

УДК 533.72+541.182

## ДИФфуЗИОФОРЕЗ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

В. Г. Черняк, С. А. Стариков, С. А. Береснев

Уральский государственный университет, 620083 Екатеринбург

На основе решения газокинетических уравнений вычисляются диффузионная сила и скорость диффузиофореза сферической частицы в бинарной смеси газов. Рассмотрены две схемы диффузиофореза: диффузия при постоянном давлении и диффузия одного компонента смеси через неподвижный другой. Задача решается интегрально-моментным методом при произвольных числах Кнудсена. Предполагается диффузное рассеяние молекул газа на поверхности частицы. Рассмотрены две известные модели бинарной смеси газов: лоренцева и рэлеевская. Анализируются зависимости силы и скорости диффузиофореза от числа Кнудсена и других определяющих параметров. Проведено сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными.

**Введение.** Диффузиофорез проявляется в том, что на частицу, помещенную в неоднородную по концентрации компонентов газовую смесь, действует сила, вызывающая движение этой частицы. Диффузиофорез теоретически исследовался главным образом для свободномолекулярного режима течения прямым расчетом импульса, передаваемого молекулами газа частице [1–4], и для вязкого со скольжением режима путем решения уравнений Стокса с граничным условием диффузионного скольжения [5, 6], а также с привлечением методов термодинамики необратимых процессов [7, 8].

В работе [9], имеющей в основном методологический характер, впервые проведен расчет силы и скорости диффузиофореза при промежуточных числах Кнудсена  $Kn = l/R_0$  ( $l$  — средняя длина свободного пробега молекул,  $R_0$  — радиус частицы).

В [10] использовался метод “гигантских молекул”, в котором аэрозольные частицы трактуются как один из компонентов газовой смеси. Полученное этим методом выражение для скорости диффузиофореза включает ряд параметров, которые рассматриваются как подгоночные и следуют из сопоставления теории с экспериментом. Точность этого полуэмпирического метода априори неизвестна. Для полученных в [10] результатов необходимо теоретическое подтверждение, основанное на решении газокинетического уравнения при произвольных числах Кнудсена. Следует отметить, что до настоящего времени не существует теории диффузиофореза, адекватной эксперименту. Немногочисленные экспериментальные данные [4, 11, 12], которые можно использовать для количественного сравнения с теоретическими результатами, получены в основном для промежуточных чисел Кнудсена.

Цель данной работы состоит в разработке молекулярно-кинетической модели диффузиофореза аэрозолей в бинарной газовой смеси при произвольных  $Kn$ .

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим сферическую частицу радиуса  $R_0$ , взвешенную в однородной по температуре бинарной газовой смеси с фиксированным градиентом концентрации  $|\nabla x_1|_\infty = -|\nabla x_2|_\infty$ , который направлен вдоль оси  $OZ$  коллинеарно гидродинамической (среднемассовой) скорости  $\mathbf{V}_\infty$  набегающего потока (рис. 1). Введем следующие

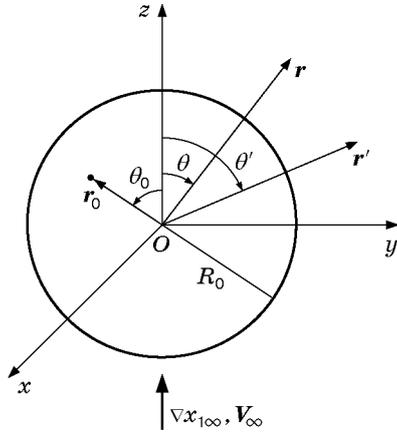


Рис. 1. Геометрия задачи

обозначения:  $x_\alpha = n_\alpha/n$  — концентрация компонента  $\alpha$ ,  $n = n_1 + n_2$  — числовая плотность газовой смеси.

Выражения для парциальных числовых плотностей компонентов вдали от частицы можно записать в виде

$$n_{\alpha\infty} = n_\alpha|_{r \rightarrow \infty} = n_{\alpha 0} \left(1 + |\nabla x_\alpha|_\infty z/x_\alpha\right), \quad n_{\alpha 0} = n_{\alpha\infty}|_{\theta = \pm\pi/2}.$$

Если число Маха мало, то функции распределения молекул по скоростям можно представить в линеаризованном виде

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} \left(1 + |\nabla x_\alpha|_\infty z/x_\alpha + 2c_{\alpha z} V_{\alpha\infty} + \Phi_\alpha\right), \quad (1.1)$$

где  $f_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} (m_\alpha / (2\pi kT))^{3/2} \exp(-c_\alpha^2)$ ;  $c_\alpha = (m_\alpha / (2kT))^{1/2} \mathbf{v}_\alpha$ ;  $V_{\alpha\infty} = (m_\alpha / (2kT))^{1/2} V_\infty \ll 1$  — безразмерная среднемассовая скорость смеси (число Маха с точностью до постоянного множителя);  $\Phi_\alpha$  — неизвестное возмущение функции распределения для молекул сорта  $\alpha$ ;  $\mathbf{v}_\alpha$ ,  $m_\alpha$  — скорость и масса молекул сорта  $\alpha$ ;  $T$  — температура смеси;  $k$  — постоянная Больцмана.

Для нахождения функции  $\Phi_\alpha$  используем линеаризованное уравнение Больцмана (см., например, [13])

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \Phi_\alpha + \frac{v_{\alpha z} |\nabla x_\alpha|_\infty}{x_\alpha} = \sum_\beta L_{\alpha\beta}(\Phi_\alpha). \quad (1.2)$$

Для дальнейших расчетов воспользуемся аппроксимирующим интегралом столкновений второго приближения [14], который имеет вид

$$L_{\alpha\beta}^{(2)}(\Phi_\alpha) = -\gamma_{\alpha\beta} \Phi_\alpha + \gamma_{\alpha\beta} \nu_\alpha + 2c_{\alpha i} [\gamma_{\alpha\beta} u'_{\alpha i} - (u'_{\alpha i} - \sqrt{m_\alpha/m_\beta} u'_{\beta i}) \nu_{\alpha\beta}^{(1)}] + \\ + 2c_{\alpha i} c_{\alpha j} [(\gamma_{\alpha\beta} - \nu_{\alpha\beta}^{(3)}) \pi_{\alpha ij} + \nu_{\alpha\beta}^{(4)} \pi_{\beta ij}]. \quad (1.3)$$

