассоновского ансамбля с интенсивностью $\lambda(x)$ в области V (см., например, [1]):

(1) реализуется целочисленная случайная величина $\eta(V)$ с распределением (6);

(2) если $\eta(V) = k$, то независимо реализуются k точек x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответственно плотности $\lambda(x)/\Lambda(V)$, $x \in V$.

Если пуассоновский ансамбль однородный, т. е. $\lambda(x) \equiv \lambda$, то указанные выше k точек равномерно распределены в области V.

Рассмотрим следующую стохастическую модель среды. Предположим, что "брусок"

$$V_H = [-X_{\max}, X_{\max}] \times [-Y_{\max}, Y_{\max}] \times [0, H] \in R^3$$

заполнен смесью вещества W (вода), полное сечение которого равно σ_W, с ансамблем шаров $B_r(r_i)$ радиуса r с центрами в точках r_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \eta$. Следовательно, $V_H = V_W \bigcup V_0$, где V_0 — часть области V_H заполнена, возможно пересекающимися, шарами. Предположим, что координаты центров шаров образуют однородный пуассоновский ансамбль $R_\eta(V_{H,r})$ в области

$$V_{H,r} = [-X_{\max} - r, X_{\max} + r] \times [-Y_{\max} - r, Y_{\max} + r] \times [-r, H + r]$$

с мерой интенсивности $\Lambda(V_{H,r})$. Для такой модели стохастической среды определим среднюю плотность $\rho(V_H)$ смеси в бруске V_H через вероятность $P(\mathbf{r} \in V_W)$ следующим образом [2]:

$$\rho(V_H) = P\Big(\mathbf{r} \in V_W\Big) = P\Big(R_\eta(V_{H,r}) \subset V_{H,r} \backslash B_r\Big) = e^{-\Lambda(V_{H,r})\frac{4}{3}\pi r^3/\mathrm{Vol}(V_{H,r})}, \qquad (7)$$

где $\mathrm{Vol}(V_{H,r}) = 2(X_{\max} + r)2(Y_{\max} + r)(H + 2r)$.

Пусть в начале координат расположен точечный источник, испускающий гамма-кванты в направлении $\omega_0 = (0, 0, 1)$, перпендикулярном основанию бруска V_H, с начальной энергией $E_0 = 0.1\,\mathrm{MeV}$. Определим в качестве функционала P_H — вероятность вылета гамма-квантов через верхнюю площадку бруска

$$|x| \le X_{\max} = 150\,\text{см}, \qquad |y| \le Y_{\max} = 150\,\text{см}, \qquad z = H = 50; 100\,\text{см}.$$

Для заданных значений плотности смеси $\rho(V_H) = \rho(V_{100}) = \rho(V_{50}) = 0.98$ и радиуса шара $r = H * 0.1 = \{5, 10\}$ были получены с помощью (7) соответствующие значения интенсивности $\Lambda(V_{100,10}) = 59.265$ и $\Lambda(V_{50,5}) = 222.477$ пуассоновского ансамбля центров шаров в областях $V_{100,10}$ и $V_{50,5}$. В случае воды макроскопическое сечение комптоновского рассеяния $\sigma_k(E)$ (см. (2)) определяется параметрами: $\rho = 1$, $Z = 10$, $A = 18$.

Были проведены вычислительные эксперименты для шаров из воздуха и чистого алюминия ($\rho = 0.001225$, $Z = 29$, $A = 29$ и $\rho = 2.6989$, $Z = 13$, $A = 26.98$ соответственно). Значения параметров $X_{\max}$, $Y_{\max}$, H, r, E_0 были подобраны так, чтобы вероятность вылета гамма-квантов через боковые стенки бруска была достаточно близка к 0. Отметим, что моделирование случайной траектории гамма-кванта в рассматриваемой стохастически неоднородной среде осуществляется методом "двойной" рандомизации в два этапа (см., например, [14]). Сначала строится реализация пуассоновского ансамбля точек по изложенному выше рандомизированному алгоритму, а потом для этой реализации моделируется случайная траектория гамма-кванта с использованием экспоненциального преобразования по схеме моделирования, представленной в пункте 3.

