ПМТФ, № 1, 1966

ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

И. Ф. Будагян, Д. И. Мировицкий
(Москва)

Решение задачи распространения волн в неоднородной среде производится на основе уравнения для парциальной волны полного поля. После замены независимой переменной x (геометрической координаты) на $A(x)$ (амплитудный множитель прямой парциальной волны полного поля в неоднородной среде) применяется модификация одного из асимптотических методов теории нелинейных колебаний.

Как известно, дифференциальное уравнение

$$d^2\psi(k_0, x) / dx^2 + k^2(k_0, x)\psi(k_0, x) = 0 \tag{0.1}$$

играет важную роль в теории распространения акустических [1] и электромагнитных [2] волн, описывает квазистационарное поле температур, отнесенное к подвижным координатам [3], а при переходе от $k(k_0, x)$ к функции $[\lambda^2 - V(k_0, x)]$ — прохождение волн материи через потенциальный барьер [4]. Однако до настоящего времени не разработан метод, позволяющий находить связь между функцией параметров среды $k = k(k_0, x)$ и функцией полного поля $\psi = \psi(k_0, x)$, который обладал бы универсальностью, достаточной для определения $\psi(k_0, x)$ с любой точностью при произвольной зависимости параметра $k(k_0, x)$ от координаты x. Изложенный ниже асимптотический метод решения задачи распространения волн позволяет на основе выбранной вспомогательной функции определить одновременно соответствующие функции $\psi(k_0, x)$ и $k(k_0, x)$ с любой наперед заданной точностью.

Одновременно с решением задачи распространения волн асимптотический метод позволяет рассмотреть и случай нераспространяющихся волн, когда имеет место не осциллирующее, а ведущее себя подобно вещественным экспонентам решение, описывающее связанные состояния, принадлежащие дискретному спектру. Тем самым нашло свое подтверждение, имеющееся в приложении к работе [5], предположение о возможности наличия плавного перехода между свойствами функций дискретного спектра и свойствами квазистационарных состояний.

Асимптотический метод базируется на уравнениях, полученных методом внутренних условий [6,7], который можно рассматривать как обобщение известной оптической теоремы Озеена [8] на волновые процессы различной природы. Эти уравнения для прямой $\alpha(x)$ и обратной $\beta(x)$ парциальных волн поля $\psi(x)$ в неоднородной среде имеют [9] вид:

$$\alpha''(k_0, x) + p(k_0, x)\alpha'(k_0, x) + k(k_0, x)[k(k_0, x) - ip(k_0, x)]\alpha(k_0, x) = 0 \tag{0.2}$$

$$\beta''(k_0, x) + p(k_0, x)\beta'(k_0, x) + k(k_0, x)[k(k_0, x) + ip(k_0, x)]\beta(k_0, x) = 0 \tag{0.3}$$

где

$$p(k_0, x) = 2[\ln k(k_0, x)]' - [\ln k'(k_0, x)]' \tag{0.4}$$

а штрихом обозначено дифференцирование по координате x. Решение задачи осуществляется в три этапа.

На первом этапе производится выделение из прямой волны амплитудного A и фазового φ множителей и переход от переменной x к переменной $A(x)$. Второй этап сводится к отысканию общего решения дифференциального уравнения (0.1) при помощи фазовых траекторий, а третий заключается в обратном переходе от $A(x)$ к независимой переменной x.

В процессе решения, помимо независимых уравнений (0.2) и (0.3), используется также система взаимосвязанных уравнений первого порядка

$$\alpha'(k_0, x) + [\varkappa(k_0, x) - ik(k_0, x)]\alpha(k_0, x) = \varkappa(k_0, x)\beta(k_0, x) \tag{0.5}$$

$$\beta'(k_0, x) + [\varkappa(k_0, x) + ik(k_0, x)]\beta(k_0, x) = \varkappa(k_0, x)\alpha(k_0, x) \tag{0.6}$$

$$2\varkappa(k_0, x) = [\ln k(k_0, x)]'$$

несколько более общая [6], чем исходное уравнение (0.1).

1. Основные соотношения асимптотического метода. Общее решение уравнения (0.1) выражается через нетривиальное частное решени $[\alpha(x)+\beta(x)]$ следующим образом:

$$\psi(x)=[\alpha(x)+\beta(x)]\left[C_1+C_2\int_0^x[\alpha(x_1)+\beta(x_1)]^{-2}\,dx_1\right] \tag{1.1}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Будем искать это решение в виде

$$\psi(x)=Y_1e^{i\Psi_1}\,[C_1+C_2Y_2e^{-i\Psi_2}] \tag{1.2}$$

$$Y_1e^{i\Psi_1}=[\alpha(x)+\beta(x)],\qquad Y_2e^{-i\Psi_2}=\int_0^x[\alpha(x_1)+\beta(x_1)]^{-2}\,dx_1 \tag{1.3}$$

