УДК 532.529.5

ВЗРЫВНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗОНАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ КАНАЛОВ И ЕМКОСТЕЙ

В. Ш. Шагапов, Г. Я. Галеева

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450000 Уфа

Построена математическая модель истечения газонасыщенной жидкости из цилиндрических каналов. Рассмотрены две предельные ситуации, обеспечивающие линейный и квадратичный законы зависимости силы гидравлического трения от скорости потока. Установлено, что процесс опорожнения полубесконечного канала состоит из двух этапов. На начальном этапе эффектом гидравлического сопротивления можно пренебречь, и процесс истечения описывается решением вида волны Римана. Для последующего этапа, когда инерция несущественна, получены нелинейные уравнения и для них построены автомодельные решения. Решена задача об опорожнении через щель конечной емкости. Показано, что в зависимости от условий внутри емкости и на выходе процесс истечения проходит как в режиме газодинамического запирания, так и в дозвуковом режиме. Приведены примеры численных расчетов.

Введение. Рассмотрим течение жидкости, насыщенной газом при некотором давлении p_0. Тогда снижение давления в потоке до значений p_0 будет приводить к «вскипанию» жидкости (образованию газовой фазы). При построении теоретической модели течения с газовыделением примем следующие допущения. Образование газовой фазы происходит только из-за выделения растворенного газа (жидкость считаем «холодной», поэтому парциальным давлением паров жидкости в газовой фазе можно пренебречь). Зависимость текущей концентрации растворенного газа от давления удовлетворяет закону Генри, следовательно, выделение растворенного газа происходит в равновесном режиме. Такой режим может реализоваться при наличии в жидкости достаточно большого количества примесных частиц, являющихся центрами газовыделения. В частности, для равновесного газовыделения необходимо, чтобы характерное время диффузии $t_D = 1/n^{2/3}D$ (n — число примесных частиц, D — коэффициент диффузии в жидкости) было значительно меньше характерного времени задачи $\hat{t}$ ($t_D \ll \hat{t}$). Отсюда для n получим следующую оценку: $n \gg \tilde{n}$ ($\tilde{n} = (D\hat{t})^{3/2}$). Кроме того, при принятом выше условии равновесного газовыделения капиллярные силы на межфазной поверхности также несущественны. Для этого, в свою очередь, радиусы газовых включений должны удовлетворять соотношению $a \gg \tilde{a}$ ($\tilde{a} = 2\sigma/p$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, p — давление). Полагаем, что скорости фаз совпадают, температура системы постоянна и равна исходной температуре T_0.

Отметим, что качественно похожая картина имеет место при течении обычной вскипающей жидкости, когда давление в потоке достигает значения насыщения p_0, соответствующего исходной температуре жидкости T_0 ($p_0 = p_S(T_0)$). Здесь также можно построить аналогичную теорию с равновесными фазовыми переходами в адиабатических условиях, принимая вместо закона Генри уравнение Клапейрона — Клаузиуса (этому случаю посвящена отдельная работа).

26

1. Основные уравнения. В рамках принятых допущений запишем уравнения масс и импульсов в канале постоянного сечения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0; \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \tau. \tag{1.2}$$

Здесь ρ, w и p — средняя плотность газожидкостной смеси, скорость и давление; τ — приведенная сила вязкого трения. При этом для средней плотности можем записать

$$\rho = \rho_l^0(1 - \alpha_g) + \rho_g^0 \alpha_g, \tag{1.3}$$

где ρ_i^0 $(i = l, g)$ — истинные плотности жидкости и газа в свободном состоянии; индексы l и g относятся соответственно к жидкости и газу; α_g — объемное содержание газовой фазы.

В дальнейшем будем считать жидкость несжимаемой, а газ — калорически совершенным:

$$\rho_l^0 = \text{const}\,, \quad p = \rho_g^0 RT \tag{1.4}$$

(R — газовая постоянная).

