ПМТФ, № 2, 1971

О ПОГЛОЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Е. Н. Пелиновский

(Горький)

Рассмотрено влияние диссипативных процессов на распространение нелинейных волн в диспергирующих средах. Выяснены особенности зависимости затухания волны от параметра нелинейности и типа диссипативного механизма. Получены формулы, описывающие распространение одиночного импульса — солитона — в такой среде.

1. Как известно, волновые процессы в слабонелинейных средах без диссипации в ряде случаев могут быть приближенно описаны уравнением Кортевега — де Вриза

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

Так, (1.1) описывает распространение поверхностных волн на «мелкой» воде [1,2], акустических и магнитогидродинамических волн в плазме [2], электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи и т. д. Стационарные решения (1.1) — кноидальные волны — хорошо изучены (см., например, [3]). Частным классом таких решений являются уединенные волны (солитоны), играющие важную роль в теории нестационарных «распадных» процессов [2].

Влияние диссипативных процессов на нелинейные волны изучено лишь в отдельных случаях. В [4], например, рассмотрено распространение уединенной волны в плазме с учетом затухания Ландау.

В данной работе рассматривается влияние диссипативных процессов различных типов на распространение нелинейных волн в диспергирующих средах в зависимости от параметра нелинейности, характеризующего профиль стационарного решения (1.1).

2. При учете достаточно слабой диссипации уравнение (1.1) приобретает вид

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} + \alpha u - \delta u_{xx} = 0 \tag{2.1}$$

Так, член δu_{xx} для поверхностных волн и волн в плазме ответствен за вязкость среды (δ в этих случаях совпадает с кинематической вязкостью). Член αu связан с трением жидкости относительно грунта или воздуха [5]. Эти же члены описывают соответственно высокочастотные и низкочастотные потери в нелинейных линиях передачи электромагнитных волн. В зависимости от конкретных свойств системы может преобладать тот или иной диссипативный механизм. Для периодического в пространстве решения нетрудно получить из (2.1) ряд интегральных соотношений типа «законов сохранения» [2]. Так, например, интегрируя (2.1) за период Λ, получаем

$$\int_0^\Lambda u(x, t)\, dx = \mathrm{const}\, e^{-\alpha t} \tag{2.2}$$

Таким образом, уменьшение «импульса» в волне связано только с низкочастотными потерями. Аналогично получаются уравнения для энергии $\int u^2dx$ и т. д.

3. Ниже будет получено приближенное решение (2.1) при условии малости диссипативных членов, так что волна локально близка к кноидальной, которую удобно записать в виде [6]

$$u = \frac{12\beta k^2}{\pi} K(\gamma) \frac{\partial}{\partial\theta} Z\left[\frac{K(\gamma)\theta}{\pi}; \gamma\right], \qquad \theta = \omega t - kx \tag{3.1}$$

$$\omega = \frac{4\beta k^3}{\pi^2} K^2(\gamma)\left[2 - \gamma - 3\frac{E(\gamma)}{K(\gamma)}\right]$$

Здесь Z — дзета-функция Якоби с периодом 2π по θ и нулевым средним значением, $E(\gamma)$ и $K(\gamma)$ — полные эллиптические интегралы с модулем $\sqrt{\gamma}$, ω и k — частота и волновое число соответственно. По существу γ является параметром нелинейности волны (при $\gamma \to 0$ волна близка к гармонической, а $\gamma = 1$ соответствует одиночной волне — солитону). Параметр γ определяет также амплитуду волны

$$A = u_+ - u_- = \frac{12\beta k^2}{\pi^2} \gamma K^2(\gamma) \tag{3.2}$$

Для дальнейшего удобно преобразовать уравнение (2.1). Если ввести замену переменных

$$\Phi_x = u, \qquad H = u_x - {}^1\!/_2\delta u\beta^{-1} \tag{3.3}$$

то легко записать (2.1) в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \Phi_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \Phi_x} = \frac{\partial R}{\partial \Phi_x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial H_x} - \frac{\partial L}{\partial H} = \frac{\partial R}{\partial H_x} \tag{3.4}$$

где L — лагранжиан (плотность функции Лагранжа)

$$L = {}^1\!/_2\Phi_x\Phi_t + {}^1\!/_6\Phi_x^3 + \beta H_x\Phi_x + {}^1\!/_2\beta H^2 - {}^1\!/_8\delta^2\beta^{-1}\Phi_x^2 \tag{3.5}$$

