ПМТФ, № 2, 1975

УДК 539.374.1

О МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В. В. Колокольчиков, Б. Л. Сидоров

(*Куйбышев*)

В работе развита теория малых упругопластических деформаций диэлектриков в присутствии электрического поля. Получено выражение для электрической части тензора напряжений. Доказаны теоремы о минимуме полной свободной энергии при постоянной температуре, о простом пропорциональном нагружении и о разгрузке. Обсуждаются эксперименты по определению материальных функций.

1. Теория малых упругопластических деформаций, ее основные теоремы и следствия [1] в работе [2] были обобщены на случай моментных малых упругопластических деформаций. Возникает также задача, обсуждаемая ниже, о развитии теории малых упругопластических деформаций диэлектриков в присутствии электрического поля.

Рассмотрим твердое диэлектрическое тело произвольной формы объема V, ограниченное поверхностью S. В недеформирующейся системе координат x_i введем u_i — компоненты вектора перемещений и ε_{ij} — компоненты тензора деформаций. В дальнейшем будем предполагать следующее: на тело действуют массовые силы с объемной плотностью F_i и напряжения T_i на поверхности S. Электрическое поле E создается сторонними зарядами, распределенными с плотностью ρ внутри объема V и свободными зарядами с плотностью ρ_Σ на поверхности проводника Σ. Необходимо решить задачу электростатики, определяемую уравнениями Максвелла и соответствующими граничными условиями, с учетом деформирования диэлектрика, если заданы величины F_i, T_i, ρ, ρ_Σ. Пусть диэлектрическая среда в ненапряженном состоянии изотропна в отношении электрических и механических свойств. Деформация нарушает, вообще говоря, изотропию тела. Ниже будем считать диэлектрик и после деформации изотропным:

$$\varkappa=\varkappa_0+f(\varepsilon_u,\ \theta),$$

где $\varkappa_0$ — диэлектрическая проницаемость среды в недеформированном состоянии, $\theta=\varepsilon_{ii}$, а ε_u — интенсивность деформации:

$$\varepsilon_u=\left[\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}\right]^{1/2}. \tag{1.1}$$

Здесь e_{ij} — девиатор деформаций.

Следуя [3], получим выражение для тензора напряжений, вызванного электрическим полем:

$$\sigma_{ij}^e=-\frac{1}{2}E^2\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_u}\frac{2}{3}\frac{e_{ij}}{\varepsilon_u}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\delta_{ij}\right).$$

Уравнения равновесия с учетом кулоновских сил записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho E_i + F_i = 0,$$

где $\sigma_{ij} = \overset{0}{\sigma}_{ij} + \sigma^e_{ij}$, а $\overset{0}{\sigma}_{ij}$ — механическая часть тензора напряжений, связанная с изменением механической части свободной энергии при вариациях $\delta\varepsilon_{ij}$.

Согласно [3], для полного тензора напряжений T_{ij} имеем

$$T_{ij} = \overset{0}{\sigma}_{ij} + \sigma^e_{ij} + \varkappa_0\left(E_iE_j - \frac{E^2}{2}\delta_{ij}\right).$$

Граничные условия для напряжений на поверхностях с нормалями, имеющими направляющие косинусы n_i, запишем так:

$$T_{ij}n_j = \left(E_{1i}E_{1j} - \frac{E_1^2}{2}\delta_{ij}\right)n_j + T_i \quad x \in S - \Sigma_1; \tag{1.2}$$

$$T_{ij}n_j = T_i \;\; x \in \Sigma_1.$$

Здесь Σ_1 — часть поверхности проводника, совпадающая с частью поверхности S диэлектрика. Представим тензор $\overset{0}{\sigma}_{ij}$ в виде девиатора и шарового тензора:

$$\overset{0}{\sigma}_{ij} = \overset{0}{S}_{ij} + \sigma^0\delta_{ij}; \quad \sigma^0 = \frac{1}{3}\overset{0}{\sigma}_{ii}.$$

Введем обозначения:

$$\sigma_u = \left[\frac{3}{2}\overset{0}{S}_{ij}\overset{0}{S}_{ij}\right]^{1/2} \quad (E_iE_i)^{1/2} = E; \; D = (D_iD_i)^{1/2},$$

где D_i — компоненты вектора индукции. Будем считать, что нагружение является простым или близким к простому [1]. Определение простого нагружения, механического и электрического, дается ниже.