В соответствии с законом Генри для массовой концентрации растворенного в жидкости газа примем

$$k = k_0 p / p_0 \tag{1.5}$$

(k_0 — массовая концентрация насыщенного газа при давлении p_0). Тогда для средней плотности газа получим

$$\rho_g = \rho_l^0 k(1 - \alpha_g) + \rho_g^0 \alpha_g. \tag{1.6}$$

Кроме того, в силу предположения равновесности по скоростям имеет место $\rho_g/\rho = k_0$. Отсюда, используя (1.3)–(1.6), можно получить уравнение состояния рассматриваемой газожидкостной системы

$$\frac{1}{\rho} = \left[\frac{1}{\rho_l^0} - \frac{k_0}{\rho_{g0}^0(1 - k_0)}\left(1 - \frac{p_0}{p}\right)\right]\left[1 - \frac{k_0}{1 - k_0}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right)\right]^{-1}. \tag{1.7}$$

Здесь ρ_{g0}^0 — истинная плотность свободного газа при давлении p_0 и температуре T_0. Таким образом, газонасыщенную жидкость в некоторых случаях можно рассматривать как баротропную среду с уравнением состояния (1.7). В большинстве случаев $k_0 \ll 1$, и поэтому выражение (1.7) можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_l^0} - \frac{k_0}{\rho_{g0}^0}\left(1 - \frac{p_0}{p}\right). \tag{1.8}$$

Отметим, что для этого уравнения состояния ударные волны разрежения невозможны. В случае, когда средняя плотность растворенного в жидкости газа $\rho_l^0 k_0$ близка к истинной плотности газа ρ_{g0}^0 в свободном состоянии $(\rho_l^0 k_0 \approx \rho_{g0}^0)$, газожидкостную систему будем называть совершенной и уравнение (1.8) упростится и примет вид

$$\rho = \frac{\rho_g^0}{k_0}\,\frac{p}{p_0}. \tag{1.9}$$

Этому случаю удовлетворяет вода, насыщенная углекислым газом, например, при $T = 288$ K [1].

26

На основе (1.8) для скорости звука имеем

$$C^2 = \frac{\rho_{g0}^0}{k_0 p_0} \frac{p^2}{\rho^2}. \tag{1.10}$$

Когда справедливо (1.9), для скорости звука получим $C^2 = k_0 p_0 / \rho_{g0}^0$. Следовательно, для совершенной системы скорость звука постоянна.

Для сравнения приведем уравнение состояния газожидкостной системы, когда газ полностью находится в свободном состоянии:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - k_0}{\rho_l^0} + \frac{k_0}{\rho_{g0}^0} \frac{p_0}{p}.$$

Здесь k_0 — массовое газосодержание в двухфазной смеси.

Для задания силы вязкого трения τ рассмотрим две предельные ситуации. Первая — «тонкий» канал, обеспечивающий линейный закон зависимости приведенной силы вязкого трения от скорости потока:

$$\tau = \rho \frac{w}{t_{(w)}}. \tag{1.11}$$

Для ламинарного течения в цилиндрическом канале при малом объемном содержании газовой фазы (несущей фазой является жидкость) характерный параметр $t_{(w)}$ в законе трения (1.11) можно в некотором приближении принять $t_{(w)} = a^2/8\nu_l$, где a — радиус канала, ν_l — кинематическая вязкость.

Вторая ситуация — «толстый» канал, когда реализуется турбулентное течение с квадратичным законом сопротивления [2]:

$$\tau = \rho \frac{|w|w}{z_{(w)}}, \quad z_{(w)} = \frac{2a}{\lambda}, \quad \lambda = \left(2 \lg \frac{a}{\delta} + 1{,}74\right)^{-1}, \tag{1.12}$$

где δ — шероховатость. Отметим, что в рамках принятых здесь допущений рассматриваемая система при давлениях, превышающих давление насыщения ($p > p_0$), является несжимаемой жидкостью ($\rho_0 = \text{const}$, $C = \infty$).