Частное решение $[\alpha(x)+\beta(x)]$ можно, учтя (0.5), (0.6), выразить только через $\alpha(x)$

$$[\alpha(x)+\beta(x)]=2\left\{\frac{k(x)}{k'(x)}\alpha'(x)+\left[1-i\frac{k^2(x)}{k'(x)}\right]\alpha(x)\right\} \tag{1.4}$$

Имея в виду необходимость перехода в дальнейшем к независимой переменной $A(x)$, представим волну $\alpha(x)$ в виде

$$\alpha(x)=A(x)e^{i\varphi(x)} \tag{1.5}$$

и перепишем частное решение (1.4) уравнения (0.1)

$$[\alpha(x)+\beta(x)]=2\left|\frac{k(x)}{k'(x)}A(x)\right|\{L^2(x)+[\varphi'(x)-k(x)]^2\}^{1/2}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\varphi(x)+\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi'(x)-k(x)}{L(x)}\right]\right\} \tag{1.6}$$

где

$$L(x)=A'(x)A^{-1}(x)+k'(x)k^{-1}(x) \tag{1.7}$$

Поскольку в правой части (1.6) содержится лишь амплитудный и фазовый множители волны $\alpha(x)$, ограничимся в дальнейшем рассмотрением уравнения (0.2). Воспользовавшись методикой, разработанной в теории нелинейных колебаний и сводящейся [10, 11] к графическому построению интегральных кривых на фазовой плоскости, введем в (0.2) выражения для $\alpha'(x)$ и $\alpha''(x)$, полученные дифференцированием (1.5).

Система двух дифференциальных уравнений, связывающих амплитудный $A(x)$ и фазовый $\varphi(x)$ множители прямой парциальной волны $\alpha(x)$, имеет при этом вид

$$A''(x)+p(x)A'(x)+\{k^2(x)-[\varphi'(x)]^2\}A(x)=0 \tag{1.8}$$

$$\varphi''(x)+\left[2\frac{A'(x)}{A(x)}+p(x)\right]\varphi'(x)-k(x)\,p(x)=0 \tag{1.9}$$

После замены переменной $x\to A(x)$ эта система применена для решения задачи распространения волн в произвольной неоднородной среде без потерь асимптотическим методом.

2. Описание метода решения задачи распространения. Произведем в системе (1.8), (1.9) замену переменной, считая волновое число функцией амплитудного множителя $A(x)$, т. е. $k(x)=k[A(x)]=k(A)$,

$$\frac{dk}{dx}=\frac{dk}{dA}\frac{dA}{dx}=k^{\cdot}A',\qquad \frac{d^2k}{dx^2}=k^{\cdot}A''+k^{\cdot\cdot}(A')^2$$

Для коэффициента $p(x)$, определяемого (0.4), получим

$$p(x)=p(A)A'-A''(A')^{-1},\qquad p(A)=2\frac{k^{\cdot}}{k}-\frac{k^{\cdot\cdot}}{k^{\cdot}} \tag{2.1}$$

Вводя (2.1) в (1.8) и (1.9), запишем

$$p\,(A)A^{-1}\,(A')^2 + k^2 = (\varphi')^2 \quad \text{или} \quad \varphi' = [p\,(A)A^{-1}\,(A')^2 + k^2]^{1/2} \tag{2.2}$$

$$AA'\varphi'' - A\,(\varphi' - k)A'' + \{[2 + Ap\,(A)]\varphi' - Akp\,(A)\}\,(A')^2 = 0 \tag{2.3}$$

Дифференцируя φ' по координате x, получим

$$\varphi'' = A'\left[\frac{p}{A}A'' + \frac{1}{2A}\left(p^{\cdot} - \frac{p}{A}\right)(A')^2 + kk^{\cdot}\right]\left[\frac{p}{A}(A')^2 + k^2\right]^{-1/2} \tag{2.4}$$

Подставим выражения φ' и φ'' в (2.3) и обозначим $A' = F$, тогда

$$F^{-2}F' = p + \left[\left(k^{\cdot} + \frac{2k}{A}\right) + \frac{p}{Ak}\left(\frac{p^{\cdot}}{2p} + \frac{3}{2A} + p\right)F^2\right]\left[k - \left(\frac{p}{A}F^2 + k^2\right)^{1/2}\right]^{-1}$$

