В табл. 2 приведены значения времен разрушения t^* и соответствующей деформации p^* при всех рассматриваемых напряжениях. При $g = 1$ указаны значения t^* и p^*, полученные в экспериментах [2, 3]. При $g = 2$ приведены значения t^* и p^*, соответствующие последней точке кривой (9). При $g = 3$ указаны значения t^*, вычисленные с помощью (7), и значения $p^* = A/B$. Из графиков следует, что каждая из двух рассмотренных теоретических моделей достаточно хорошо описывает экспериментальные данные [2, 3].

Поступила 12 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
2. **Соснин О. В., Торшенов Н. Г.** О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 при постоянной температуре.— Проблемы прочности, 1970, № 5.
3. **Соснин О. В., Торшенов Н. Г.** О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 в интервале температур 400—500°С.— Проблемы прочности, 1972, № 7.
4. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение I.— Проблемы прочности, 1973, № 5.

УДК 539.374

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. Сенашов

(*Красноярск*)

1. Состояние трехмерного течения несжимаемой пластической среды может быть описано с помощью следующей системы уравнений [1]:

$$p_{,1} = \frac{\sqrt{2}\, k_s u_{i,jj}}{2A} - \frac{\sqrt{2}\, k_s}{A^3} e_{ij} e_{mn} u_{m,ijn}, \tag{1.1}$$

$$u_{i,i} = 0, \quad A^2 = e_{ij}e_{ij}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \ (i, j, m, n = 1, 2, 3),$$

где x_1, x_2, x_3 — прямоугольная система координат; (u_1, u_2, u_3) — вектор скорости; p — гидростатическое давление; k_s — предел текучести. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, индекс после занятой обозначает дифференцирование по пространственной переменной с этим индексом. В настоящее время известно немного точных решений этой системы [2]. Здесь не рассматриваются осесимметричные решения, им посвящены работы [3—7].

Используем методы работы [8] для отыскания частных решений системы (1.1). Группа непрерывных преобразований, допускаемая системой (1.1), порождается следующими операторами:

$$X_i = \partial/\partial x_i, \ Y_i = \partial/\partial u_i, \ M = x_i\partial/\partial x_i, \ N = u_i\partial/\partial u_i,$$
$$Z_1 = x_2\partial/\partial x_3 - x_3\partial/\partial x_2 + u_2\partial/\partial u_3 - u_3\partial/\partial u_2,$$
$$T_1 = x_2\partial/\partial u_3 - x_3\partial/\partial u_2, \ S = \partial/\partial p.$$

Еще четыре оператора Z_2, Z_3 и T_2, T_3 получаются из Z_1, T_1 круговой перестановкой индексов.

Группа G_{15} является неразрешимой, оператор S порождает центр этой группы. Построим оптимальные системы первого, второго и третьего порядков. Построение их необходимо для отыскания существенно различных в групповом смысле решений. Укажем некоторые инвариантные решения.

2. Инвариантное решение на подгруппе $\langle X_3 + T_1 + \alpha T_2 + \beta T_3 \rangle$ было найдено в [9]. Оно описывает течение призматического стержня из пластического материала, который подвергается одновременно растяжению, кручению и изгибу.

Решение на подгруппе $\langle X_1 + T_1 + \alpha T_2,\ X_2 - T_2 + \beta T_1 \rangle$ исследовано в [10]. Это решение описывает кинематическое поле, соответствующее однородному напряженному состоянию.

Инвариантное относительно подгруппы $\langle T_2 + X_1,\ \alpha X_1 + X_2 - T_2 + \beta Y_1 + \gamma Y_2 \rangle$ решение изучено в [11], оно интересно тем, что зависит от 17 постоянных.