2. Опорожнение каналов. На основе уравнения импульса (1.2) с учетом (1.7) и (1.8) можно получить оценки для характерных промежутков времени t_* и расстояний z_*, когда инерционные эффекты могут оказать существенное влияние на картину течения в канале. При течении сжимаемой среды в каналах максимальные (критические) скорости потока лимитируются местной скоростью звука, поэтому при оценках в качестве характерных перепадов скоростей следует принять величину скорости звука. В случае линейного закона трения (1.11), полагая, что присутствующие в уравнении (1.2) слагаемые, обусловленные инерционными эффектами $\rho(\partial w/\partial t)$ и $\rho(\partial(w^2/2)/\partial z)$, и слагаемые, обусловленные гидравлическим сопротивлением $\rho w/t_{(w)}$, удовлетворяют условиям $\rho C/t_* \sim \rho C/t_{(w)}$ и $\rho C^2/2z_* \sim \rho C/t_{(w)}$, получим оценки для характерных времени и расстояния: $t_* \sim t_{(w)}$ и $z_* \sim C t_{(w)}/2$.

Следовательно, если в рассматриваемой системе возникают возмущения, характерные времена и расстояния изменения которых значительно превышают t_* и z_*, то инерционные эффекты не будут оказывать большого влияния на последующую картину течения. Если рассматривается, например, задача о внезапной разгерметизации на конце канала, то эффекты инерции существенны в основном в начальной стадии до времен t_* и на участке, примыкающем к концу и имеющем длину порядка z_*.

В случае квадратичного закона сопротивления (1.12) аналогично предыдущему получим оценки $t_* \sim z_{(w)}/C$, $z_* \sim z_{(w)}$.

Рассмотрим ситуацию, когда инерционные члены в уравнении импульсов несущественны. В задаче о разгерметизации канала этот случай соответствует более поздней стадии ($t \gg t_*$) опорожнения. Тогда на основе уравнений неразрывности и импульсов, пренебрегая в уравнении (1.2) слагаемыми в левой части, для случая линейного и квадратичного законов трения получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C^2 t_{(w)} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad w = -\frac{t_{(w)}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C^2 \sqrt{2z_{(w)}} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{\rho \left|\frac{\partial p}{\partial z}\right|}, \quad w|w| = -\frac{z_{(w)}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.2}$$

На основе уравнений (2.1) и (2.2) рассмотрим задачу о внезапном сбросе давления до значения $p_e < p_0$. Пусть начальная скорость в канале равна нулю. Тогда соответствующие краевые и начальные условия для уравнений (2.1) и (2.2) запишем в виде

$$p = p_0 \quad (t = 0,\ z \geqslant 0), \qquad p = p_e \quad (t > 0,\ z = 0). \tag{2.3}$$

Эта задача является автомодельной. Для удобства уравнения (2.1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \bar{C}^{2} k^{(1)} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{C} = \frac{C}{C_0}, \quad k^{(1)} = C_0^2 t_{(w)},$$
$$\bar{C}^2 = \frac{P^2}{\mathcal{R}^2}, \quad \mathcal{R} = \left((1 - \mathcal{R}_*) + \frac{\mathcal{R}_*}{P}\right)^{-1}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_l^0 \mathcal{R}_*}}, \quad \mathcal{R}_* = \frac{\rho_l^0 k_0}{\rho_{g0}^0}, \quad \mathcal{R} = \frac{\rho}{\rho_l^0}. \tag{2.4}$$

Здесь безразмерный параметр $\mathcal{R}_*$ соответствует коэффициенту абсорбции Оствальда [1]. Решение этого уравнения при условиях (2.3) можно искать в виде $P = P(\xi)$, $\xi = z/\sqrt{k^{(1)} t}$. При этом из условий (2.3) следует $P(0) = P_e$, $P(\infty) = 1$ ($P_e = p_e/p_0$). Тогда уравнение (2.4) в автомодельных переменных запишется как

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dP}{d\xi} = \bar{C}^2 \frac{d^2 P}{d\xi^2}. \tag{2.5}$$

Для массового расхода смеси через открытый конец канала $q = -(\rho w)_0$ имеем

$$q = \frac{t_{(w)} p_0}{\sqrt{k^{(1)} t}} P'(0). \tag{2.6}$$

В случае слабых перепадов давления ($p - p_0 \ll p_0$), полагая $\bar{C}^2 \approx 1$, уравнение (2.5) можно линеаризовать. Тогда его решение имеет вид [3]

$$P = P_e + (1 - P_e)\hat{O}(\xi), \quad \hat{O}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\xi/2} e^{-\alpha^2}\, d\alpha. \tag{2.7}$$

На рис. 1 представлено распределение безразмерного давления по длине канала в автомодельной переменной при $z = 0$, $\mathcal{R}_* = 1{,}74$ для двух значений давления на границе канала (сплошные линии *1*, *2* соответствуют $P(\xi = 0) = 0{,}2;\ 0{,}7$), штриховые линии рассчитаны по аналитическому решению (2.7).

