

$\varepsilon = 0,78$. В координатах γ, ε расчетная критическая область воспламенения (заштрихована) представлена на рис. 2. Предельные точки критической линии можно получить из анализа (8): $\gamma \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow e, \varepsilon \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1/4e^2$.

Если на стадии инертного прогрева, описываемого уравнением (4), линия фазовой траектории данного процесса в координатах γ, ε с течением времени достигнет кривой, отделяющей критическую область, то произойдет воспламенение металла.

На рис. 3 приведены примеры изменения критических условий воспламенения для различных кинетических констант окисления K_m и E . Использовались следующие значения теплофизических величин: $\lambda = 58,5$ Вт/(м · К), $\sigma = 4,7$, $\rho_1 = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $\kappa = 1,4 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $Q_0 = 3220$ кДж/кг, $\delta_0 = 10^{-7}$ м, $a = 1,5 \cdot 10^{-2}$ кг/м². Рост коэффициента теплообмена α при прочих равных условиях приводит к увеличению температуры воспламенения.

Отметим, что использованное допущение о возможности пренебрежения вкладом инертного прогрева металла на стадии воспламенения (γ и ε постоянны при $i > i_*$) справедливо, когда характерное время прогрева $i_* \sim \lambda^2/(\alpha^2 \kappa)$ много больше характерного времени химической реакции $t_x \sim r_0^2/\kappa = \varepsilon^2 \lambda^2/(\alpha^2 \kappa) = \varepsilon^2 t_*$ и выполняется при $\varepsilon^2 < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Хайкин, В. И. Блошенко, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1970, 6, 4, 474.
2. В. И. Розенбанд. ФГВ, 1974, 10, 2, 212.
3. Окисление металлов/Под ред. Ж. Бенара. Т. 2. М.: Металлургия, 1969.
4. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 22/V 1983,
после доработки — 5/VIII 1985

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЗАЖИГАНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ РАСЧЕТНОЙ СЕТКОЙ

И. Г. Боровской, С. С. Бондарчук, Е. А. Козлов, В. Н. Вилюнов
(Томск)

Наряду с адиабатической, квазистационарной и некоторыми другими теориями численный метод решения нелинейного уравнения теплопроводности остается основным инструментом теоретического исследования процесса зажигания конденсированных систем, особенно в случае переменного во времени подводимого теплового потока и при решении задачи воспламенения в общей постановке с учетом химического превращения исходного вещества. Широкое распространение при этом получили разностные схемы, использующие равномерные расчетные сетки, хотя их применение сопряжено с одной трудностью. Она заключается в невозможности достаточно точной оценки глубины прогрева конденсированного вещества на момент воспламенения пороха. Следовательно, затруднен и оптимальный выбор соответствующего количества расчетных узлов сетки при заданном, довольно малом шаге интегрирования по пространству. Это заставляет прибегать в практике расчетов к ряду специальных приемов, но все они, как правило, приводят либо к повышенным затратам ресурсов ЭВМ, либо к потере точности вычислений и искажению конечных результатов.

Предлагаемая явная разностная схема на адаптирующейся расчетной сетке, меняющейся в зависимости от условий прогрева, лишена отмеченных недостатков. Выбор явной реализации разностной схемы не

случае и обосновывается следующим. При численном решении целого класса задач, моделирующих быстропотекающие процессы, неизбежно возникает ограничение на временной интервал τ , причем это ограничение вытекает из физической сущности нестационарного процесса. Для расчетов же с лимитированным τ использование явных схем предпочтительнее неявных, так как при практически совпадающих ошибках аппроксимации первые обладают большей технологичностью и требуют меньше времени на один вычислительный цикл.

1. В рамках твердофазной модели общая постановка задачи зажигания конденсированного вещества включает [1, 2]:

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{Q_s}{c} f(a, T), \quad (1)$$

уравнение химической кинетики

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -f(a, T), \quad (2)$$

$$f(a, T) = \frac{z}{\rho} a^k \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right), \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Начальные условия: $T(x, 0) = T_n$, $a(x, 0) = 1$.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x=0 \quad \alpha(t) [T_g(t) - T(0, t)] &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ x \rightarrow \infty \quad T &= T_n. \end{aligned}$$

Здесь T , a — температура и относительная концентрация исходного вещества; $f(a, T)$ — скорость химической реакции k -го порядка; κ , λ , c , ρ — температуро- и теплопроводность, теплоемкость и плотность пороха; Q_s , z , E_A — тепловыделение, предэкспонент и энергия активации; $\alpha(t)$, $T_g(t)$ — коэффициент теплоотдачи и температура обдувающего газового потока.