Пусть $\theta = \operatorname{arc\,tg} F^{\cdot}$ угол наклона касательной к кривой $F = F\,(A)$ в фазовой плоскости AOF. Тогда узловое уравнение асимптотического метода решения задачи распространения волн, с учетом, что $F' = F^{\cdot}F$, получим в виде

$$\operatorname{tg}\theta = \{p\,(A) + [f_1\,(A) + f_2\,(A)F^2]\Phi^{-1}\,(A, F)\}F \tag{2.5}$$

$$f_1\,(A) = k^{\cdot}\,(A) + 2k\,(A)A^{-1} \tag{2.6}$$

$$f_2\,(A) = p\,(A)\,[Ak\,(A)]^{-1}\,\{p\,(A) + 3\,(2A)^{-1} + p^{\cdot}\,(A)\,[2p\,(A)]^{-1}\} \tag{2.7}$$

$$\Phi\,(A, F) = k\,(A) - [p\,(A)A^{-1}F^2 + k^2\,(A)]^{1/2} \tag{2.8}$$

Для функции $k\,(A) = k\,[A\,(x)]$, соответствующей заданной условиями задачи зависимости $k = k\,(x)$, нетрудно найти входящие в узловое уравнение (2.5) функции $f_1\,(A)$, $f_2\,(A)$, $\Phi\,(A, F)$ и $p\,(A)$. Следовательно, можно определить и угол θ для произвольно выбираемой точки $P\,(A, F)$ на введенной в рассмотрение фазовой плоскости AOF, после чего построить систему кривых $F = F\,(A)$, которую, в соответствии с асимптотическим методом теории нелинейных колебаний, будем именовать полем направлений на фазовой плоскости.

Отметим три основные особенности первого этапа решения задачи, которые следует учитывать при выполнении его третьего этапа, т. е. при обратном переходе от переменной A к независимой переменной x.

(а) Система кривых $F = F(A)$ поля направлений может быть легко преобразована в систему кривых $x^{\cdot} = f\,(A)$ и после интегрирования (по переменной A) нанесена на плоскость AOx. Система полученных кривых $A = A\,(x)$ характеризует зависимость амплитудного множителя прямой парциальной волны $A\,(x)$ от координаты x; кривые этой системы сдвинуты относительно друг друга вдоль оси Ox. Этот прием позволяет сразу восстановить зависимость от исходной координаты x амплитудного множителя $A\,(x)$ прямой парциальной волны $\alpha\,(x)$, входящей в частное решение исходного уравнения (0.1).

(б) Одновременно с определением $A\,(x)$ возможно по выбранной зависимости $k = k\,(A)$ восстановить и исходный закон изменения волнового числа вдоль координаты, т. е. найти функцию $k = k\,(x)$, соответствующую любой из найденных по п. (а) зависимостей $A = A\,(x)$. Тем самым устанавливается однозначная связь закона изменения параметра $k = k\,(x)$ с амплитудным множителем прямой парциальной волны $A\,(x)$, входящим в частное решение (1.6) исходного дифференциального уравнения (0.1).

(в) Для нахождения фазового множителя прямой парциальной волны $\varphi = \varphi\,(x)$ следует воспользоваться уравнением (2.2), определяющим градиент искомого фазового множителя $\varphi'(x)$. Учитывая, что

$$\varphi' = \varphi^{\cdot} F$$

уравнение (2.2) удобно представить в виде

$$\varphi^{\cdot} = \{p(A)A^{-1} + [k(A)F^{-1}(A)]^2\}^{1/2} \tag{2.9}$$

После интегрирования по переменной A нетрудно уже получить зависимость $\varphi = \varphi(A)$ для любой кривой $F = F(A)$ ранее построенного поля направлений. При этом, в соответствии с п. (*б*) этого раздела, можно, выбирая какую-либо определенную кривую $A = A(x)$, а тем самым и определяя однозначно зависимость $k = k(x)$, преобразовать полученную функцию $\varphi = \varphi(A)$ в искомую: $\varphi = \varphi(x)$. Таким образом, по выбранной зависимости $k = k(A)$ нетрудно найти как закон изменения свойств неоднородной среды вдоль координаты $k = k(x)$, так и прямую парциальную волну $\alpha(x) = A(x)e^{i\varphi(x)}$ полного поля в этой среде. Весьма существенна имеющая место при этом возможность реализации как прямого, так и обратного вариантов задачи распространения волн, сводящейся к выбору зависимости $k = k(A)$, исходя из требуемого закона $k = k(x)$ для среды или из требуемого полного поля $\psi(x)$ в среде.

Второй этап решения задачи сводится к нахождению общего решения $\psi(x)$ исходного уравнения (0.1). С этой целью, как и при установлении посредством функции $k = k(A)$ связи между прямой парциальной волной $\alpha(x)$ и законом изменения свойств среды вдоль координаты $k = k(x)$, произведем в (1.6) замену x на A, т. е. перейдем от $k(x)$, k' и φ' к $k(A)$, $k^{\cdot}$ и $\varphi^{\cdot}$:

$$[\alpha + \beta] = 2\left|\frac{k}{k^{\cdot}}A\right|(M^2 + N^2)^{1/2}\exp\left[i\left(\varphi + \operatorname{arc\,tg}\frac{M}{N}\right)\right] \tag{2.10}$$

где применены следующие обозначения для вспомогательных функций:

$$M = \left[\frac{p}{A} + \left(\frac{k}{F}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{k}{F}, \qquad N = \frac{1}{A} + \frac{k^{\cdot}}{k} \tag{2.11}$$