Для массового расхода, определяемого выражением (2.6), получим $q_* = t_{(w)}(p_0 - p_e)/\sqrt{\pi k^{(1)} t}$. Коэффициент $\chi^{(1)} = q/q_* = \sqrt{\pi} P'(0)/(1 - P_e)$ определяет поправку для расхода, связанную с нелинейностью уравнения (2.5).

В случае квадратичного закона трения из уравнения (2.2) имеем

24

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \bar{C}^2 k^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{\mathcal{R} \frac{\partial P}{\partial z}}, \quad \mathcal{R} = \frac{\rho}{\rho_l^0}, \quad k^{(2)} = C_0^2 \sqrt{\frac{2z_{(w)} \rho_l^0}{p_0}}.$$

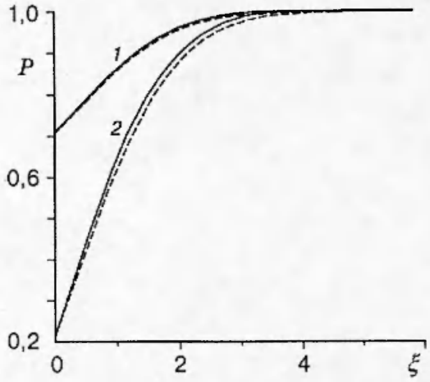

Рис. 1

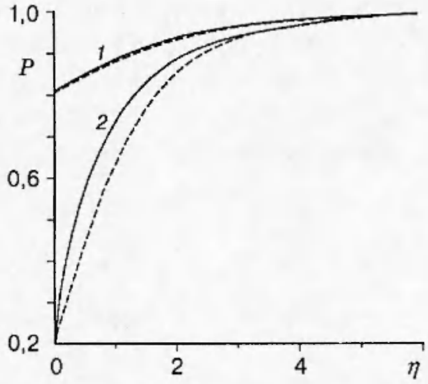

Рис. 2

В автомодельных переменных это уравнение запишется в виде

$$-\frac{2}{3}\eta\frac{dP}{d\eta} = \bar{C}^2\frac{d}{d\eta}\sqrt{\mathcal{R}\frac{dP}{d\eta}}, \quad \eta = \frac{z}{(k^{(2)}t)^{2/3}}. \tag{2.8}$$

Для слабых перепадов давления ($C \approx 1$, $\mathcal{R} \approx 1$) при введении новых параметров $\tilde{P} = (P - P_e)/(1 - P_e)$, $\tilde{\eta} = (1 - P_e)^{1/3}\eta$ на основе уравнения (2.8) получим

$$-\frac{2}{3}\tilde{\eta}\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{\eta}} = \frac{d}{d\tilde{\eta}}\sqrt{\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{\eta}}}. \tag{2.9}$$

Условия (2.3) для этих переменных запишутся как

$$\tilde{P}(0) = 0, \qquad \tilde{P}(\infty) = 1. \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.9), удовлетворяющее условиям (2.10), имеет вид

$$\tilde{P} = \frac{9}{2\alpha^2}\Big(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}^2 + \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\tilde{\eta}}{\alpha}\Big), \quad \alpha = \Big(\frac{9\pi}{4}\Big)^{1/3}. \tag{2.11}$$

На рис. 2 представлено распределение давления, рассчитанное по уравнению (2.8) при $\mathcal{R}_* = 1{,}7$ (линии *1* и *2* соответствуют $P(\eta = 0) = 0{,}8$ и $P(\eta = 0) = 0{,}2$, штриховые линии — решению (2.11)).