Были реализованы три варианта расчетов: прямое моделирование с использованием бернуллиевской оценки ξ_{x_0}, алгоритм экспоненциального преобразования с использованием весовой бернуллиевской оценки $\xi^*_{x_0}$ и его рандомизированный вариант с ветвлением траектории (5) (оценка $\zeta^*_{x_0}$). Для оценки $\zeta^*_{x_0}$ со случайным ветвлением траектории был использован метод "поколений" (см., например, [4]), и максимальный размер поколения во всех расчетах не превысил 27. Для каждого варианта задачи моделировалось $M = 10^9$ траекторий частиц. Здесь и далее будут использованы следующие обозначения: sigma — статистическая оценка величины $\sqrt{\mathrm{Var}(\cdot)/M}$ при использовании соответствующей оценки, T — время соответствующего расчета в секундах, $S = \mathrm{Var}(\cdot) * T$ — величина трудоемкости соответствующего алгоритма моделирования.

В таблице 1 представлены результаты расчетов вероятности $P_H(\mathrm{air})$ для стохастической смеси воды и воздушных шаров в бруске V_H для заданных средних плотностей $\rho(V_H) = 0.98$.

Таблица 1. Эффективность использования оценок $\xi_{x_0}, \xi^*_{x_0}, \zeta^*_{x_0}$ для расчета вероятности вылета $P_H(\mathrm{air})$ через верхнюю поверхность бруска V_H, содержащий смесь воды и воздушных шаров радиуса $r = 5, 10$

$\rho(V_{50}) = 0.98,\ \Lambda(V_{50,5}) = 222.47,\ r = 5$	ξ_{x_0}	$\xi^*_{x_0}$	$\zeta^*_{x_0}$
$P_{50}(\mathrm{air})$	$1854.12 \cdot 10^{-6}$	$1853.68 \cdot 10^{-6}$	$1854.31 \cdot 10^{-6}$
sigma	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$6.01 \cdot 10^{-7}$	$4.18 \cdot 10^{-7}$
T, сек.	32443	32891	43611
S	**60.04**	**11.86**	**7.62**
$\rho(V_{100}) = 0.98,\ \Lambda(V_{100,10}) = 59.26,\ r = 10$	ξ_{x_0}	$\xi^*_{x_0}$	$\zeta^*_{x_0}$
$P_{100}(\mathrm{air})$	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$1.490 \cdot 10^{-6}$	$1.50 \cdot 10^{-6}$
sigma	$3.84 \cdot 10^{-8}$	$1.25 \cdot 10^{-8}$	$9.11 \cdot 10^{-9}$
T, сек.	12029	12852	15029
S	**0.0177**	**0.0021**	**0.0012**

В табл. 2 представлены результаты расчетов вероятности $P_H(\mathrm{Al})$ для стохастической смеси воды и алюминиевых шаров в бруске V_H для заданной средней плотности $\rho(V_H) = 0.98$.

Таблица 2. Эффективность использования оценок $\xi_{x_0}, \xi^*_{x_0}, \zeta^*_{x_0}$ для расчета вероятности вылета $P_H(\mathrm{Al})$ через верхнюю поверхность бруска V_H, содержащий смесь воды и алюминиевых шаров радиуса $r = 5, 10$

$\rho(V_{50}) = 0.98,\ \Lambda(V_{50,5}) = 222.47,\ r = 5$	ξ_{x_0}	$\xi^*_{x_0}$	$\zeta^*_{x_0}$
$P_{50}(\mathrm{Al})$	$1248.91 \cdot 10^{-6}$	$1249.59 \cdot 10^{-6}$	$1252.32 \cdot 10^{-6}$
sigma	$1.17 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-6}$	$8.57 \cdot 10^{-7}$
T, сек.	53893	50335	60305
S	**67.22**	**57.21**	**44.28**
$\rho(V_{100}) = 0.98,\ \Lambda(V_{100,10}) = 59.26,\ r = 10$	ξ_{x_0}	$\xi^*_{x_0}$	$\zeta^*_{x_0}$
$P_{100}(\mathrm{Al})$	$4.21 \cdot 10^{-7}$	$4.06 \cdot 10^{-7}$	$4.31 \cdot 10^{-7}$
sigma	$2.05 \cdot 10^{-8}$	$1.86 \cdot 10^{-8}$	$1.24 \cdot 10^{-8}$
T, сек.	17929	18426	36332
S	**0.0075**	**0.0064**	**0.0056**