Сравнивая (2.10) и (1.3), нетрудно установить, что функции Y_1, Ψ_1, Y_2, Ψ_2, входящие в общее решение (1.2), равны

$$Y_1 = 2\left|\frac{k}{k^{\cdot}}A\right|(M^2 + N^2)^{1/2}, \qquad \Psi_1 = \varphi + \operatorname{arc\,tg}\frac{M}{N} \tag{2.12}$$

$$Y_2 = (J_1^2 + J_2^2)^{1/2}, \qquad \Psi_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{J_2}{J_1} \tag{2.13}$$

Здесь

$$J_1 = \int_0^{A_1} R_1(A)\,dA, \qquad J_2 = \int_0^{A_1} R_2(A)\,dA$$

$$R_1(A) = \cos 2\Psi_1\,[Y_1^2F]^{-1}, \qquad R_2(A) = \sin 2\Psi_1\,[Y_1^2F]^{-1} \tag{2.14}$$

Таким образом, для нахождения общего решения $\psi(x)$ волнового уравнения (0.1), исходя из зависимости $k = k(A)$ и выбранной какой-либо конкретной кривой $F = F(A)$ из предварительно построенного поля направлений, необходимо нанести на фазовую плоскость AOF графики $\varphi = \varphi(A)$ (в соответствии с п. (в) первого этапа решения), а также по формулам (2.11) графики $M = M(A)$ и $N = N(A)$. Далее, при помощи формул (2.12) следует найти функции $Y_1 = Y_1(A)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(A)$. Для нахождения функций $Y_2 = Y_2(A)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(A)$, определяемых соотношениями (2.13), следует предварительно построить по формулам (2.14) кривые $R_1 = R_1(A)$ и $R_2 = R_2(A)$.

Найденные функции Y_1, Ψ_1, Y_2 и Ψ_2 полностью описывают, в соответствии с формулой (1.2), общее решение $\psi(A)$ исходного уравнения (0.1), которое представлено в функции промежуточной переменной $A(x)$.

На третьем этапе решения задачи производится обратный переход от переменной $A(x)$ к исходной независимой переменной x. При этом следует иметь в виду, что закон изменения волнового числа вдоль координаты $k = k(x)$, соответствующий найденному общему решению $\psi(A)$ и отвечающий выбранной зависимости $k = k(A)$, был определен ранее (см. п. (б) первого этапа решения). Общее решение $\psi(x)$ уравнения (0.1), после замены A на x, представлено, согласно (1.2), в виде четырех функций $Y_1(x)$, $\Psi_1(x)$, $Y_2(x)$ и $\Psi_2(x)$ и отвечает соответствующей зависимости $k = k(x)$.

3. Некоторые особенности асимптотического метода, позволяющие упростить решение задачи. При использовании асимптотического метода для решения задачи распространения волн в неоднородной среде следует иметь в виду определенную простоту построения так называемых граничных траекторий, на которых фаза $\varphi(x)$ волны $\alpha(x)$ постоянна. В самом деле, вспомогательная функция (2.8) является, в соответствии с требованиями задачи, чисто действительной. Поэтому для входящего в нее подкоренного выражения

$$(pA^{-1}F^2 + k^2) > 0$$

По определению $F = A'$, поэтому, в соответствии с (2.4), получим

$$(pA^{-1}F^2 + k^2) = (\varphi')^2 > 0 \tag{3.1}$$

Следовательно, фаза волны $\alpha(x)$ не имеет мнимой части (т. е. затухание при распространении волны в среде отсутствует). Из (3.1) следует, в частности, что

$$F < k(-pA^{-1})^{-1/2}, \quad p(A) < 0$$

Обратное условие

$$(pA^{-1}F^2 + k^2) < 0$$

предполагает отмеченный во введении случай чисто мнимой фазы, когда волна не распространяется в среде, а затухает по экспоненте, т. е. когда имеет место не осциллирующее решение, которое описывает связанные состояния, принадлежащие дискретному спектру. Этот случай здесь не рассматривается за неимением места.

Промежуточный случай (критические условия) имеет место, когда

$$(pA^{-1}F^2 + k^2) = 0$$

Этот случай соответствует условию $\varphi' = 0$, причем кривые на плоскости AOF, описываемые уравнением

$$F = k(-pA^{-1})^{-1/2} \tag{3.2}$$

являются граничными траекториями, построение которых существенно облегчает не только установление связи с зависимостью $k = k(x)$, но и нахождение кривых $F = F(A)$. Основные особенности кривых $F = F(A)$, образующих поле направлений, заключаются в следующем

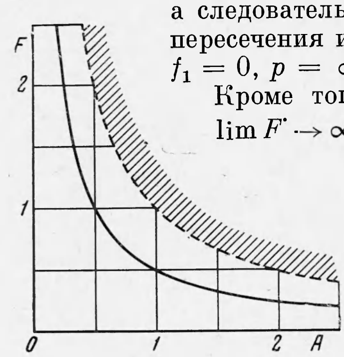
а) Поле направлений на плоскости AOF симметрично относительно оси OA, поэтому достаточно рассмотреть лишь область, в которой $F \geqslant 0$. Переход к случаю $F \leqslant 0$ полностью эквивалентен операции зеркального отображения кривой $A = A(x)$ на плоскости AOx относительно оси OA.