Согласно формуле расхода смеси через единицу площади сечения канала

$$q = -(\rho w)_0 = \sqrt{z_{(w)}\Big(\rho\frac{\partial p}{\partial z}\Big)_0},$$

имеем $q = \sqrt{z_{(w)}\rho(p_e)p_0 P'(0)}/(k^{(2)}t)^{1/3}$. В случае слабых перепадов давления с учетом (2.11) отсюда следует

$$q_* = \frac{\sqrt{z_{(w)}\rho(p_e)(1 - P_e)^{4/3}p_0\tilde{P}'(0)}}{(k^{(2)}t)^{1/3}}, \quad \tilde{P}'(0) = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{4}{9\pi}\Big)^{1/3}.$$

12 Тогда для безразмерного отношения $\chi^{(2)}$ аналогично можно записать

$$\chi^{(2)} = \sqrt{P'(0)/(1 - P_e)^{4/3}\tilde{P}'(0)}.$$

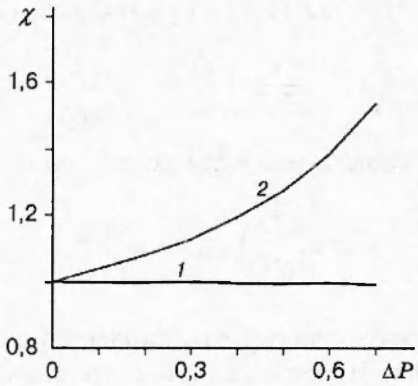

Рис. 3

На рис. 3 представлены зависимости $\chi^{(i)}$ от ΔP при $\mathcal{R}_* = 1{,}7$. Нумерация линий *1* и *2* соответствует значениям i.

Для начальной стадии ($t \ll t_*$) опорожнения, пренебрегая в уравнении (1.2) слагаемым, связанным с гидравлическим трением, имеем ситуацию, аналогичную газодинамической задаче, когда процесс истечения описывается решением в виде простой волны. При этом имеет место интеграл Римана

$$w(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho C}.$$

В случае газонасыщенной жидкости для ρ и C принимаем зависимости (1.8) и (1.10). На основе интеграла Римана получим $w(p) = \sqrt{k_0 p_0/\rho_{g0}^0}\,\ln(p/p_0)$.

При слабых перепадах давления ($p_0 - p \ll p_0$), полагая $C(p) = C(p_0) = C_0$, $\rho(p) \approx \rho(p_0) = \rho_l^0$, отсюда получим $w(p) = (p - p_0)/(\rho_l^0 C_0)$.

Здесь возможны два режима истечения [4]. Первый, когда $-w(p_e) < C(p_e)$ и разрежение до давления p_e распространяется относительно трубы со скоростью $w(p_e) + C(p_e)$, а на выходном срезе ($z = 0$) устанавливается давление p_e. В случае, когда $-w(p_e) > C(p_e)$, разрежение до значения p_e внутри трубы невозможно, так как соответствующее возмущение сносится средой в сторону $z < 0$ и на срезе канала устанавливается критическое давление p_C, реализующее $-w(p_C) = C(p_C)$. Из интеграла Римана с учетом (1.8) и (1.10) получается трансцендентное уравнение для определения p_C

$$C(p_C) = \int\limits_{p_C}^{p_0} \frac{dp}{\rho(p) C(p)}.$$

Подставляя в правую часть вместо $\rho(p)$ и $C(p)$ выражения (1.8) и (1.10), получим $(1 + \ln P_C)/P_C = (\mathcal{R}_* - 1)/\mathcal{R}_*$, $P_C = p_C/p_0$. В случае совершенной системы отсюда следует $p_C = p_0/e$. Отметим, что передний фронт волны разрежения движется относительно канала со скоростью $C_0 = C(p_0)$.

3. Установившееся истечение через цилиндрические каналы. Для стационарного течения уравнения (1.1) и (1.2) могут быть записаны в виде 23

$$\rho w = m = \mathrm{const}\,; \tag{3.1}$$

$$m\,\frac{dw}{dz} + \frac{dp}{dz} = -\tau. \tag{3.2}$$

В случае линейного закона трения (1.7) из уравнений (3.1) и (3.2) следует

$$\left(1-\frac{m^2}{\rho^2C^2}\right)\frac{dp}{dz}=-\frac{m}{t_{(w)}}.$$

Отсюда, интегрируя по длине канала (от нуля до z_c), получим

$$\int\limits_{p_+}^{p_-}\left(1-\frac{m^2}{\rho^2C^2}\right)dp=-\frac{mz_c}{t_{(w)}}. \qquad (3.3)$$