Решение на подгруппе $\langle X_3 + Y_3 \rangle$ рассматривалось в [12]. Оно имеет вид

$$u_1 = ax_1,\ u_2 = bx_2,\ u_3 = -(a + b)x_3 + f(x_1, x_2). \tag{2.1}$$

При этом

$$\begin{gathered}
e_{11} = a,\ e_{13} = f_{,1},\ e_{23} = f_{,2},\\
e_{22} = b,\ e_{12} = 0,\ e_{33} = -(a + b),\\
\sigma_{11} = -p(x_1, x_2) + \lambda a,\ \sigma_{22} = -p(x_1, x_2) + \lambda b,\\
\sigma_{33} = -p(x_1, x_2) - (a + b)\lambda,\ \sigma_{12} = 0,\\
\sigma_{13} = f_{,1}\lambda,\ \sigma_{23} = f_{,2}\lambda,\ \lambda = \sqrt{2}\, k_s (e_{ij}e_{ij})^{-1/2},
\end{gathered}$$

а функция $p(x_1, x_2)$ определяется из уравнений равновесия.

Если $a \neq b$, тогда получаем обобщение на пространственный случай известного решения Прандтля для пластической массы, сжимаемой между двумя плитами.

Если $a = b$, то в [12] получено только одно из возможных решений: $f = \sqrt{1 - 4(x_1 - p)^2 - 4(x_2 - q)^2}$. Найдем в этом случае другие решения. Подставляя (2.1) в (1.1), имеем

$$p = a\lambda + c_1,$$

$$\left(\frac{f_{,1}}{\sqrt{6a^2 + f_{,1}^2 + f_{,2}^2}}\right)_{,1} + \left(\frac{f_{,2}}{\sqrt{6a^2 + f_{,1}^2 + f_{,2}^2}}\right)_{,2} = c_2, \tag{2.2}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Уравнение (2.2) при $c_2 = 0$ переходит в хорошо изученное уравнение минимальных поверхностей. В частности, можно взять f в виде:

1) $f = \sqrt{6}\, a \ln \dfrac{\cos x_2}{\cos x_1}$, 2) $f = \sqrt{6}\, a \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}$, 3) $f = \sqrt{6}\, a \operatorname{Arch} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Соответствующее напряженное состояние определяется из формул (2.2).

3. Ищем решение на подгруппе $\langle X_3 + \varepsilon N \rangle$. Оно имеет вид

$$u_i = u_i^* (x_1, x_2) \exp \varepsilon x_3, \quad p = p(x_1, x_2). \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.1), получим систему S/H на функции u_i^*, p

$$\begin{gathered}
(\lambda u_{1,1}^*)_{,1} + \frac{1}{2}\left[\lambda (u_{1,2}^* + u_{2,1}^*)\right]_{,2} = p_{,1},\\
\frac{1}{2}\left[\lambda (u_{1,2}^* + u_{2,1}^*)\right]_{,1} + (\lambda u_{2,2}^*)_{,2} = p_{,2},\\
\left[\lambda (u_{3,1}^* + \varepsilon u_1^*)\right]_{,1} + \left[\lambda (u_{3,2}^* + \varepsilon u_2^*)\right]_{,2} = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$u_{1,1}^* + u_{2,2}^* + \varepsilon u_3^* = 0, \quad \lambda = \sqrt{2}\, k_s \left[(u_{1,1}^*)^2 + (u_{2,2}^*)^2 + \right.$$
$$\left. + (u_{1,2}^* + u_{2,1}^*)^2 + (u_{3,1}^* + \varepsilon u_1^*)^2 + (u_{3,2}^* + \varepsilon u_2^*)^2 \right]^{-1/2}.$$

Полагая ε бесконечно малым, разлагаем по этому параметру искомые функции в ряды

$$u_i^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_i^{(k)}(x_1, x_2), \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p^{(k)}(x_1, x_2).$$