Здесь

$$\nu_\alpha = \frac{n_\alpha - n_{\alpha\infty}}{n_{\alpha 0}} = \pi^{-3/2} \int \exp(-c_\alpha^2) \Phi_\alpha dc_\alpha; \\ u'_{\alpha i} = u_{\alpha i} - V_{\alpha\infty} \delta_{iz} = \pi^{-3/2} \int \exp(-c_\alpha^2) c_{\alpha i} \Phi_\alpha dc_\alpha; \\ \pi_{\alpha ij} = \frac{P_{\alpha ij}}{2p_{\alpha 0}} = \pi^{-3/2} \int \exp(-c_\alpha^2) \left(c_{\alpha i} c_{\alpha j} - \frac{\delta_{ij} c_\alpha^2}{3}\right) \Phi_\alpha dc_\alpha;$$

$\gamma_{\alpha\beta}$  — эффективные частоты столкновений между молекулами сортов  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $\nu_{\alpha}$  — относительное возмущение числовой плотности молекул сорта  $\alpha$  вблизи аэрозольной частицы;  $u'_{\alpha i}$  — безразмерная скорость компонента  $\alpha$  относительно гидродинамической скорости набегающего потока, имеющая смысл безразмерной диффузионной скорости компонента  $\alpha$  вдали от частицы;  $\pi_{\alpha ij}$  — безразмерный бездивергентный тензор напряжений компонента  $\alpha$ ;  $p_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} kT$  — равновесное парциальное давление;  $\delta_{iz}$  — символ Кронекера. Выражения для частот  $\nu_{\alpha\beta}^{(1)}$ ,  $\nu_{\alpha\beta}^{(3)}$ ,  $\nu_{\alpha\beta}^{(4)}$  приведены в [14].

Модельный интеграл столкновений (1.3) в предельном случае малых чисел Кнудсена описывает процессы диффузии и внутреннего трения в газовой смеси в точном соответствии с первым приближением теории Чепмена — Энского [13], что должно обеспечить корректное описание явления диффузиофореза. В выражении (1.3) учтено, что температура газа однородна во всей области вплоть до поверхности частицы, а температуры компонентов смеси одинаковы. Это позволило ограничиться вторым приближением модельного оператора столкновений [14]. Разумеется, однетемпературное приближение справедливо только в рамках линейной теории (см., например, [15]). Вместе с тем, если вдали от частицы температуры компонентов одинаковы, то вблизи нее они могут быть разными при условии различной тепловой поляризации компонентов. Однако тепловая поляризация газа и частицы, обусловленная изотермическим теплопереносом в газе и конечной теплопроводностью частицы, дает пренебрежимо малый вклад (порядка 0,2 %) в перенос импульса [16] и поэтому в данной работе не рассматривается.

На большом расстоянии от частицы ее влияние на состояние газа ослабевает. При  $r \rightarrow \infty$  функция возмущения  $\Phi_{\alpha\infty} = \Phi_{\alpha}|_{r \rightarrow \infty}$  пространственно однородна, т. е.  $\nabla\Phi_{\alpha\infty} = 0$ . Поэтому решение уравнения (1.2) без первого слагаемого в левой части и с интегралом столкновений (1.3) имеет вид

$$\Phi_{\alpha\infty} = 2c_{\alpha z} u'_{\alpha\infty}, \quad u'_{\alpha\infty} = -\frac{1}{2\nu_{\alpha\beta}^{(1)}} \frac{\rho_{\beta}}{\rho} \left(\frac{2kT}{m_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{|\nabla x_{\alpha}|_{\infty}}{x_{\alpha}}, \quad \rho_{\alpha} = n_{\alpha} m_{\alpha}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2.$$

Кроме того, вдали от частицы из уравнений (1.2), (1.3) следует связь диффузионных скоростей

$$\nu_{\alpha\beta}^{(1)} \left[ u'_{\alpha\infty} - \left(\frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}\right)^{1/2} u'_{\beta\infty} \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{|\nabla x_{\alpha}|_{\infty}}{x_{\alpha}}. \quad (1.4)$$

Заметим, что выражение (1.4) совпадает с результатом первого приближения Чепмена — Энского [13].

Введем обозначение  $\Phi_{\alpha} = \Phi_{\alpha\infty} + h_{\alpha}$ , где  $h_{\alpha}$  — возмущение функции распределения молекул сорта  $\alpha$ , обусловленное присутствием частицы. В этом случае парциальные скорости записываются в виде

$$u'_{\alpha i} = u'_{\alpha\infty} \delta_{iz} + w_{\alpha i}, \quad w_{\alpha i} = \pi^{-3/2} \int c_{\alpha i} \exp(-c_{\alpha}^2) h_{\alpha} dc_{\alpha},$$

где  $w_{\alpha i}$  — возмущение безразмерной скорости  $u'_{\alpha i}$  вблизи частицы.

Функции  $h_{\alpha}$  удовлетворяют системе кинетических уравнений

$$\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla h_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 L_{\alpha\beta}^{(2)}(h_{\alpha}), \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.5)$$

Вид  $L_{\alpha\beta}^{(2)}(h_{\alpha})$  следует из выражения (1.3) после замены в нем  $u'_{\alpha i}$  на  $w_{\alpha i}$ .

В качестве граничных условий примем, что молекулы обоих компонентов рассеиваются на поверхности частицы диффузно с максвелловским распределением по скоростям:

$$f_\alpha^+ = f_{\alpha 0}[1 + A_\alpha(\theta_0)], \quad (1.6)$$

где  $A_\alpha$  — параметры отражения, характеризующие числовые плотности рассеянных молекул и зависящие от полярного угла  $\theta_0$  (рис. 1).