Индексы «плюс» и «минус» означают, что параметр отнесен соответственно к входу ($z=0$) и выходу ($z=z_c$) канала. Используя (1.11), уравнение (3.3) приведем к виду

$$p_+-p_--m^2\left(\frac{1}{\rho_+}-\frac{1}{\rho_-}\right)=\frac{mz_{(w)}}{t_{(w)}}.$$

Разрешая это уравнение относительно m, получим

$$m=\left[\frac{z_c}{2t_{(w)}}-\sqrt{\frac{z_c^2}{4t_{(w)}^2}+(p_+-p_-)\left(\frac{1}{\rho_+}-\frac{1}{\rho_-}\right)}\,\right]\left(\frac{1}{\rho_+}-\frac{1}{\rho_-}\right)^{-1}.$$

Подставляя сюда зависимости плотности от давления из (1.8), имеем

$$m=\frac{\rho_{g0}^0}{k_0p_0}\left[\frac{z_c}{2t_{(w)}}-\sqrt{\left(\frac{z_c}{2t_{(w)}}\right)^2-\frac{(p_+-p_-)^2}{p_+p_-}\,\frac{k_0p_0}{\rho_{g0}^0}}\,\right]\left(\frac{1}{p_+}-\frac{1}{p_-}\right)^{-1}. \qquad (3.4)$$

Эта формула дает значение расхода кипящей жидкости через цилиндрический канал по известным значениям давления на входе и выходе из канала.

В случае квадратичного закона трения аналогичное соотношение имеет вид

$$m=\sqrt{\left(\ln\frac{\rho_-}{\rho_+}+\frac{z_c}{z_{(w)}}\right)^{-1}\int\limits_{p_+}^{p_-}\rho\,dp}.$$

Отсюда с учетом (1.8) следует

$$m=\left(p_+-p_--\frac{k_0p_0}{\rho_{g0}^0}\left(\frac{1}{\rho_l^0}-\frac{k_0}{\rho_{g0}^0}\right)\ln\frac{p_+\rho_-}{p_-\rho_+}\right)^{1/2}\left(\left(\frac{1}{\rho_l^0}-\frac{k_0}{\rho_{g0}^0}\right)\left(\ln\frac{\rho_+}{\rho_-}+\frac{z_c}{z_{(w)}}\right)\right)^{-1/2}. \qquad (3.5)$$

Для совершенной системы имеем

$$m=\sqrt{\frac{\rho_{g0}^0}{2k_0p_0}}\sqrt{\frac{p_+^2-p_-^2}{\ln(p_+/p_-)+z_c/z_{(w)}}}.$$

При истечении из большой емкости можно считать, что давление и скорость на входном сечении трубчатой насадки связаны интегралом Бернулли:

$$\frac{w_+^2}{2}+\int\limits_{p_0}^{p_+}\frac{dp}{\rho}=0,\quad m=\rho_+w_+\quad \text{или}\quad \frac{m^2}{2\rho_+^2}+\int\limits_{p_0}^{p_+}\frac{dp}{\rho}=0.$$

14

Отсюда, используя уравнения состояния (1.8), получим

$$\frac{m^2}{2\rho_+^2}+\left(\frac{1}{\rho_l^0}-\frac{k_0}{\rho_{g0}^0}\right)(p_+-p_-)+\frac{k_0p_0}{\rho_{g0}^0}\ln\frac{p_+}{p_0}=0. \qquad (3.6)$$

Здесь p_0 — давление в объеме вдали от выходного сечения емкости. Таким образом, чтобы определить расход газонасыщенной жидкости через трубку, необходимо совместно рассмотреть уравнения (3.6) и (3.4) (или (3.5)). При слабом перепаде давления ($p_0 - p_+ \ll p_0$) вместо (3.6) можно записать

$$\frac{w_+^2}{2} + \frac{p_+ - p_0}{\rho_l^0} = 0 \quad \text{или} \quad m = \sqrt{2(p_0 - p_+)\rho_l^0}.$$