Если $u_3^{(0)}(x_1, x_2) \equiv 0$, тогда $u_1^{(0)}(x_1, x_2)$, $u_2^{(0)}(x_1, x_2)$, $p^{(0)}(x_1, x_2)$ есть решение плоской задачи идеальной пластичности. В этом случае из (3.2) для i-го приближения имеем

$$(3.3) \qquad \begin{gathered} (\lambda u_{1,1}^{(i)})_{,1} + \frac{1}{2}\left[\lambda\left(u_{1,2}^{(i)} + u_{2,1}^{(i)}\right)\right]_{,2} = p_{,1}^{(i)}, \\ \frac{1}{2}\left[\lambda\left(u_{1,2}^{(i)} + u_{2,1}^{(i)}\right)\right]_{,1} + (\lambda u_{2,2}^{(i)})_{,2} = p_{,2}^{(i)}, \\ u_{1,1}^{(i)} + u_{2,2}^{(i)} + u_3^{(i-1)} = 0, \\ \left[\lambda\left(u_{3,1}^{(i)} + u_1^{(i-1)}\right)\right]_{,1} + \left[\lambda\left(u_{3,2}^{(i)} + u_2^{(i-1)}\right)\right]_{,2} = 0. \end{gathered}$$

Здесь

$$\lambda = \sqrt{2}\, k_s \left[(u_{1,1}^{(0)})^2 + (u_{2,2}^{(0)})^2 + (u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)})^2 \right]^{-1/2}$$

После определения всех $u_i^{(k)}$ из (3.1) имеем

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^{k} u_i^{(l)} x_3^{k-l} \right).$$

Заметим, что поле скоростей первого приближения

$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} x_3$$

описывает напряженно-деформированное состояние бруса, который находится в плоском деформированном пластическом состоянии и подвергается действию бесконечно малого крутящего момента

$$G_z = \varepsilon \int\int \left(\sigma_{32}^{(1)} x_1 + \sigma_{31}^{(1)} x_2\right) dx_1 dx_2.$$

Пусть теперь $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = 0$, а $u_3^{(0)} = \text{const}$, $p^{(0)} = \text{const}$.

В нулевом приближении уравнения (1.1) удовлетворяются тождественно.

В i-м приближении имеем систему уравнений (3.3), но здесь

$$\lambda = \sqrt{2}\, k_s |u_3^{(0)}|^{-1} = \text{const}.$$

Это поле скоростей можно интерпретировать следующим образом. Пусть в полупространство $x_3 \leqslant 0$ вдавливается тонкое лезвие. Его уравнение

$$(3.4) \qquad \varepsilon x_3 = f(x_1, x_2).$$

В этом случае нулевое приближение будет соответствовать вдавливанию лезвия нулевой толщины.

Нормаль к поверхности лезвия запишется в виде

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{j} - \varepsilon\mathbf{k}.$$

Вектор скорости в первом приближении имеет вид

$$\mathbf{V} = \varepsilon u_1^{(1)}\mathbf{i} + \varepsilon u_2^{(1)}\mathbf{j} + \left(u_3^{(0)} + \varepsilon u_3^{(1)}\right)\mathbf{k}.$$

На поверхности лезвия вектор скорости лежит в плоскости, касательной к лезвию, поэтому

$$(3.5)\qquad (\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \varepsilon u_1^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \varepsilon u_2^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \varepsilon\left(u_3^{(0)} + \varepsilon u_3^{(1)}\right).$$

Линеаризуя соотношение (3.5), получаем

$$(3.6)\qquad u_3^{(0)} = u_1^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{при} \quad x_3 = 0.$$

Для определения $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ теперь нужно решить уравнения (3.3) с граничными условиями (3.6). В последующих приближениях граничные условия получаем аналогично и учитываем тот факт, что на поверхности лезвия $u_3^{(i)} = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Заметим, что случай, когда вдавливается плоское лезвие, т. е. x_2 не входит в правую часть (3.4), изучен в [4].