Граничные условия для функций возмущения с учетом выражений (1.1) и (1.6) имеют вид

$$h_\alpha^+ = A_\alpha(\theta_0) - (|\nabla x_\alpha|_\infty/x_\alpha)R_0 \cos \theta_0 - 2c_{\alpha z}V_{1\infty} - 2c_{\alpha z}u'_{\alpha\infty}, \quad c_{\alpha r} > 0. \quad (1.7)$$

Краевая задача (1.5)–(1.7) является линейной и включает две независимые обобщенные силы  $|\nabla x_1|_\infty R_0$  и  $V_{1\infty}$ , поэтому можно записать

$$h_\alpha = h_\alpha^D |\nabla x_1|_\infty R_0 + h_\alpha^F V_{1\infty}, \quad A_\alpha = A_\alpha^D |\nabla x_1|_\infty R_0 + A_\alpha^F V_{1\infty}. \quad (1.8)$$

Аналогично представляются макроскопические величины:

$$\begin{aligned} \nu_\alpha &= \nu_\alpha^D |\nabla x_1|_\infty R_0 + \nu_\alpha^F V_{1\infty}, & w_{\alpha i} &= w_{\alpha i}^D |\nabla x_1|_\infty R_0 + w_{\alpha i}^F V_{1\infty}, \\ \pi_{\alpha ij} &= \pi_{\alpha ij}^D |\nabla x_1|_\infty R_0 + \pi_{\alpha ij}^F V_{1\infty}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.8), (1.9) в уравнения (1.5), (1.7) и отбирая члены, пропорциональные  $|\nabla x_1|_\infty R_0$  и  $V_{1\infty}$ , получаем

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla h_\alpha^{D,F} = \sum_\beta L_{\alpha\beta}^{(2)}(h_\alpha^{D,F}); \quad (1.10)$$

$$h_\alpha^{D+} = A_\alpha^D + \frac{(-1)^\alpha}{x_\alpha} \left[ \cos \theta_0 - \frac{c_{\alpha z}}{\nu_{\alpha\beta}^{(1)}} \frac{\rho_\beta}{\rho} \frac{1}{R_0} \left( \frac{2kT}{m_\alpha} \right)^{1/2} \right]; \quad (1.11)$$

$$h_\alpha^{F+} = A_\alpha^F - 2c_{\alpha z}(m_\alpha/m_1)^{1/2}. \quad (1.12)$$

Параметры отражения  $A_\alpha^D$ ,  $A_\alpha^F$  находятся из условий непротекания, которые соответствуют равенству числовых потоков для отраженных и налетающих молекул на поверхности частицы:

$$|N_\alpha^{D,F+}|_{r=R_0} = |N_\alpha^{D,F-}|_{r=R_0}. \quad (1.13)$$

Таким образом, полная задача расщепилась на две: 1) задачу о диффузионной силе, действующей на частицу, покоящуюся относительно центра масс газовой смеси (уравнения (1.10) с индексом  $D$  и (1.11)); 2) задачу о силе сопротивления частицы, обтекаемой однородным потоком газовой смеси (уравнения (1.10) с индексом  $F$  и (1.12)).

Рассмотрим приближение малой концентрации одного компонента смеси  $n_1 \ll n_2$ . Можно показать, что без учета членов первого порядка малости  $O(n_1/n_2)$  задача 2 сводится к задаче о силе сопротивления в однокомпонентном газе (втором компоненте смеси), решение которой известно (см., например, [16]). Таким образом, остается вычислить диффузионную силу.

Следующее упрощение связано с предположением о соотношении масс молекул смеси. Рассмотрим две модели: 1) лоренцеву смесь, когда  $m_1/m_2 \ll 1$ ; 2) рэлеевскую смесь, когда  $m_1/m_2 \gg 1$ .

Эффективные частоты столкновений в интеграле  $L_{\alpha\beta}^{(2)}$  выберем в виде  $\gamma_{12} = \nu_{12}^{(3)}$  и  $\gamma_{22} = \nu_{22}^{(3)} - \nu_{22}^{(4)}$ , что позволяет исключить из выражения (1.3) члены, содержащие тензор напряжений, и тем самым упростить вычисления. Заметим, что выбор эффективных

частот в том или ином виде должен привести к некоторым различиям в результатах для искомых макропараметров при промежуточных числах Кнудсена. Однако из самого способа построения аппроксимирующих интегралов столкновений [14] следует, что эти различия не могут быть велики. В работе [17] это показано при решении задачи об испарении капли. Таким образом, при выборе эффективных частот столкновений могут возникнуть небольшие количественные различия (несколько процентов) в расчетных значениях диффузионной силы.

С учетом изложенного выше уравнения (1.10) преобразуются к виду

$$\mathbf{c}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} h_1 = -h_1 + \nu_1 + 2(1 - \varphi_{12}^{(1)})(c_{1r}w_{1r} + c_{1\theta}w_{1\theta}); \quad (1.14)$$

$$\mathbf{c}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} h_2 = -h_2 + \nu_2 + 2(c_{2r}w_{2r} + c_{2\theta}w_{2\theta}), \quad (1.15)$$

где  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  — безразмерные скорости молекул компонентов 1 и 2;  $\varphi_{12}^{(1)} = \nu_{12}^{(1)}/\gamma_{12}$ ;  $\mathbf{r}_1 = r\gamma_{12}(m_1/(2kT))^{1/2}$ ;  $\mathbf{r}_2 = r\gamma_{22}(m_2/(2kT))^{1/2}$ . Для сокращения записи здесь и далее верхний индекс  $D$  опускается.

Заметим, что уравнения (1.14) и (1.15) различаются для двух моделей газовой смеси значениями частот  $\gamma_{12}, \gamma_{22}$  и  $\nu_{12}^{(1)}$ .

Диффузионная сила определяется суммарным импульсом, переданным частице молекулами газовой смеси при столкновениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D &= \mathbf{n}_z \int dS \sum_{\alpha} \sum_{\pm} \int m_{\alpha} v_{\alpha z} v_{\alpha r} f_{\alpha}^{\pm} \Big|_{r=R_0} d\mathbf{v}_{\alpha} = \\ &= \mathbf{n}_z \int dS \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \int_{v_r > 0} v_{\alpha z} v_{\alpha r} f_{\alpha 0} (1 + A_{\alpha} |\nabla x_1|_{\infty} R_0) d\mathbf{v}_{\alpha} + \int_{v_r < 0} v_{\alpha z} v_{\alpha r} f_{\alpha 0} \left( 1 + 2c_{\alpha z} u'_{\alpha \infty} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{|\nabla x_{\alpha}|_{\infty}}{x_{\alpha}} R_0 \cos \theta_0 + h_{\alpha} |\nabla x_1|_{\infty} R_0 \right) d\mathbf{v}_{\alpha} \right], \quad (1.16) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_z$  — единичный вектор вдоль оси  $OZ$ ;  $S$  — площадь поверхности частицы;  $f_{\alpha}^{-}$  — функция распределения молекул сорта  $\alpha$ , налетающих на поверхность частицы.