Пусть $\Delta(t)$ — глубина прогрева, при этом $T(\Delta, t)$ отличается от T_n на величину $\Delta T_n = (10^{-2} \div 10^{-3}) T_n$. Разностную схему получим интегрированием по пространству методом [3] на сетке с шагом $h(t) = \Delta(t)/N$

$$\begin{aligned} \int_{(n-1/2)h}^{(n+1/2)h} \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{Q_s}{c} f \right] dx &= 0, \quad \int_{(n-1/2)h}^{(n+1/2)h} \left[\frac{\partial a}{\partial t} - f \right] dx = 0, \\ \frac{d}{dt} (T_n h) &= \frac{\kappa}{h} (T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1}) + \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} [(n+1/2)(T_{n+1} + T_n) - \\ &\quad - (n-1/2)(T_n + T_{n-1})] + \frac{Q_s}{c} h f_n, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} (a_n h) = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} [(n+1/2)(a_{n+1} + a_n) - (n-1/2)(a_n + a_{n-1})] - h f_n,$$

$$n = 1, \dots, N.$$

Температура на поверхности конденсированного вещества определяется из (3) и разностного аналога граничного условия при $x = 0$

$$T_{-1} = T_1 + 2\alpha h / \lambda \cdot (T_g - T_0),$$

а для вычисления относительной концентрации исходного вещества при $n = 0$ следует проинтегрировать уравнение (2) в интервале от нуля до $h/2$. Окончательно ($\gamma = \kappa \tau / h H$, $\beta = h / H$, H — шаг по пространству на новом временном слое $t_0 + \tau$)

$$T^{N+1} = T_n, \quad a^{N+1} = 1,$$

$$T^n = (\mu_{n-1} + \gamma) T_{n-1} + (\mu - 2\gamma) T_n + (\mu_{n+1} + \gamma) T_{n+1} + Q_s / c \cdot \tau \beta f_n, \quad (4)$$

$$a^n = \mu_{n-1} a_{n-1} + \mu a_n + \mu_{n+1} a_{n+1} - \tau \beta f_n, \quad (5)$$

$$\mu_{n-1} = -1/2(1 - \beta)(n - 1/2), \mu = 1/2(1 + \beta), \mu_{n+1} = 1/2(1 - \beta)(n + 1/2), \\ n = 1, \dots, N,$$

$$T^0 = [\mu - 2\gamma + (\mu_1 + \gamma) \cdot 2\alpha h/\lambda] T_0 + 2(\mu_1 + \gamma) T_1 + \\ + 2\alpha h/\lambda \cdot (\mu_1 + \gamma) T_g + Q_s/c \cdot \tau \beta f_0, \quad (6)$$

$$a^0 = 1/3[(2 + \beta)a_0 + (2 - \beta)a_1 - a^1 - 4\tau \beta f_{1/4}]. \quad (7)$$

Верхним индексом отмечены параметры на слое $t_0 + \tau$.

Вычисление невязки разностных уравнений (4)–(7) показывает, что разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй по пространству.

Доказательство необходимого условия устойчивости (4)–(7) проводилось методом разделения переменных, а достаточного — энергетическим методом [4]. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательные результаты исследования.