4. Инвариантное решение на подгруппе $\langle X_2 - X_3,\ X_3 + N + \alpha S\rangle$ ищем в виде

$$(4.1)\qquad u_1 = u(x_1)\exp\xi,\ u_2 = v(x_1)\exp\xi,\ u_3 = w(x_1)\exp\xi,$$
$$p = p(x_1) + a\xi,\ \xi = x_2 + x_3,\ \alpha a = 1.$$

С учетом (4.1) система в компонентах девиатора напряжений запишется в виде

$$(4.2)\qquad \frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_1},\quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} = Q,$$
$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2\left(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2\right) = 2k_s^2,$$
$$S_1 + S_2 + S_3 = 0,\ S_1 = \lambda u',\ S_2 = \lambda v,\ S_3 = \lambda w,$$
$$2\tau_{12} = \lambda(u + v'),\ 2\tau_{13} = \lambda(v + w'),$$
$$2\tau_{23} = \lambda(v + w),\ \lambda = \sqrt{2}k_s(e_{ij}e_{ij})^{-1/2}.$$

Штрих означает дифференцирование по x_1. Из (4.2) имеем

$$\tau_{12} = ax_1 + c_1,\ \tau_{13} = Qx_1 + c_2.$$

Если $c_1 = c_2$, то $v' = w'$. Считаем, что $v = w$. Тогда

$$\tau_{23} = 2S_2,\ S_1 = 2S_2,\ S_2 = S_3.$$

з условия текучести имеем

$$S_2 = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}\sqrt{k_s^2 - 2\tau_{12}^2}.$$

Компоненты тензора напряжений запишутся в виде

$$\sigma_1 = c = \text{const},\ \sigma_2 = 3S_2 + c,\ \sigma_3 = 3S_2 + c,$$
$$\tau_{23} = 2S_2,\ \tau_{12} = \tau_{13} = ax_1 + c_1.$$

Это решение можно интерпретировать как трехмерное течение пластического материала между плитами, параллельными плоскости $0x_2x_3$, которые сближаются вдоль оси $0x_1$.

Поле скоростей определяется из решения системы

$$u' + 2v = 0,\quad u'/(u + v') = \frac{\sigma_1}{2\tau_{12}}$$

с граничными условиями

$$u(l) = -V,\ u(-l) = V,\ v(l) = v(-l) = 0,$$

где V — скорость плиты вдоль оси $0x_1$; $2l$ — расстояние между плитами.

Автор выражает благодарность Б. Д. Аннину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 12 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., Мир, 1964.
2. **Ольшак В., Мруз З., Пежина П.** Современное состояние теории пластичности. М., Мир, 1964.
3. **Аннин Б. Д.** Одно точное решение осесимметричной задачи идеальной пластичности.— ПМТФ, 1973, № 2.
4. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М., Наука, 1966.
5. **Липпман Г.** Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации.— Сб. пер. Механика, 1963, № 3.
6. **Шилд Р. Т.** Пластическое течение в сходящемся коническом канале.— Сб. пер. Механика, 1965, № 3.
7. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
8. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
9. **Hill R.** A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, N 1.
10. **Прагер В.** Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии.— Сб. пер. Механика, 1958, № 3.
11. **Задоян М. А.** Об одном частном решении уравнений идеальной пластичности.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 1.
12. **Ивлев Д. Д.** Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11.

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

В. М. Александров, Е. В. Коваленко

(*Москва*)

В данной работе предложен эффективный метод решения плоских контактных задач для неклассических областей [1] при наличии изнашивания. Инерционные силы, возникающие от движения штампа [2, 3], не учитываются.

1. Постановка задачи. Экспериментально установлено [4, 5], что скорость изнашивания — функция касательных усилий и осредненного модуля скорости скольжения, причем для абразивного изнашивания используется, как правило, линейная зависимость

$$w = k_1 V\tau(x,\ t), \tag{1.1}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала. Отсюда следует, что перемещение штампа в направлении, перпендикулярном поверхности области, вслед-