Стационарная скорость диффузиофореза  $\mathbf{U}_D$  определяется из условия баланса сил, действующих на частицу:  $\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_F = 0$ , где  $\mathbf{F}_D$  — диффузионная сила;  $\mathbf{F}_F$  — сила вязкостного сопротивления среды.

**2. Метод решения.** Кинетические уравнения (1.14), (1.15) с учетом граничных условий (1.11) интегрировались вдоль характеристик [18] и преобразовывались в систему интегральных уравнений для макропараметров смеси

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha} &= \pi^{-3/2} \int_{\omega_0} X_{23}^{\alpha 0} d\omega + \pi^{-3/2} \int_{V'} \frac{X_{12}^{\alpha}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}'_{\alpha}|^2} d\mathbf{r}'_{\alpha}, \\ w_{\alpha r} &= \pi^{-3/2} \int_{\omega_0} X_{34}^{\alpha 0} \Omega_{0r} d\omega + \pi^{-3/2} \int_{V'} \frac{X_{23}^{\alpha} \Omega_r}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}'_{\alpha}|^2} d\mathbf{r}'_{\alpha}, \\ w_{\alpha \theta} &= \pi^{-3/2} \int_{\omega_0} X_{34}^{\alpha 0} \Omega_{0\theta} d\omega + \pi^{-3/2} \int_{V'} \frac{X_{23}^{\alpha} \Omega_{\theta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}'_{\alpha}|^2} d\mathbf{r}'_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь интегрирование проводится по телесному углу  $\omega_0$ , под которым видна сфера из точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , и по пространству  $V'$ , точки которого соединяются с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  без пересечения при этом сферы. Величины  $X_{kl}^{\alpha 0}$  и  $X_{kl}^{\alpha}$  определяются следующим образом:

$$X_{kl}^{10} = A_1(\theta_0)I_k(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|) - \frac{1}{x_1} \left[ I_k(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|) \cos \theta_0 - \frac{\Omega_{0z}}{\nu_{12}^{(1)} R_0} \left( \frac{2kT}{m_1} \right)^{1/2} I_l(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|) \right],$$

$$X_{kl}^{20} = A_2(\theta_0)I_k(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|) + \left[ I_k(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|) \cos \theta_0 - \frac{\Omega_{0z}}{\nu_{21}^{(1)} R_0} \frac{\rho_1}{\rho} \left( \frac{2kT}{m_2} \right)^{1/2} I_l(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|) \right],$$

$$X_{kl}^1 = \nu_1 I_k(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|) + 2(1 - \varphi_{12}^{(1)})(w_{1r}\Omega_{r'} + w_{1\theta}\Omega_{\theta'})I_l(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|),$$

$$X_{kl}^2 = \nu_2 I_k(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2|) + 2(w_{2r}\Omega_{r'} + w_{2\theta}\Omega_{\theta'})I_l(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2|),$$

где  $I_n(z) = \int_0^\infty c^n \exp(-c^2 - z/c) dc$ ; компоненты направляющего вектора  $\boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  определены в [16].

Система уравнений (2.1) замыкается интегральными условиями непротекания на поверхности частицы для каждого компонента смеси, которые следуют из уравнений (1.13):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S \left( \frac{A_1(\theta_0)}{\pi^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{H_1}{\varphi_{12}^{(1)}} \cos \theta_0 \right) ds = \\ & = \pi^{-3/2} \int_{V_0} d\mathbf{r}_1 \int_{\omega_0} d\omega [\nu_1 I_2(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|) - 2(1 - \varphi_{12}^{(1)})(w_{1r}\Omega_{0r} + w_{1\theta}\Omega_{0\theta})I_3(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|)]; \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S \left( \frac{A_2(\theta_0)}{\pi^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{H_1}{\varphi_{12}^{(1)}} x_1 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \cos \theta_0 \right) ds = \\ & = \pi^{-3/2} \int_{V_0} d\mathbf{r}_2 \int_{\omega_0} d\omega [\nu_2 I_2(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|) - 2(w_{2r}\Omega_{0r} + w_{2\theta}\Omega_{0\theta})I_3(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|)], \quad (2.3) \end{aligned}$$

где  $H_1 = (x_1 R_0 \gamma_{12})^{-1/2} (2kT/m_1)^{1/2}$ ;  $V_0$  — полное пространство вокруг сферы.

Выражения для диффузионной силы, полученные из уравнения (1.16) с учетом (1.14), (1.15) и (1.11) для лоренцевой (индекс  $L$ ) и рэлеевской (индекс  $R$ ) смесей, имеют вид

$$\begin{aligned} F_L = n_{10} kT R_0 |\nabla x_1|_\infty & \left\{ -\frac{8\pi^{1/2}}{3} \frac{H_1}{\varphi_{12}^{(1)}} R_0^2 - \frac{1}{2} \int_S A_1(\theta_0) \cos \theta_0 dS - 2\pi^{-3/2} \frac{2kT}{m_1} \frac{1}{\gamma_{12}^2} \times \right. \\ & \left. \times \int_{V_0} d\mathbf{r}_1 \int_{\omega_0} d\omega \Omega_{0Z} [\nu_1 I_3(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|) - 2(1 - \varphi_{12}^{(1)})(w_{1r}\Omega_{0r} + w_{1\theta}\Omega_{0\theta})I_4(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{01}|)] \right\}; \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_R = n_{20} kT R_0 |\nabla x_1|_\infty & \left\{ \frac{8\pi^{1/2}}{3} x_1 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \frac{H_1}{\varphi_{12}^{(1)}} R_0^2 - \frac{1}{2} \int_S A_2(\theta_0) \cos \theta_0 dS - 2\pi^{-3/2} \frac{2kT}{m_2} \frac{1}{\gamma_{22}^2} \times \right. \\ & \left. \times \int_{V_0} d\mathbf{r}_2 \int_{\omega_0} d\omega \Omega_{0Z} [\nu_2 I_3(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|) - 2(w_{2r}\Omega_{0r} + w_{2\theta}\Omega_{0\theta})I_4(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{02}|)] \right\}; \quad (2.5) \end{aligned}$$

где  $dS = R_0^2 \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0$ ;  $|\mathbf{r}_{01}| = R_0(m_1/(2kT))^{1/2} \gamma_{12}$ ;  $|\mathbf{r}_{02}| = R_0(m_2/(2kT))^{1/2} \gamma_{22}$ .