а R — плотность функции Рэлея

$$R = {}^1\!/_2\alpha\Phi_x^2 - {}^1\!/_2\delta H_x\Phi_x \tag{3.6}$$

Из-за наличия диссипации энергии в системе решение (3.1) строго несправедливо, но при малых значениях α и δ волна локально близка к кноидальной, огибающие которой являются медленными функциями времени и координат. Уравнения для меняющихся величин — амплитуды $A(x, t)$, частоты $\omega(x, t) = \theta_t$ и волнового числа $k(x, t) = -\theta_x$ — получим при помощи обобщенного вариационного принципа в усредненной форме. Согласно этому методу нужно усреднить плотности функций Лагранжа и Рэлея за период квазистационарного решения (3.1) и написать соответствующие уравнения Лагранжа второго рода для обобщенных «координат» A и θ. (Для консервативных систем впервые такой подход был предложен в [7]). Уравнения для огибающих имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial\omega} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial k} = \frac{\partial\langle R\rangle}{\partial k}, \qquad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

Последнее соотношение (3.7) вытекает из определения ω и k через θ. Здесь

$$\langle L\rangle = -{}^1\!/_2\omega k\langle\Phi_\theta^2\rangle + \beta k^2\langle\Phi_\theta H_\theta\rangle + {}^1\!/_2\beta\langle H^2\rangle - {}^1\!/_8\beta^{-1}\delta^2k^2\langle\Phi_\theta^2\rangle \tag{3.8}$$

$$\langle R\rangle = {}^1\!/_2\alpha k^2\langle\Phi_\theta^2\rangle - {}^1\!/_2\delta k^2\langle\Phi_\theta H_\theta\rangle \tag{3.9}$$

Уравнения (3.7) необходимо дополнить граничными или начальными условиями. Для определенности рассмотрим начальную задачу, т. е. найдем изменения параметров решения, которое при $t = 0$ имеет вид (3.1) с некоторыми заданными начальными [1] значениями A_0, k_0, ω_0, γ_0. Очевидно, что при $t > 0$ пространственный период не изменится ($k \equiv k_0$). Остальные параметры будут функциями только времени. При этих условиях (3.7) сводится к

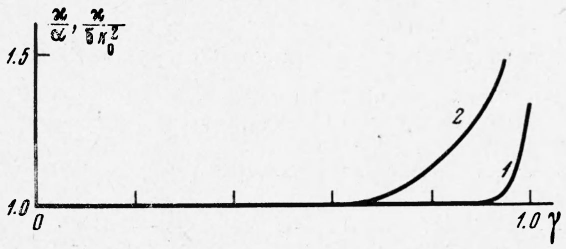
$$\frac{dY_1(\gamma)}{dt} = -2\alpha Y_1(\gamma) - 2\delta k_0^2 Y_2(\gamma) \tag{3.10}$$

где

$$Y_1(\gamma) = K^2 \langle Z_\theta^2 \rangle = \frac{K^4}{\pi^2}\left[\frac{4-2\gamma}{3}\frac{E}{K} - \frac{1-\gamma}{3} - \frac{E^2}{K^2}\right] \tag{3.11}$$

$$Y_2(\gamma) = K^2 \langle Z_{\theta\theta}^2 \rangle = \frac{4K^6}{15\pi^4}\left[2(\gamma^2 - \gamma + 1)\frac{E}{K} - (1-\gamma)(2-\gamma)\right].$$

Определяя γ из (3.10), тем самым найдем все характеристики волны: ее амплитуду и частоту. Между тем знание γ представляет собой и независимый интерес, так как этим параметром определяется эффективная ширина спектра волны (степень ее несинусоидальности).



Диссипацию энергии удобно характеризовать коэффициентом поглощения

$$\varkappa = -\frac{d}{dt}\ln\frac{A(t)}{A_0} \tag{3.12}$$

Пользуясь (3.2), (3.10), для величины $\varkappa$ получаем

$$\varkappa = 2(\alpha Y_1 + \delta k_0^2 Y_2)\frac{d\ln(\gamma K^2)/d\gamma}{dY_1/d\gamma} \tag{3.13}$$

Графики зависимостей $\varkappa/\alpha$ (при $\delta = 0$) и $\varkappa/\delta k_0^2$ (при $\alpha = 0$) от γ приведены на фигуре. Отметим, что коэффициент поглощения $\varkappa$ сильно изменяется только вблизи $\gamma = 1$. Это связано с тем, что существенное отличие эллиптических функций от тригонометрических сказывается только вблизи $\gamma \approx 1$ (см., например, [3]) и, таким образом, в большом диапазоне изменения величины $\varkappa$ можно пользоваться квазилинейным приближением.