Соотношения (3.4) (или (3.5)) совместно с (3.6) позволяют определить расход газонасыщенной жидкости из большой емкости при условии, что давление на выходном срезе канала p_- выше, чем давление p_C, при котором происходит запирание потока ($w_- = C(p_C)$). Если давление вне канала меньше, чем p_C, то будет реализовываться критический расход, определяемый выражением

$$m = \rho(p_C)C(p_C) = m_C. \tag{3.7}$$

Таким образом, в зависимости от условий внутри емкости, определяемых газонасыщенностью, и условий вне емкости, определяемых давлением, а также геометрическими и гидравлическими характеристиками канала, могут реализоваться два режима истечения: критический и докритический. В случае докритического истечения ($p_- > p_C$, $m < m_C$) по известным параметрам жидкости, находящейся в емкости (например, температуре T_0), и давлению p_- вне емкости необходимо совместно решить уравнения (3.5) и (3.6), представляющие систему трансцендентных уравнений для двух неизвестных параметров m, p_+. При критическом истечении ($p_- < p_C$) следует рассмотреть систему трех уравнений (3.5), (3.6) и (3.7) для трех неизвестных параметров m_C, p_+, p_C.

4. Об истечении шампанского. Рассмотрим задачу об опорожнении через щель емкости, имеющей конечный объем. Полагаем, что давление в основном объеме в достаточном удалении от щели однородное (условие гомобаричности), а процесс истечения квазиустановившийся. Запишем уравнение сохранения массы для газожидкостной смеси, находящейся в объеме V:

$$V\frac{d\rho_{(i)}}{dt} = -S\rho_{(e)}w_{(e)}, \tag{4.1}$$

где $\rho_{(i)}$ — средняя плотность смеси в емкости; $\rho_{(e)}$, $w_{(e)}$ — значения плотности и скорости истечения на срезе щели; S — площадь поперечного сечения щели. В силу принятых выше допущений давление в объеме и на выходном сечении и скорость истечения связаны интегралом Бернулли

$$\frac{w_{(e)}^2}{2} + \int\limits_{p_{(e)}}^{p_{(i)}} \frac{dp}{\rho} = 0. \tag{4.2}$$

Здесь возможны два режима истечения. Во-первых, истечение в режиме газодинамического запирания, когда скорость истечения $w_{(e)}$ равна местной скорости звука. При этом давление p_C на выходном срезе щели больше внешнего давления p_e и определяется из уравнения

$$C(p_C) = w(p_C), \tag{4.3}$$

где $w(p_C) = w_{(e)}$ находится на основе интеграла Бернулли (4.2).

Из (4.3) с учетом (1.8), (1.10) и (4.2) получим следующее трансцендентное уравнение для определения p_C в зависимости от текущего значения давления внутри емкости $p_{(i)}$: 34

$$(1-\mathcal{R}_*)P_C+\mathcal{R}_* = \sqrt{2\mathcal{R}_*}[(1-\mathcal{R}_*)(P_{(i)}-P_C)+\mathcal{R}_*\ln(P_{(i)}/P_C)]^{1/2}, \quad P_{(i)} = \frac{p_{(i)}}{p_0}, \quad P_C = \frac{p_C}{p_0}. \tag{4.4}$$

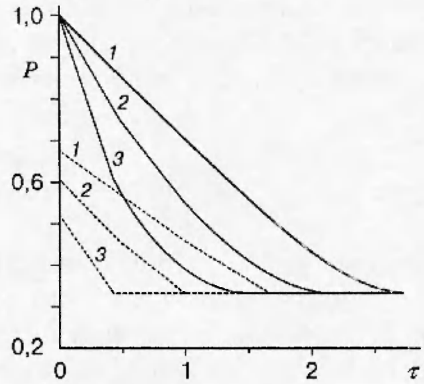

Рис. 4

Если значение p_C больше внешнего давления $p_{(e)}$, то вместо $\rho_{(e)}$ и $w_{(e)}$ в уравнении (4.1) следует использовать значения плотности и скорости по формуле (1.7) и (4.2) при $p = p_C$. На основе (4.1) с учетом (4.4) получим уравнение для изменения давления в емкости

$$\mathcal{R}_*^{3/2}\frac{dP_{(i)}}{d\tau} = -P_C[(1-\mathcal{R}_*)P_{(i)}+\mathcal{R}_*]^2 \qquad \left(\tau = t\,\frac{S}{V}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_e^0}}\right). \tag{4.5}$$

Для совершенной системы из (4.4) и (4.5) следует $dP_{(i)}/d\tau = -P_{(i)}/\sqrt{e}$, $P_C = P_{(i)}/\sqrt{e}$.