б) Точки, в которых $F^{\cdot} = 0$, т. е. точки, в которых касательные к кривой $F = F(A)$ поля направлений горизонтальны, определяются при $F \neq 0$, $F \neq \infty$ следующим уравнением:

$$F^2 = \frac{1}{f_2}\left\{-(kp + f_1) + \frac{p^3}{2Af_2} + p\left[\left(k - \frac{p^2}{2Af_2}\right)^2 - \frac{f_1 p}{f_2 A}\right]^{1/2}\right\} \tag{3.3}$$

в) С другой стороны, для случая $F \to 0$, соответствующего оси OA, из узлового уравнения задачи (2.5) следует, что при $f_1 \neq 0$, $p \neq \infty$

$$\lim F^{\cdot} \to \infty \quad \text{при} \quad F \to 0$$



Фиг. 1

а следовательно, касательные к кривым $F = F(A)$ в точках пересечения их с осью OA вертикальны, причем точки, где $f_1 = 0$, $p = \infty$, нуждаются в дополнительном исследовании. Кроме того,

$$\lim F^{\cdot} \to \infty \quad \text{при } F \to \infty, \qquad \lim F^{\cdot} \to \infty \quad \text{при } A \to 0$$

т. е. кривые $F = F(A)$ имеют вертикальные асимптоты как при $F \to \infty$, так и при $A \to 0$.

г) Из линейности задачи распространения волн в неоднородной среде без дисперсии вытекает, что при умножении параметра $k(A)$ или его аргумента на постоянную величину c требуется произвести лишь соответствующее изменение масштаба вдоль координаты x (или же амплитуды прямой парциальной волны). Действительно, из узлового уравнения задачи (2.5) следует, что при переходе от параметра $k(A)$ к новому параметру $k^\circ(A) = ck(A)$, где c — постоянная, достаточно заменить в узловом уравнении (2.5) функцию $F(A)$ на функцию $F^\circ(A) = cF(A)$. Это приводит к тому, что замена параметра $k(A)$ на параметр $k^\circ(A)$ требует замены переменной $A = A(x)$ на переменную $A^\circ = A(x / c)$, а $k(x)$ — на $k^\circ = ck(x/c)$. Аналогичным образом замена $k(A) \to k(cA)$ вызывает замену $A = A(x) \to A^\circ = c^{-1}A(x)$ с сохранением параметра $k = k(x)$.

4. **Пример решения задачи распространения волн.** Рассмотрим сначала, как более наглядный, графо-аналитический вариант асимптотического метода. Выберем функцию $k = k(A)$, характеризующую зависимость параметра k неоднородной среды от координаты x, в следующем виде:

$$k(A) = A^{-2}$$

т. е. примем, что

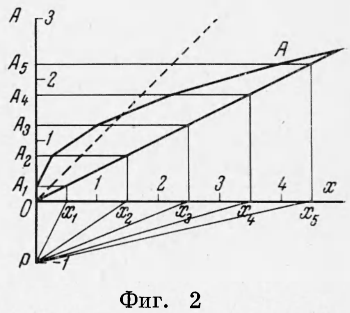
$$k(x) = (ax + b)^{-1} \tag{4.1}$$

Так как $p(A) = -A^{-1}$, $f_1(A) = 0$, $f_2(A) = 0$ — согласно (2.1), (2.6), (2.7), то узловое уравнение (2.5), определяющее угол θ наклона касательных к семейству кривых $F = F(A)$, запишется в виде

$$\operatorname{tg} \theta = F^{\cdot}(A) = -FA^{-1} \tag{4.2}$$

Поэтому уравнение граничных траекторий (3.2) имеет вид

$$F(A) = k(A)[-p(A)A^{-1}]^{-1/2} = A^{-1} \tag{4.3}$$



Фиг. 2

Построенная по формуле (4.3) граничная траектория нанесена пунктиром на фиг. 1, а область, соответствующая случаю чисто мнимого фазового множителя $\varphi(x)$, т. е. условиям, запрещающим распространение волн, заштрихована.