В случае малых и больших γ нетрудно получить для $\varkappa$, а также для $\gamma(t)$ и $A(t)$ простые асимптотические выражения.

Если $\gamma \ll 1$ (при этом волна близка к синусоидальной), то

$$Y_1 \approx Y_2 \approx {}^1/_{128}\,\pi^2\gamma^2, \qquad K(\gamma) \approx {}^1/_2\,\pi$$
$$\varkappa = \alpha + \delta k_0^2, \quad \gamma(t) = \gamma_0 e^{-\varkappa t}, \quad A(t) = A_0 e^{-\varkappa t} \tag{3.14}$$

Естественно, что последний результат может быть легко получен из (2.1) при пренебрежении в нем нелинейным членом uu_x.

[1] Отметим, что так как уравнение Кортевега—де Вриза описывает волновые процессы в слабонелинейных системах, то решение граничной задачи можно получить из решения начальной, заменив t на z / c, где c — линейная скорость распространения волны [2]. (В (1.1) x — «бегущая» координата $x = z - ct$.)

Если же $1 - \gamma \ll 1$ (при этом волна близка к последовательности слабо связанных между собой солитонов), то

$$Y_1 \approx \frac{2}{3\pi^2} K^3, \quad Y_2 \approx \frac{8}{15\pi^4} K^5, \quad K(\gamma) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-\gamma}$$

и получаем

$$\varkappa = \frac{4}{3}\alpha + \frac{4}{45}\beta^{-1}\delta A, \quad A(t) = \frac{A_0 e^{-4/3\,\alpha t}}{1 + 1/15\,\delta A_0 \alpha^{-1}\beta^{-1}(1 - e^{-4/3\,\alpha t})} \tag{3.15}$$

Очевидно, что при $\delta = 0$ амплитуда солитона уменьшается по экспоненциальному закону, но с большим показателем, чем в линейной теории.

Если $\alpha = 0$, то

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + 4/45\,\delta\beta^{-1}A_0 t} \tag{3.16}$$

Характер затухания качественно изменился по сравнению с линейным случаем. По истечении большого промежутка времени затухание определяется только параметром дисперсии β и «вязкости» δ и не зависит от начальной амплитуды импульса [1]

$$A(t) \approx \frac{45\beta}{4\delta t}, \quad t \to \infty \tag{3.17}$$

Относительно вычисления коэффициента поглощения можно отметить следующее. Для слабонелинейных сред некоторые авторы (см., например, [8]) предлагают находить $\varkappa$ как сумму парциальных (по волновому числу) коэффициентов поглощения. Согласно этому методу коэффициент поглощения солитона был бы равен $\alpha + 0.065\delta\beta^{-1} A$, т. е. примерно на 30% меньше, чем по формуле (3.15), учитывающей нелинейность процесса.

В заключение заметим, что данные теории хорошо согласуются с результатами эксперимента по распространению уединенных радиоволн в нелинейных линиях передачи.

Автор благодарен Л. А. Островскому за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов и А. А. Андронову и А. В. Гапонову за полезные замечания.

Примечание при корректуре. Формулы (3.15), (3.16) получены также в работе Ott E., Sudan R. N. Damping of solitary waves. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 6.

Поступила 25 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long solitary waves. Philos., Mag., 1895, Ser. 5, vol. 39, p. 422.
2. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1968.
3. Wiegel R. L. A presentation of cnoidal wave theory for practical applications. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt 2.
4. Ott E., Sudan R.N. Non-linear theory of ion acoustic waves with Landau damping. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 11.
5. Зоммерфельд А. Механика. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
6. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, вып. 9.
7. Whitham G. B. A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pt 2.
8. Заремба Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.

[1] В плазме с учетом затухания Ландау амплитуда солитона убывает как t^{-2}, причем при $t \to \infty$ затухание также не зависит от начальной амплитуды [4]. Аналогичная ситуация имеет место для ударных волн в среде с вязкостью [8].