Как и следовало ожидать, для лоренцевой смеси диффузионная сила определяется макроскопическими параметрами только первого компонента, а для рэлеевской смеси — только второго компонента. Это означает, что для вычисления  $F_L$  достаточно получить решение уравнений (2.1) при  $\alpha = 1$  с использованием уравнения (2.2). Чтобы вычислить диффузионную силу для рэлеевской смеси  $F_R$ , достаточно решить уравнения (2.1) при  $\alpha = 2$  с использованием уравнения (2.3).

Система интегральных уравнений (2.1) решалась методом Бубнова — Галеркина, применимость которого для решения интегральных уравнений фредгольмовского типа второго рода обсуждалась в [19]. Эффективность этого метода заключается в том, что он сходится в среднем, т. е. позволяет с заданной точностью вычислить диффузионную силу, используя при этом только аппроксимации зависимостей плотности и скорости газа от координат.

Если угловая зависимость макроскопических величин задается разложением в ряд по полиномам Лежандра, то в силу ортогональности полиномов из выражения (1.16) следует, что вклад в диффузионную силу дают лишь члены, соответствующие полиномам первой степени. Тогда угловая зависимость в виде  $\nu_\alpha \sim \cos \theta$ ,  $w_{\alpha r} \sim \cos \theta$ ,  $w_{\alpha\theta} \sim \sin \theta$ ,  $A_\alpha \sim \cos \theta_0$ , полученная при расчетах диффузионной силы в свободномолекулярном [20] и гидродинамическом [6] режимах и удовлетворяющая законам сохранения, может быть использована и при промежуточных числах Кнудсена. Остается аппроксимировать зависимость неизвестных макропараметров только от радиальной координаты  $r$ .

Возмущения макропараметров газа, обусловленные присутствием частицы, должны исчезать на большом расстоянии от нее. Этому условию и макроскопическим законам сохранения удовлетворяют системы базовых функций  $\{r^{-2k}\}$  для возмущений парциальных плотностей  $\nu_\alpha$  и  $\{r^{-(2k-1)}\}$  для скоростей  $w_{\alpha r}$  и  $w_{\alpha\theta}$ , где  $k = 1, \dots, N$  ( $N$  — порядок приближения).

Свободные члены уравнений (2.1) уже содержат точные свободномолекулярные значения определяемых макропараметров. Поэтому, задавая пробные функции для  $\nu_\alpha$  и  $w_\alpha$  по виду гидродинамического решения задачи, можно получить достаточно точные результаты для диффузионной силы во всем диапазоне Кн. Можно показать, что гидродинамическому пределу [6] соответствует второе приближение ( $N = 2$ ) метода Бубнова — Галеркина. В этом случае аппроксимирующие функции, удовлетворяющие уравнениям неразрывности и движения, имеют вид

$$\begin{aligned} \nu_\alpha &= C_1^\alpha \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2} \cos \theta, & w_{\alpha r} &= -\frac{R_\alpha}{r_\alpha} \left[ 1 - C_2^\alpha \left( 1 - \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2} \right) \right] \cos \theta, \\ w_{\alpha\theta} &= \frac{1}{2} \frac{R_\alpha}{r_\alpha} \left[ 1 - C_2^\alpha \left( 1 + \frac{R_\alpha^2}{r_\alpha^2} \right) \right] \sin \theta, & A_\alpha &= C_3^\alpha \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $R_\alpha = |\mathbf{r}_{0\alpha}|$ ,  $C_i^\alpha$  — неизвестные постоянные; индекс  $\alpha = 1$  соответствует аппроксимации для лоренцевой смеси,  $\alpha = 2$  — для рэлеевской смеси.

При решении задачи в более высоком приближении ( $N = 3$ ) с целью исследования скорости сходимости метода Бубнова — Галеркина существенно возрастает объем вычислений, поэтому такое исследование не проводилось. Однако опыт решения аналогичных задач (см., например, [16, 17]) показывает, что выбор пробных функций в виде (2.6) обеспечивает точные результаты в кнудсеновском и гидродинамическом пределах и дает погрешность не более 3% при промежуточных Кн.

Подстановка аппроксимаций (2.6) в систему интегральных уравнений (2.1) и требование ортогональности полученных выражений к каждой из базовых функций (2.6) позво-

ляют получить систему алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $C_i^\alpha$  в аппроксимациях (2.6):

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} C_i^\alpha = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Определив величины  $C_i^\alpha$  из решения уравнений (2.7), с учетом выражений (2.4), (2.5) можно вычислить величину диффузионной силы для обеих моделей газовой смеси:

$$F_L = n_{10} kT |\nabla x_1|_\infty R_0 \left\{ -\frac{8\pi^{1/2}}{3} R_0 \left( \frac{2kT}{m_1} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu_{12}^{(1)} x_1} - \frac{2}{3} \pi R_0^2 C_3^1 - \right. \\ \left. - \frac{2kT}{m_1} \frac{1}{\gamma_{12}^2} [C_1^1 \beta_1 + 2(1 - \varphi_{12}^{(1)}) (\beta_2' + C_2^1 \beta_2)] \right\}; \quad (2.8)$$

$$F_R = n_{20} kT |\nabla x_1|_\infty R_0 \left\{ \frac{8\pi^{1/2}}{3} R_0 \left( \frac{2kT}{m_2} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu_{12}^{(1)}} - \frac{2}{3} \pi R_0^2 C_3^2 - \right. \\ \left. - \frac{2kT}{m_2} \frac{1}{\gamma_{22}^2} [C_1^2 \beta_1 + 2(\beta_2' + C_2^2 \beta_2)] \right\}.$$

Выражения для коэффициентов Галеркина  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_i$  и величин  $\beta_i$ ,  $\beta_i'$ , зависящих от числа Кнудсена, имеют громоздкий вид и поэтому здесь не приводятся. Их расчет при произвольных значениях числа Кнудсена представляет наиболее трудоемкую часть решения задачи. Отметим, что вычислительная погрешность при расчетах коэффициентов Галеркина не превышала 0,5%.