Как видно из табл. 1, величина трудоемкости вычислений S при использование экспоненциального преобразования (оценка $\xi^*_{x_0}$) и дополнительного ветвления траектории (оценка $\zeta^*_{x_0}$) существенно меньше соответствующей величины для прямого моделирования (оценка ξ_{x_0}). Из табл. 2 видно, что значения трудоемкости S при использование экспоненциального преобразования (оценка $\xi^*_{x_0}$) и дополнительного ветвления траектории (оценка $\zeta^*_{x_0}$) несущественно отличаются от соответствующей величины для прямого моделирования (оценка ξ_{x_0}). Это можно объяснить тем, что в методе максимального сечения длина пробега моделируется по максимальному сечению, которое практически всегда в данной задаче совпадает с сечением более плотного алюминия [7]. Согласно (7), объемная доля алюминия в бруске V_H составляет 2 % и основной вклад в оценки $\xi^*_{x_0}$, $\zeta^*_{x_0}$ вносят столкновения в воде, причем вероятность физического столкновения в воде определяется достаточно малой величиной $\sigma^{(\mathrm{water})}(E)/\sigma^{(\mathrm{Al})}(E)$ [7]. Поэтому, согласно сказанному в п. 3, в этих вариантах расчета экспоненциальное преобразование реализуется крайне редко. Например, при моделировании с использованием экспоненциального преобразования для расчета $P_{50}(\mathrm{Al})$ полное среднее количество столкновения составляет $12.4844 \pm 3 \cdot 0.0004$, а среднее количество δ-рассеяний равняется $8.864 \pm 3 \cdot 0.0004$.

Литература

1. **Беляев Ю.К.** Пуассоновский точечный процесс // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / Ю.В. Прохоров. — М.: Научн. изд-во БРЭ, 1999. — С. 525–526.
2. **Глазов Г.Н., Титов Г.А.** Статистические характеристики коэффициента ослабления в разорванной облачности. I. Модель с шарами одинакового радиуса // Вопросы лазерного зондирования атмосферы. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1976. — С. 126–139.
3. **Дэвисон Б.** Теория переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1960.
4. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1980.
5. **Марчук Г.И.** Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1961.
6. **Спанье Дж., Гелбард З.** Метод Монте-Карло и задачи теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1972.
7. **Сторм Э., Исраэль Х.** Сечения взаимодействия гамма-излучения. Справочник. — М.: Атомиздат, 1973.
8. **Фано У., Спенсер Л., Бергер М.** Перенос гамма-излучения. — М: Госатомиздат, 1963.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1967.
10. **Gupta H.C., Dwivedi S.R.** Sampling of scattering angle in deep-penetration Monte Carlo // Annals of Nuclear Energy. — 1985. — Vol. 12, iss. 4. — P. 213–216.
11. **Kahn H.** Random sampling techniques in neutron attenuation problems. I // Nucleonics. — 1950. — Vol. 6, № 5. — P. 27–33.
12. **Kahn H.** Random sampling techniques in neutron attenuation problems. II // Nucleonics. — 1950. — Vol. 6, № 6. — P. 60–65.
13. **Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., et al.** The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. — Springer-Verlag, 1980.
14. **Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** Randomized exponential transformation algorithm for solving the stochastic problems of gamma-ray transport theory // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2020. — Vol. 35, № 3. — P. 153–162.
15. **Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** Recurrent partial averaging in the theory of weighted Monte Carlo methods // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2009. — Vol. 24, № 3. — P. 261–277.
16. **Mikhailov G.A.** Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 1992.
17. **Murthy K.P.N.** Exponential biasing-an update // Proc. National conference on radiation shielding and protection (RASP-96) / L.V. Krishnan, S.M. Lee, O.P. Singh. — India, New Delhi: Allied Publishers Limited, 1996. — P. 70–77.