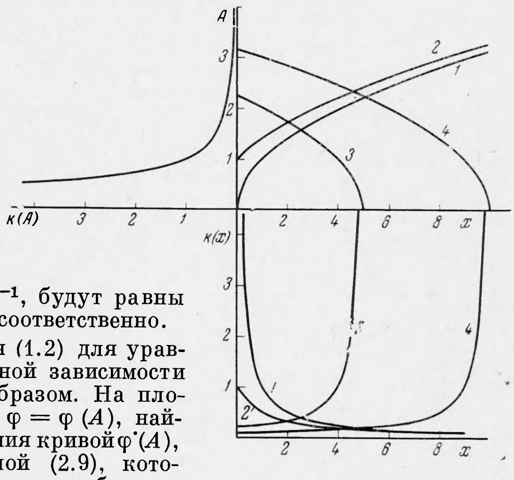
Как и в теории нелинейных колебаний, поле направлений, т. е. систему кривых $F = F(A)$, нетрудно построить, проводя через произвольно выбираемые точки, расположенные в области, допускающей распространение волн, систему отрезков прямых, угол наклона θ которых относительно оси OA в каждой точке плоскости AOF определяется формулой (4.2). Для облегчения построения следует учитывать форму граничной траектории.

В качестве примера построим на плоскости AOF фиг. 1, одну из кривых семейства $F = F(A)$, для которой при $A = 1$, 2 и 0 имеем $F = 0.5$, 0.25 и ∞, и преобразуем ее на плоскость xOA. Для этого в соответствии с фиг. 2 перестроим эту кривую из системы координат AOF в систему координат $x^{\cdot}OA$ и воспользуемся очевидным, по определению, соотношением $A' = F$. Следовательно, функция $F^{-1} = x^{\cdot}$ будет равна для выбранной кривой соответственно 2.0; 4.0 и 0, а кривая фиг. 1 преобразуется в прямую фиг. 2, проходящую через начало координат.

Для преобразования прямой фиг. 2, нанесенной на промежуточной плоскости $x^{\cdot}OA$, в кривую на требуемой условиями задачи распространения волн плоскости xOA, ее необходимо проинтегрировать по временно введенной переменной A, для чего, оставив вертикальную ось неизменной, перейти, в соответствии с правилами графического интегрирования, на горизонтальной оси от $x^{\cdot}$ к x.

Поскольку интегрирование производится при произвольных начальных условиях, кроме нанесенной кривой $x = x(A)$, которая одновременно является и графиком зависимости $A = A(x)$, возможно получение и ряда других кривых. Все эти кривые будут отличаться друг от друга лишь величиной сдвига вдоль оси Ox.

Исходная зависимость $k = k(x)$ строится по найденной кривой $A = A(x)$ и заданному графику $k = k(A)$ в соответствии с фиг. 3, где, кроме уже рассмотренной интегральной кривой *1*, нанесены также и кривые *2*, *3* и *4*, для которых постоянные коэффициенты, характеризующие эту зависимость $k = (ax + b)^{-1}$, будут равны $a = 1, 1, -1, -1$ и $b = 0, 1, 5, 10$ соответственно.



Фиг. 3

Общий множитель $Y_1 e^{i\Psi_1}$ решения (1.2) для уравнения (0.1), соответствующий выбранной зависимости $k = k(A)$, определяется следующим образом. На плоскости $AO\varphi$ фиг. 4 наносится кривая $\varphi = \varphi(A)$, найденная путем графического интегрирования кривой $\varphi^{\cdot}(A)$, построенной в соответствии с формулой (2.9), которую для этой цели удобнее переписать таким образом:

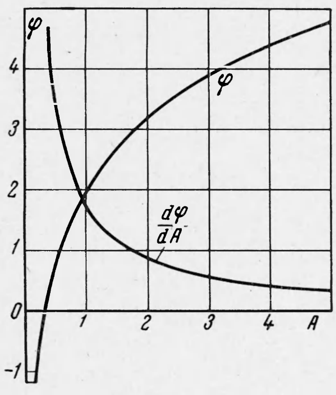
$$\varphi^{\cdot} = A^{-1}\,[(AF)^{-2} - 1]^{1/2} \qquad (4.4)$$

При построении следует иметь в виду, что начальные условия при интегрировании учитываются выбором в (1.1) постоянных C_1 и C_2. Далее, по формулам (2.11) вычисляются параметры $M(A)$ и $N(A)$. Для случая (4.1), в частности, получим

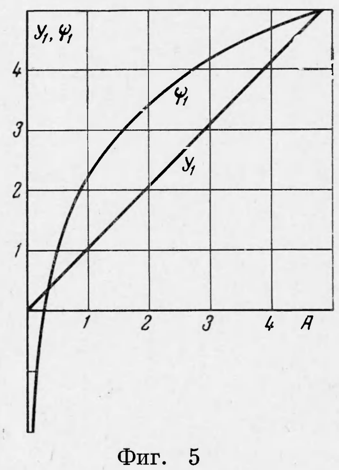
$$M(A) = \{[1 - (AF)^2]^{1/2} - 1\}\,(A^2F)^{-1} \qquad (4.5)$$

$$N(A) = -A^{-1} \qquad (4.6)$$

В заключение, при помощи формул (2.12) производится построение на фиг. 5 графиков функций $Y_1 = Y_1(A)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(A)$.