Условие устойчивости по начальным данным распадается на два неравенства. Первое из них $1 - 1/N \leq h/H \leq 1 + 1/N$ ограничивает скорость изменения расчетной области: приращение зоны прогрева за время τ не может превышать одного пространственного интервала. Второе

$$\tau \leq hH/2\kappa(1 - 1/2N) \quad (8)$$

лимитирует шаг интегрирования по времени. Разностная схема устойчива по правой части, если

$$\tau \leq \tau_R = \left[\frac{h}{H} \frac{Q_s}{c} \max_n \left(\frac{E_A}{RT_n} f_n \right) \right]^{-1}, \quad (9)$$

а по граничному условию, когда

$$\tau \leq \tau_G = \frac{hH}{2\kappa} \left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2\lambda}} - \frac{1}{2N} \right). \quad (10)$$

Условие (10) носит более жесткий характер по сравнению с соотношением (8), поэтому шаг интегрирования τ для (4)–(7) выбирается наименьшим из двух значений τ_R и τ_G . Заметим, что игнорирование условия (9) при определении τ ведет к нарушению корректности разностной задачи — к нарушению требования непрерывной и монотонной зависимости численного решения от входных данных [4].

Заканчивая описание расчетного алгоритма, укажем один из возможных способов определения H :

$$\frac{H}{h} = 1 + \frac{T_N - (T_n + \Delta T_n)}{N(T_{N-1} - T_N)}. \quad (11)$$

Формула (11) получена линейной интерполяцией по значениям температуры в $N - 1$ и N узлах разностной сетки.

2. Все расчеты выполнены для пороха Н с характеристиками [1]:

$$\kappa = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \lambda = 0,235 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$z/\rho = 2,59 \cdot 10^{14} \text{ 1/с}, E_A/R = 17\,680 \text{ К}.$$

Для оценки точности получаемых результатов численное решение однородного уравнения теплопроводности (1) ($Q_s/c = 0$) на адаптирующей сетке сравнивалось с известным аналитическим решением [5]

$$T_L(x, t) = T_n + (T_g - T_n) \left[\operatorname{erfc}(z_2) - \exp\left(\frac{\alpha x}{\lambda} + z_1^2\right) \operatorname{erfc}(z_1 + z_2) \right], \quad z_1 = \\ = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\kappa t}, \quad z_2 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad \operatorname{erfc} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty \exp(-y^2) dy \quad \text{для задачи прогрева}$$

полубесконечного тела при постоянных $\alpha = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и $T_g = 2000 \text{ К}$. На рис. 1 и 2 кроме зависимости температуры конденсированного вещества T_s от времени и температурного профиля при $t = 8 \text{ мс}$

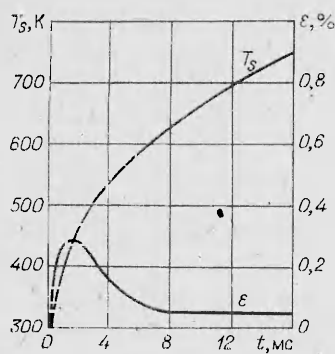


Рис. 1.

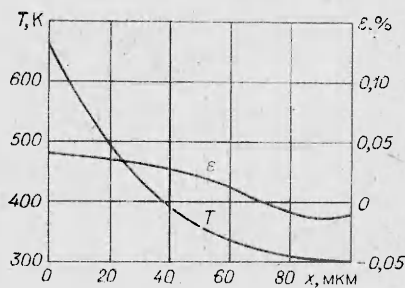


Рис. 2.

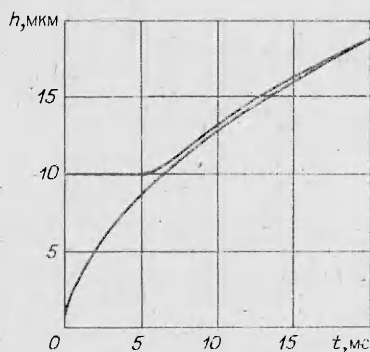


Рис. 3.

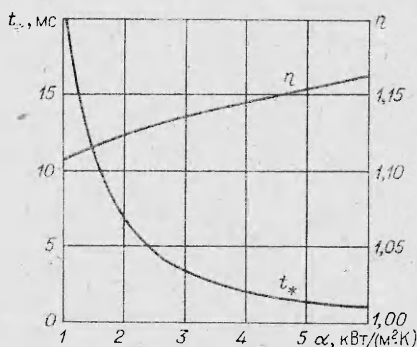


Рис. 4.

показана относительная погрешность численного решения

$$\varepsilon = \left[\frac{T(x, t)}{T_L(x, t)} - 1 \right] \cdot 100\%.$$

Данное тестирование проведено для двух значений начального шага по пространству $h_1(0) = 10$ и 1 мкм и $N = 10$. Изменение $h(t)$ при $t > 0$ представлено на рис. 3. Практическое совпадение кривых, начиная с $t = 7$ мс, свидетельствует о высоких адаптационных свойствах разностной сетки.