18. **Spanier J.** A new multistage procedure for systematic variance reduction in Monte Carlo // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1971. — Vol. 8, № 3. — P. 548–554.
19. **Taro Ueki, Larsen E.W.** A kinetic theory for nonanalog Monte Carlo particle transport algorithms: exponential transform with angular biasing in planar-geometry anisotropically scattering media // J. of Computational Physics. — 1998. — Vol. 145, № 1. — P. 406–431.
20. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., Longworth S.** Techniques Used in the GEM Code for Monte Carlo Neutronics Calculations in Reactors and Other Systems of Complex Geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. — ILL: Argonne National Lab., 1965.

Поступила в редакцию 20 июня 2021 г.
После исправления 22 июня 2021 г.
Принята к печати 14 июля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Belyaev Yu.K.** Puassonovskii tochechnyi process // Veroyatnost' i matematicheskaya statistika. Enciklopediya / Yu.V. Prokhorov. — M.: Nauchn. izd-vo BPE, 1999. — S. 525–526.
2. **Glazov G.N., Titov G.A.** Statisticheskie kharakteristiki koefficienta oslableniya v razorvannoi oblachnosti. I. Model' s sharami odinakovogo radiusa // Voprosy lazernogo zondirovaniya atmosfery. — Novosibirsk: Nauka, Sib. otd-nie, 1976. — S. 126–139.
3. **Devison B.** Teoriya perenosa neitronov. — M.: Atomizdat, 1960.
4. **Ermakov S.M., Mikhailov G.A.** Statisticheskoe modelirovanie. — M.: Nauka, 1980.
5. **Marchuk G.I.** Metody rascheta yadernykh reaktorov. — M.: Atomizdat, 1961.
6. **Span'e Dzh., Gelbard Z.** Metod Monte-Karlo i zadachi teorii perenosa neitronov. — M.: Atomizdat, 1972.
7. **Storm E., Israel' Kh.** Secheniya vzaimodeistviya gamma-izlucheniya. Spravochnik. — M.: Atomizdat, 1973.
8. **Fano U., Spenser L., Berger M.** Perenos gamma-izlucheniya. — M: Gosatomizdat, 1963.
9. **Feller V.** Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya. T. 2. — M.: Mir, 1967.
10. **Gupta H.C., Dwivedi S.R.** Sampling of scattering angle in deep-penetration Monte Carlo // Annals of Nuclear Energy. — 1985. — Vol. 12, iss. 4. — P. 213–216.
11. **Kahn H.** Random sampling techniques in neutron attenuation problems. I // Nucleonics. — 1950. — Vol. 6, № 5. — P. 27–33.
12. **Kahn H.** Random sampling techniques in neutron attenuation problems. II // Nucleonics. — 1950. — Vol. 6, № 6. — P. 60–65.
13. **Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., et al.** The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. — Springer-Verlag, 1980.
14. **Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** Randomized exponential transformation algorithm for solving the stochastic problems of gamma-ray transport theory // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2020. — Vol. 35, № 3. — P. 153–162.
15. **Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** Recurrent partial averaging in the theory of weighted Monte Carlo methods // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2009. — Vol. 24, № 3. — P. 261–277.
16. **Mikhailov G.A.** Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 1992.
17. **Murthy K.P.N.** Exponential biasing-an update // Proic. National conference on radiation shielding and protection (RASP-96) / L.V. Krishnan, S.M. Lee, O.P. Singh. — India, New Delhi: Allied Publishers Limited, 1996. — P. 70–77.

18. **Spanier J.** A new multistage procedure for systematic variance reduction in Monte Carlo // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1971. — Vol. 8, № 3. — P. 548–554.

19. **Taro Ueki, Larsen E.W.** A kinetic theory for nonanalog Monte Carlo particle transport algorithms: exponential transform with angular biasing in planar-geometry anisotropically scattering media // J. of Computational Physics. — 1998. — Vol. 145, № 1. — P. 406–431.

20. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., Longworth S.** Techniques Used in the GEM Code for Monte Carlo Neutronics Calculations in Reactors and Other Systems of Complex Geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. — ILL: Argonne National Lab., 1965.