Фиг. 4

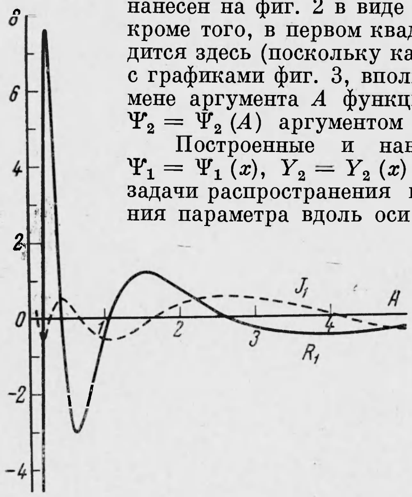


Фиг. 5

Для нахождения общего решения $\psi(x)$ волнового уравнения (0.1) необходимо еще найти и функции $Y_2 = Y_2(A)$, $\Psi_2 = \Psi_2(A)$, что осуществляется путем построения при помощи (2.14) графиков зависимостей $R_1 = R_1(A)$ и $R_2 = R_2(A)$ с последующим их интегрированием по переменной A. Соответствующие операции, а также кривые для функций $J_1(A)$ и $J_2(A)$ представлены на фиг. 6 и 7. Вычисленные по формулам (2.13) искомые функции $Y_2 = Y_2(A)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(A)$ нанесены на фиг. 8.

При выполнении заключительного, третьего, этапа решения, т. е. при переходе от A к x, следует выбрать для определенности какую-либо одну из кривых семейства $k = k(x)$ (фиг. 3), построенного при помощи кривой фиг. 1, например кривую *2*, а также график зависимости $A = A(x)$, отвечающий выбранной кривой. Последний нанесен на фиг. 2 в виде еще не усредненной ломанной и представлен, кроме того, в первом квадранте фиг. 3. Преобразование переменной сводится здесь (поскольку каждому значению $A(x)$ отвечает, в соответствии с графиками фиг. 3, вполне определенное значение координаты x) к замене аргумента A функций: $Y_1 = Y_1(A)$, $\Psi_1 = \Psi_1(A)$, $Y_2 = Y_2(A)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(A)$ аргументом x.

Построенные и нанесенные на фиг. 9 зависимости $Y_1 = Y_1(x)$, $\Psi_1 = \Psi_1(x)$, $Y_2 = Y_2(x)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(x)$ полностью определяют решение задачи распространения волн в неоднородной среде, закон (4.1) изменения параметра вдоль оси координаты x для которой описывается кривой *2* четвертого квадранта фиг. 3.



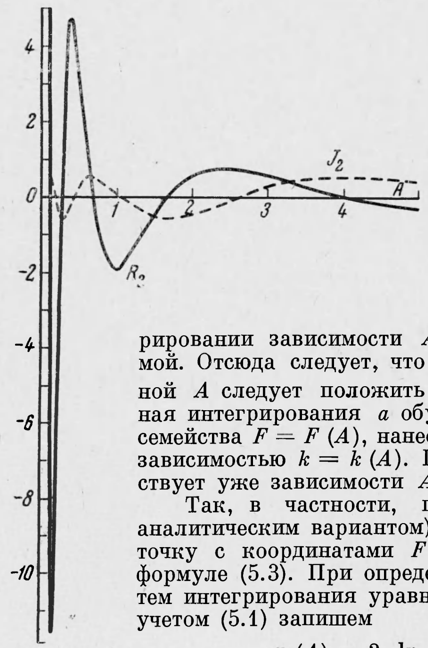
Фиг. 6

5. Анализ асимптотического метода и сравнение с точным решением задачи распространения. Сравнение решений предложенным асимптотическим и точным методами произведем с применением аналитического варианта асимптотического метода, т. е. не прибегая к графическим построениям. С этой целью, рассматривая только что решенный пример для $k(A) = A^{-2}$, определим сначала зависимость $A = A(x)$, исходя из формулы (4.2). Интегрируя уравнение $F^{\cdot} = -FA^{-1}$, получим

$$F = {}^1/_2 aA^{-1} \tag{5.1}$$

Учитывая, далее, что $F = A'$ в уравнении (5.1), и интегрируя его, получим

$$A = (ax + b)^{1/2} \tag{5.2}$$



Фиг. 7

Здесь $^1/_2\, a$ и b — постоянные интегрирования. Таким образом, заданная функция $k = k(A) = A^{-2}$ соответствует следующей зависимости параметра неоднородной среды от координаты:

$$k(x) = k[A(x)] = (ax + b)^{-1} \tag{5.3}$$

Сравнение полученного соотношения (5.3) с графиком фиг. 3 свидетельствует, что постоянная интегрирования b характеризует величину смещения вдоль горизонтальной оси кривой $k = k(x)$. Это смещение, как уже отмечалось, определяется лишь начальными условиями, принятыми при графическом интегрировании зависимости $A = A(x^{\cdot})$, нанесенной на фиг. 2 в виде прямой. Отсюда следует, что при графическом интегрировании по переменной A следует положить нижний предел равным $b^{1/2}$, тогда как постоянная интегрирования a обусловливает выбор той или иной кривой из семейства $F = F(A)$, нанесенного на фиг. 1 и характеризуемого заданной зависимостью $k = k(A)$. При переходе к координатам A, $x^{\cdot}$ это соответствует уже зависимости $A = A(x^{\cdot})$.