**3. Обсуждение результатов.** Выражения для силы и скорости диффузиофореза при больших и малых числах Кнудсена могут быть получены путем асимптотических разложений коэффициентов Галеркина. При  $\text{Kn} \gg 1$  имеем

$$F_L = -\frac{8\pi^{1/2}}{3} \left( 1 + \frac{\pi}{8} \right) R_0^2 n_{20} (2kT)^{1/2} m_1^{1/2} D_{12} |\nabla x_1|_\infty \left( 1 - \frac{0,324}{\text{Kn}_L} \right); \quad (3.1)$$

$$F_R = \frac{8\pi^{1/2}}{3} \left( 1 + \frac{\pi}{8} \right) R_0^2 n_{20} (2kT)^{1/2} m_1 m_2^{-1/2} D_{12} |\nabla x_1|_\infty \left( 1 - \frac{0,324}{\text{Kn}_R} \right), \quad (3.2)$$

где в соответствии с первым приближением Чепмена — Энскага [13] коэффициент взаимной диффузии  $D_{12} = kT / (m_1 \nu_{12}^{(1)})$ . Выражения для определения чисел Кнудсена в случаях лоренцевой ( $\text{Kn}_L$ ) и рэлеевской ( $\text{Kn}_R$ ) смесей имеют вид  $\text{Kn} = \pi^{1/2} / (2R)$ , при этом для твердых сферических молекул

$$R_L = \gamma_{12} \left( \frac{m_1}{2kT} \right)^{1/2} R_0 = \frac{16\pi^{1/2}}{5} n R_0 d_{12}^2, \quad R_R = \gamma_{22} \left( \frac{m_2}{2kT} \right)^{1/2} R_0 = \frac{16}{5} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} n R_0 d_2^2.$$

При диффузии первого компонента через неподвижный второй имеем

$$R_{SD} = \frac{16\pi^{1/2}}{5} \frac{m_2^{1/2} (5/3 + m_2/m_1)}{(m_1 + m_2)^{3/2}} n R_0 d_{12}^2.$$

Отметим, что результаты (3.1), (3.2) являются новыми. При  $\text{Kn} \rightarrow \infty$  они согласуются с данными [1–4] для рэлеевской и лоренцевой смесей.

Используя результаты работы [16] для силы сопротивления при  $\text{Kn} \gg 1$

$$F_F = \frac{16\pi^{1/2}}{3} \left( 1 + \frac{\pi}{8} \right) R_0^2 n_{20} kT \left( \frac{m_2}{2kT} \right)^{1/2} \mathbf{V}_\infty \left( 1 - \frac{0,324}{\text{Kn}_R} \right), \quad (3.3)$$

Расчет приведенных к свободномолекулярным значениям  
силы и скорости диффузиофореза при промежуточных числах Кнудсена

$R = (\pi^{1/2}/2)\text{Kn}^{-1}$	$F_L^*$	$U_L^* (d_1 \approx d_2)$	$F_R^*$	$U_R^*$
10	0,129	1,000	0,127	0,977
9	0,142	1,000	0,139	0,979
8	0,157	1,000	0,154	0,975
7	0,177	1,000	0,174	0,976
6	0,202	1,000	0,199	0,980
5	0,234	0,996	0,236	1,000
4	0,280	1,000	0,281	0,996
3	0,347	1,000	0,344	0,986
2,5	0,394	1,000	0,390	0,985
2	0,455	0,998	0,451	0,989
1,75	0,493	1,000	0,490	0,994
1,5	0,538	1,000	0,534	0,994
1,25	0,589	0,998	0,585	0,997
1,0	0,651	1,000	0,652	1,010
0,8	0,709	1,000	0,705	1,000
0,75	0,724	1,000	0,725	1,010
0,6	0,774	1,001	0,769	0,999
0,5	0,809	1,000	0,804	0,998
0,4	0,845	0,998	0,841	0,995
0,25	0,905	1,000	0,907	1,000
0,2	0,925	1,000	0,923	0,995
0,1	0,963	1,000	0,962	0,992
0,08	0,971	1,000	0,968	0,990
0,075	0,973	1,000	0,970	0,991
0,06	0,978	1,000	0,975	0,990
0,05	0,982	0,999	0,981	0,993

для скорости диффузиофореза  $U_D = -V_\infty$  получаем следующие соотношения:

$$U_L = -\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/2} D_{12} |\nabla x_1|_\infty \left(1 - \frac{0,095}{\text{Kn}_L}\right), \quad U_R = \frac{m_1}{m_2} D_{12} |\nabla x_1|_\infty. \quad (3.4)$$

Отметим, что при  $\text{Kn} \rightarrow \infty$  выражения (3.4) согласуются с результатами [20, 21] при  $x_1 \ll 1$  для случаев  $m_1/m_2 \ll 1$  и  $m_1/m_2 \gg 1$ . Как показал расчет силы и скорости диффузиофореза во всем диапазоне чисел Кнудсена (см. таблицу), выражения (3.1), (3.2) и (3.4) можно использовать для значений  $\text{Kn} \geq 2$ , при этом погрешность не превышает 2–5%.

В режиме со скольжением путем асимптотического разложения коэффициентов Галеркина по малому параметру  $\text{Kn} \ll 1$  также получены выражения для силы и скорости диффузиофореза. В этом случае

$$F_{L,R} = -6\pi\eta R_0 \sigma_{12}^{L,R} D_{12} |\nabla x_1|_\infty, \quad (3.5)$$

где  $\eta$  — вязкость газовой смеси. Коэффициенты диффузионного скольжения  $\sigma_{12}$  для гидродинамической скорости смеси принимают вид

$$\sigma_{12}^L = \gamma_{22}/\gamma_{12}, \quad \sigma_{12}^R = -m_1/m_2, \quad (3.6)$$

причем в случае лоренцевой смеси для молекул, рассматриваемых как твердые сферы, с эффективными диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  имеем  $\gamma_{22}/\gamma_{12} = (m_1/(2m_2))^{1/2} (d_2/d_{12})^2$ ,  $d_{12} = (d_1 + d_2)/2$ .