Если давление p_C (или P_C), определяемое из уравнения (4.4) для исходного состояния ($p_{(i)} = p_0$), не больше внешнего давления p_e ($p_C \leqslant p_e$), то вместо уравнения (4.5) с учетом (1.8) и (4.2) при $p_{(e)} = p_e$ из (4.1) получим

$$\mathcal{R}_*\frac{dP_{(i)}}{d\tau} = -\sqrt{2}P_e[(1-\mathcal{R}_*)P_{(i)}+\mathcal{R}_*]^2[(1-\mathcal{R}_*)(P_{(i)}-P_e)+\mathcal{R}_*\ln(P_{(i)}/P_e)]/[(1-\mathcal{R}_*)P_e+\mathcal{R}_*]. \tag{4.6}$$

Отсюда для совершенной системы получим уравнение

$$\frac{dP_{(i)}}{d\tau} = P_e\sqrt{2\ln\frac{P_{(i)}}{P_C}}.$$

Следовательно, если в исходном состоянии давление достаточно высокое $p_C > p_e$, то процесс опорожнения будет состоять из двух этапов, причем на первом этапе — от начала опорожнения до момента, когда критическое давление сравняется с внешним давлением ($p_C = p_e$), — процесс описывается системой из двух уравнений (4.4) и (4.5). На втором этапе — от момента времени, когда $p_C = p_e$, до момента, когда давление в емкости опустится до значения внешнего давления p_e ($p_{(i)} = p_e$), — процесс описывается одним уравнением (4.6).

В случае совершенной системы для продолжительности первого и второго этапов истечения можем записать

$$\tau^{(1)} = -\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}P_e), \qquad \tau^{(2)} = \int\limits_{P_e}^{\sqrt{e}P_e}\frac{dP_{(i)}}{P_e\sqrt{2\ln(P_{(i)}/P_e)}}. \tag{4.7}$$

Если для исходного состояния выполняется условие $p_C \leqslant p_e$, то процесс опорожнения состоит только из второго этапа. Для времени опорожнения в случае совершенной системы имеем

$$\tau = \int\limits_{P_e}^{1}\frac{dP_{(i)}}{P_e\sqrt{2\ln(P_{(i)}/P_e)}}. \tag{4.8}$$

На рис. 4 представлены зависимости безразмерных давлений внутри емкости (сплошные линии) и на выходном срезе щели (штриховые линии) от безразмерного времени для $p_0 = 0{,}3$ МПа. Линии *1–3* получены для значений $\mathcal{R}_* = 1{,}7$; $1{,}0$; $0{,}51$, которые соответствуют значениям коэффициента Оствальда для воды с углекислым газом при температурах $T = 273$; 288; 323 К. Из полученных аналитических формул (4.7) и (4.8), а также приведенных численных расчетов видно, что при $V = 10^{-3}$ м^3, $S = 10^{-4}$ м^2, $p_0 \sim 0{,}2 - 0{,}5$ МПа характерное время истечения составляет одну-две секунды. Тогда на основании оценок, приведенных в начале статьи, следует, что для реализации описанного решения истечения число примесных частиц должно быть значительно больше, чем $\tilde{n} \gtrsim 10^{14}$ м$^{-3}$, а радиусы газовых включений и объемное газосодержание ($\alpha_g = (4/3)\pi a^3 n$) вблизи исходного состояния должны удовлетворять условиям $a \gg 10^{-6}$ м, $\alpha_g \gg 10^{-4}$. 11

ЛИТЕРАТУРА

1. **Намиот А. Ю.** Растворимость газов в воде. М.: Недра, 1981.
2. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
3. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
4. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 2.

Поступила в редакцию 31/VII 1996 г.,
в окончательном варианте — 26/V 1997 г.