Так, в частности, произведенный (при решении задачи графоаналитическим вариантом) выбор на фиг. 1 кривой, проходящей через точку с координатами $F = 0.5$, $A = 1$, эквивалентен выбору $a = 1$ в формуле (5.3). При определении фазы прямой парциальной волны путем интегрирования уравнения (4.4) по переменной A с последующим учетом (5.1) запишем

$$\varphi(A) = 2s \ln A + \varphi_0 \qquad (s = {}^1/_2\,[4a^{-2} - 1]^{1/2})$$

Параметр $M(A)$ определяется, в соответствии с (4.5), соотношением

$$M(A) = 2(s - a^{-1})A^{-1}$$

$N(A)$ — соотношением (4.6). Поэтому частное решение уравнения (0.1) имеет вид

$$[\alpha(x) + \beta(x)] = -A\left[\frac{4}{a}\left(\frac{2}{a} - s\right)\right]^{1/2} \exp\left\{i\left[2s\ln A + \varphi_0 + \operatorname{arctg} 2\left(\frac{1}{a} - s\right)\right]\right\}$$

Учтя (5.2), перепишем это выражение

$$[\alpha(x) + \beta(x)] = D(ax+b)^{1/2} \exp [is \ln (ax+b)]$$

$$D = -\left[\frac{4}{a}\left(\frac{2}{a} - s\right)\right]^{1/2} \exp \left\{i\left[\varphi_0 + \operatorname{arc\,tg} 2\left(\frac{1}{a} - s\right)\right]\right\}$$

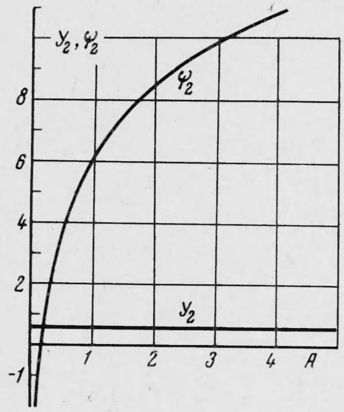
Переходя к общему решению (1.1), получим

$$\psi(x) = (ax+b)^{1/2} \{C_1 \exp [is \ln (ax+b)] + C_2 \exp [-is \ln (ax+b)]\} \qquad (5.4)$$

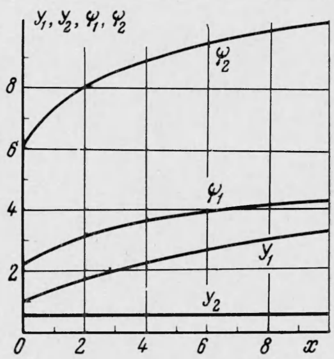
где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

В правильности найденного сейчас решения нетрудно убедиться путем прямой подстановки (5.4) и (5.3) в исходное уравнение (0.1).

Рассмотренный пример свидетельствует о возможности применения как графоаналитического, так и аналитического вариантов асимптотического метода решения задачи распространения волн в неоднородной среде. Во втором случае следует, не прибегая к графическим построениям, произвести соответствующие преобразования, а в тех случаях, когда задана достаточно сложная функция $k = k(A)$, — применить численное интегрирование.



Фиг. 8



Фиг. 9

Так как расчетная схема предложенного метода не нуждается, в отличие от известных в теории неоднородных сред приближенных методов, в введении каких бы то ни было упрощающих предположений, его точность определяется лишь точностью вычислений, производимых в процессе последовательного осуществления перечисленных выше элементарных операций (интегрирования и преобразования переменной).

Рассмотренным асимптотическим методом были получены решения задачи распространения волн в неоднородной среде и для более сложных случаев, включающих периодическую зависимость параметра от координаты, которые не приводятся здесь за неимением места.

Поступила 20 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.
3. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки. Изд-во АН СССР, 1947. стр. 57.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
5. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям. Изд. иностр. лит., 1961, т. 2.
6. Мировицкий Д. И. Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1964, вып. 26, стр. 72.
7. Мировицкий Д. И. Распространение звука в неоднородной среде и внутренние условия. Акуст. ж., 1964, т. 1, № 10, стр. 88.
8. Born M., Wolf E. Principles of Optics. London. 1959.
9. Мировицкий Д. И. О двух вариантах задачи синтеза оптически неоднородного слоя. Оптика и спектроскопия, 1965, т. 4, № 18, стр. 668.
10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1963.
11. Rensuky Isui. The non-linear theory of electric generators. Rept Radio res. Japan, 1935. vol. 5, No. 2.