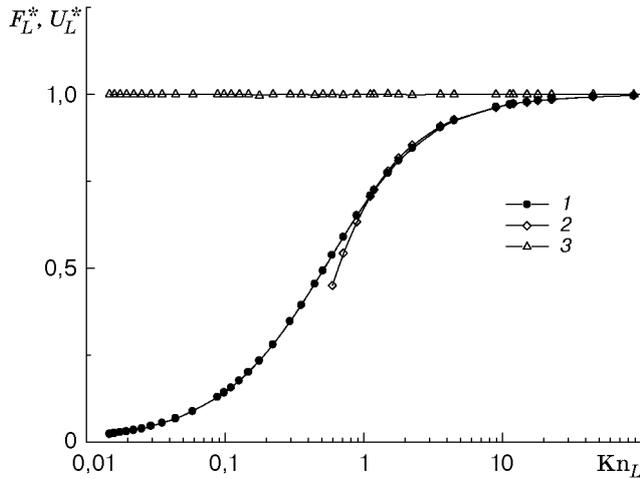


Рис. 2. Зависимость приведенных силы и скорости диффузиофореза от  $\text{Kn}_L$  для лоренцевой смеси:

1 —  $F_L^*$  по уравнению (2.8); 2 —  $F_L^*$  по уравнению (3.1); 3 —  $U_L^*$

Отметим, что выражения (3.6) представляют собой результаты газокINETического анализа и согласуются с выражениями, приведенными в [6], при условии  $x_1 \ll 1$  и выполнении предельных переходов по массам молекул.

Используя для силы сопротивления при  $\text{Kn} \ll 1$  формулу Стокса  $F_F = 6\pi\eta V_\infty R_0$ , получаем соотношения для скорости диффузиофореза

$$U_{L,R} = -\sigma_{12}^{L,R} D_{12} |\nabla x_1|_\infty. \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.1)–(3.7) следует, что сила и скорость диффузиофореза в случае лоренцевой смеси направлены против градиента концентрации, а в случае рэлеевской смеси — вдоль градиента концентрации первого компонента (так как  $\sigma_{12}^R < 0$ ).

При промежуточных числах Кнудсена проводились численные расчеты приведенной к свободномолекулярному значению диффузионной силы

$$F_{L,R}^*(\text{Kn}_{L,R}) = F_{L,R}(\text{Kn}_{L,R}) / F_{L,R}(\text{Kn}_{L,R} \rightarrow \infty),$$

а затем вычислялась приведенная скорость диффузиофореза

$$U_{L,R}^*(\text{Kn}_{L,R}) = F_{L,R}^*(\text{Kn}_{L,R}) / F_F^*(\text{Kn}_{L,R}),$$

где  $F_F^*(\text{Kn}_{L,R})$  — отнесенная к свободномолекулярному значению сила сопротивления [16]. Результаты расчетов приведены в таблице.

На рис. 2 представлена зависимость силы и скорости диффузиофореза от  $\text{Kn}_L$  для лоренцевой смеси. Для рэлеевской смеси результаты идентичны, если  $\text{Kn}_L$  заменить на  $\text{Kn}_R$ . Из расчетов следует, что приведенная скорость диффузиофореза  $U_{L,R}^*$  практически не зависит от  $\text{Kn}$ . Этот вывод качественно согласуется с результатами метода “гигантских молекул” [10]. Слабовыраженный минимум для скорости диффузиофореза при  $\text{Kn} \approx 0,1 \div 1,0$ , отмеченный в [10] для эквимольярных смесей, в пределах погрешности расчетов не обнаружен.

Рассмотрим частный случай диффузии одного компонента смеси через неподвижный другой. Эта схема реализована в экспериментальных исследованиях скорости диффузиофореза [4, 11, 12]. Можно показать, что в случае диффузии одного компонента малой концентрации ( $x_1 \ll 1$ ) через неподвижный другой при любых соотношениях масс молекул вид кинетического уравнения (2.1) для первого компонента не изменится, изменяются только выражения для частот  $\nu_{\alpha\beta}^{(k)}$ , а кинетическое уравнение для второго компонента не дает вклада в диффузионную силу. Таким образом, для данной схемы диффузии можно использовать решение задачи для лоренцевой смеси, но с другими значениями частот  $\nu_{\alpha\beta}^{(k)}$  [14].

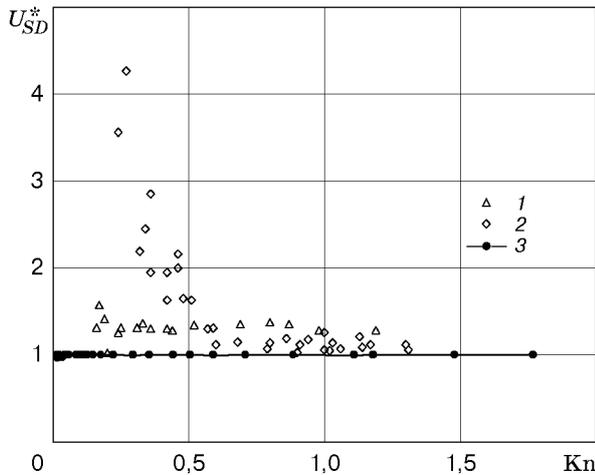


Рис. 3. Зависимость приведенной скорости диффузиофореза  $U_{SD}^*$  от  $Kn$  при диффузии одного компонента через неподвижный другой:

1 — экспериментальные данные [11]; 2 — экспериментальные данные [12]; 3 — численный расчет

В свободномолекулярном пределе получаем

$$F_{SD} = -(8\pi^{1/2}/3)(1 + \pi/8)R_0^2 n(2kT)^{1/2} m_1^{1/2} D_{12} |\nabla x_1|_{\infty}, \quad (3.8)$$

$$U_{SD} = -(m_1/m_2)^{1/2} D_{12} |\nabla x_1|_{\infty},$$

что согласуется с результатом (3.1) при  $Kn \rightarrow \infty$  для лоренцевой смеси в схеме диффузии компонентов при постоянном давлении. Отметим, что соотношения (3.8) следуют из результатов [11] при  $x_1 \ll 1$  и любом соотношении масс молекул.