3. На основе предложенной разностной схемы (4)–(7) проведено исследование совместного влияния параметров внешней среды и выгорания на время зажигания пороха Н.

Момент воспламенения фиксировался при выполнении следующих условий:

а) $\tau_R \leq \tau_G$, т. е. ведущая роль в общем тепловом балансе системы переходит к тепловыделению;

б) температура на поверхности вещества $T_s(t) \geq T_*$, где T_* — максимально возможная температура обдувающего газового потока. Второе условие соответствует приближению $T_s(t)$ к асимптотическому решению системы (1), (2) и учитывает период индукции зажигания [1].

Рис. 4 дает представление о характере зависимости времени зажигания $t_*(k=0)$ для химической реакции нулевого порядка от коэффициента теплоотдачи α . Здесь же показано отношение времен зажигания при первом и нулевом порядке реакции $\eta = t_*(k=1)/t_*(k=0)$. Давление, при котором происходит воспламенение пороха, равно 2 МПа, $Q_s/c = 265$ К [6]. Увеличение параметра η с ростом α можно объяснить тем, что скорость тепловыделения реакции первого порядка менее чувствительна к изменению α по сравнению со скоростью реакции нулевого порядка. Повышение давления до 7 МПа, $Q_s/c = 355$ К заметно уменьшает влияние выгорания ($\eta = 1.03$ при $\alpha = 10^4$ Вт/(м²·К)), что

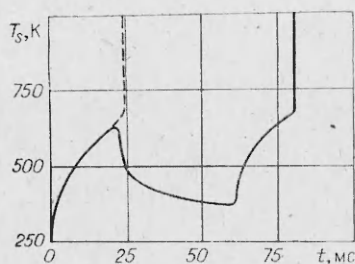


Рис. 5.

для постоянного значения $T_g = 2000$ К. Этот же сброс температуры в расчете с $k = 0$ находится за порогом зажигания и не влияет на время воспламенения $t_* = 22.2$ мс.

Таким образом, в работе предложена экономичная явная разностная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности, моделирующего быстропротекающие физические процессы, в число которых входит и задача зажигания конденсированных систем. Применение расчетной сетки, меняющейся в зависимости от условий теплообмена, позволяет обойти трудности, возникающие в этом случае при использовании разностных схем с $h(t) = \text{const}$. Анализ свойств схемы, основанный на прямом численном эксперименте, показал хорошую сходимость разностного решения для задачи прогрева инертного полубесконечного тела. Это дает уверенность в том, что результаты расчета общей системы (1), (2) также имеют высокую достоверность.

Исследовано совместное влияние параметров обдувающего газового потока и выгорания на время воспламенения пороха Н, причем при специальном законе изменения $T_g(t)$ отмечена весьма значительная разница между временами зажигания, соответствующими первому и нулевому порядку химической реакции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Виллюнов. Теория зажигания конденсированных систем. Новосибирск: Наука, 1984.
2. А. Э. Аверсеп, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержапов. ИФЖ, 1965, 9, 2, 245.
3. Н. Н. Кадиткин. Численные методы. М.: Наука, 1978.
4. А. А. Самарский, А. В. Гулин. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
5. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
6. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 10/VI 1985

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПЛАМЕНИ ПО ТРУБЕ

И. А. Буфетов, В. Б. Федоров, В. К. Фомин

(Москва)

Введение. В настоящей работе выполнены экспериментальные исследования режимов распространения оптического разряда в атмосферном воздухе по кварцевой трубке в луче неодимового лазера интенсивностью $0,4\text{--}5$ МВт/см². Вблизи верхней границы указанного диапазона обнаружен переход к режиму световой детонации. Предварительные результаты этих опытов опубликованы в [1].

В работе [2] впервые продемонстрирована возможность поддержания плазмы и ее распространения с дозвуковой скоростью в лазерном луче допробойной интенсивности. С учетом аналогии между физическими механизмами обнаруженного в [2] распространения плазмы и рас-