В режиме со скольжением при  $Kn \ll 1$  имеем  $F_{SD} = -6\pi\eta R_0 \sigma_{12} D_{12} |\nabla x_1|_{\infty}$ ,  $U_{SD} = -\sigma_{12} D_{12} |\nabla x_1|_{\infty}$ , где  $\sigma_{12} = \gamma_{22}/\gamma_{12}$ . Для молекул, рассматриваемых как твердые сферы, при произвольном соотношении между массами молекул получаем

$$\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} = \left(\frac{d_2}{d_{12}}\right)^2 \frac{(m_1 + m_2)^{3/2}}{(2m_1)^{1/2} m_2} \frac{1}{m_2/m_1 + 5/3}.$$

При промежуточных числах Кнудсена результаты численного расчета силы и скорости диффузиофореза согласуются с результатами для модели лоренцевой смеси в схеме диффузии при постоянном давлении, если заменить  $Kn_L$  на  $Kn_{SD}$  (см. таблицу).

Сравнение теоретических и экспериментальных данных представлено на рис. 3. Показаны результаты измерений скорости диффузиофореза капелек силиконового масла М300 при диффузии водяного пара в неподвижный азот ( $m_1/m_2 \approx 0,64$ ) [11] и капелек вазелинового масла при диффузии водяного пара в воздухе ( $m_1/m_2 \approx 0,62$ ) [12]. В этих экспериментах реализовано условие  $x_1 \ll 1$ , принятое в теории. Здесь же представлены результаты численного расчета приведенной скорости диффузиофореза  $U_D^*$ . Число Кнудсена  $Kn = l_2/R_0$  определено по средней длине  $l_2$  свободного пробега молекул неподвижного компонента. Теоретические результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Аномальное возрастание приведенной скорости при  $Kn < 0,5$  в эксперименте [12] может быть объяснено, на наш взгляд, известными особенностями струйной методики, не позволяющей разделить диффузионный и конвективный перенос частиц при малых числах Кнудсена (см., например, [22]). Результаты работы [11], в которой использовалась методика конденсатора Милликена, по-видимому, свободны от этого недостатка [22]. Систематическое превышение на 10–20% экспериментальных данных по сравнению с расчетными во всем исследованном диапазоне чисел Кнудсена может быть связано с неполной аккомодацией импульса молекул на поверхности частицы, что не было учтено в теории.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Дерягин Б. В., Баканов С. П.** Теория движения малых аэрозольных частиц в поле диффузии // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117, № 6. С. 959–962.
2. **Waldmann L.** Über die Kraft eines homogenen Gases auf kleine suspendierte Kugeln // Z. Naturforsch. 1959. Bd 14a, h. 7. S. 589–599.
3. **Bakanov S. P., Derjaguin B. V.** The motion of a small particle in a non-uniform gas mixture // Disc. Faraday Soc. 1960. N 30. P. 140–148.
4. **Schmitt K. H., Waldmann L.** Untersuchungen an Schwebstoffteilchen in diffundierenden Gasen // Z. Naturforsch. 1960. Bd 15a, h. 10. S. 843–851.
5. **Brock J. R.** Forces on aerosols in gas mixtures // J. Colloid Sci. 1963. V. 18, N 6. P. 489–501.
6. **Яламов Ю. И., Обухов Б. А.** К теории диффузиофореза крупных нелетучих аэрозольных частиц // Журн. техн. физики. 1972. Т. 42, № 5. С. 1064–1068.
7. **Яламов Ю. И., Гайдуков М. Н., Голиков А. М.** Два метода построения теории диффузиофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. журн. 1977. Т. 39, № 6. С. 1132–1138.
8. **Bakanov S. P., Roldughin V. I.** Diffusiophoresis in gases // Aerosol Sci. Technol. 1987. V. 7, N 3. P. 249–255.
9. **Brock J. R.** The diffusion force in the transition region of Knudsen number // J. Colloid Interface Sci. 1968. V. 27, N 1. P. 95–100.
10. **Annis B. K., Malinauskas A. P., Mason E. A.** Theory of diffusiophoresis of spherical aerosol particles and drag in a gas mixture // J. Aerosol Sci. 1973. V. 4. P. 271–281.
11. **Schmitt K. H.** Untersuchungen an Schwebstoffteilchen in diffundierenden Wasserdampf // Z. Naturforsch. 1961. Bd 16a, h. 10. S. 144–149.
12. **Сторожилова А. И.** Измерение скорости движения аэрозольных частиц в поле диффузии водяного пара // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155, № 2. С. 426–429.
13. **Ферцигер Дж., Капер Г.** Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
14. **McCormack F. J.** Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases // Phys. Fluids. 1973. V. 16, N 12. P. 2095–2115.
15. **Sirovich L.** Kinetic modeling of gas mixtures // Phys. Fluids. 1962. V. 5, N 8. P. 908–918.
16. **Beresnev S. A., Chernyuk V. G., Fomyagin G. A.** Motion of a spherical particle in a rarefied gas. Pt 2. Drag and thermal polarization // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 405–421.
17. **Маргилевский А. Е., Черняк В. Г.** К кинетической теории испарения аэрозольной частицы // Теплофизика высоких температур. 1989. Т. 27, № 4. С. 751–757.
18. **Марчук Г. И.** Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.
19. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
20. **Береснев С. А., Черняк В. Г., Суетин П. Е.** Термо- и диффузиофорез мелких аэрозольных частиц при фазовых переходах на их поверхности // Коллоид. журн. 1980. Т. 42, № 3. С. 439–444.
21. **Шукин Е. Р., Яламов Ю. И.** Теория термо- и диффузиофореза мелких аэрозольных частиц при произвольном характере взаимодействия // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 3. С. 186–188.
22. **Fuchs N. A.** Thermophoresis of aerosol particles at small Knudsen numbers: theory and experiment // J. Aerosol Sci. 1982. V. 13, N 4. P. 327–330.

*Поступила в редакцию 10/III 2000 г.,  
в окончательном варианте — 11/VII 2000 г.*