Теория малых упругопластических деформаций диэлектриков при простом активном нагружении описывается следующими тремя законами. Во-первых, величины σ^0 и ε подчиняются закону Гука:

$$\sigma^0 = 3k\varepsilon. \tag{1.3}$$

Во-вторых, девиаторные величины связываются следующим образом:

$$\overset{0}{S}_{ij} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}e_{ij}. \tag{1.4}$$

В-третьих,

$$E_i = \frac{E}{D}D_i. \tag{1.5}$$

Добавим к (1.3) — (1.5) еще три равенства, задающих три универсальные функции, удовлетворяющих принципу соответствия в случае отсутствия поля:

$$k = \varphi_1(D); \quad \sigma_u = \varphi_2(\varepsilon_u, D);$$

$$E = \varphi_3(\theta, \varepsilon_u)D; \quad \varphi_3(\theta, \varepsilon_u) = 1/\varkappa. \tag{1.6}$$

2. Функцию φ_1, входящую в (1.6), можно определить из эксперимента на всестороннее сжатие тонкого полого диэлектрического шара, φ_2 — из опыта на одностороннее сжатие тонкой плитки в однородном поле, φ_3 — из опыта на растяжение и кручение тонкостенной трубы в изменяющемся поле.

Рассмотрим задачу о всестороннем сжатии в камере высокого давления твердой диэлектрической среды, заполняющей пространство между обкладками сферического конденсатора. Давление p равномерно распределено по внутренней и внешней поверхностям полого шара. Расстояние c между обкладками мало: $c \ll R$, где R — средний радиус обкладок. В силу этого напряжения и деформации можно приближенно считать однородными. Согласно (1.2),

$$\sigma_{rr}^{(0)} - \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u}\frac{2}{3}\frac{e_{rr}}{\varepsilon_u} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{D^2}{2\varkappa_0} = -p; \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{0} - \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u}\frac{2}{3}\frac{e_{\varphi\varphi}}{\varepsilon_u} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) - \frac{D^2}{2\varkappa_0} = 0;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0} - \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u}\frac{2}{3}\frac{e_{\theta\theta}}{\varepsilon_u} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) - \frac{D^2}{2\varkappa_0} = 0.$$

Складывая (2.1) и учитывая, что $e_{ii}=0$, получаем:

$$3\sigma^{(0)} = -p + \frac{3}{2}\frac{D^2}{\varkappa_0^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{D^2}{2\varkappa_0};\ \sigma^{(0)} = \varphi_1(D)\,\theta. \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что, зная $\varkappa(\theta, \varepsilon_u)$ и измеряя p, θ, D, $\varkappa$, можно получить $\varphi_1(D)$. Вид зависимости $\varkappa(\theta, \varepsilon_u)$ от θ и ε_u определяется ниже.

Рассмотрим задачу о деформировании диэлектрической плитки, помещенной в плоский конденсатор и заполняющей его. Ось z направим по нормали к обкладкам конденсатора. Допустим, что размеры обкладок (в направлении оси x равны a и в направлении оси y — b) удовлетворяют условию $a \gg b$, но в то же время $a, b \gg d$, где d — толщина плитки. В этом случае плитку приближенно можно считать стержнем. Пусть в направлении оси x действует напряжение T_x и все компоненты тензора деформаций, за исключением $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_1$, равны 0. Для осуществления одностороннего сжатия в направлении оси x необходимо ограничить деформирование вдоль оси y недеформируемыми стенками. Можно проверить, что если положить $\varepsilon_{xx}=\mathrm{const}$, то граничные условия и уравнения равновесия удовлетворяются. Таким образом, плитка деформирована однородно. Тогда

$$e_{xx}=2/3\varepsilon_1,\ e_{yy}=-\varepsilon_1/3;\ e_{zz}=-\varepsilon_1/3;$$

$$e_{xy}=e_{xz}=e_{yz}=0;\ \theta=\varepsilon_1,\ \varepsilon_u=2/3\varepsilon_1.$$

В соответствии с (1.2) на торцах плитки имеем

$$\frac{2}{3}\sigma_u - \frac{1}{3}\frac{D^2}{\varkappa^2}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u} - \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varkappa^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - k\varepsilon_1 = \frac{D^2}{2} + \frac{D^2}{2\varkappa_0} + T_x.$$

Измеряя ε_1, T_x, $\varkappa$, D и зная $\varphi_1(D)$, $\varphi_3(\theta, \varepsilon_u)$, можно получить $\varphi_2(\varepsilon_u, D)$. В опыте на растяжение и кручение тонкостенной диэлектрической трубы имеем

$$\sigma_{xy}^0 = \tau;\quad \sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{xz}^0 = \sigma_{yz}^0 = 0;\ \sigma^0{}_{zz} = \sigma_1; \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{xy}=\gamma;\ \varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=-1/m\varepsilon_{zz},\ \varepsilon_{zz}=e_1. \tag{2.4}$$

В опыте будет получена также кривая $m=m(e_1, \gamma)$. Легко проверить, что (2.3) и (2.4) удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям. Из (1.1), (2.3), (2.4) получим

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{2(m-1)^2}{m^2}e_1^2 + \frac{3}{2}\gamma^2}; \quad \theta = \left(\frac{m-2}{m}\right)e_1.$$

Измеряя емкость и геометрические размеры коаксиала, соответствующего тонкостенной трубе в слабом изменяющемся поле (когда стрикцией можно пренебречь), получаем функцию $\varphi_3(\theta, \varepsilon_u)$ от θ и ε_u, являющуюся коэффициентом в третьем равенстве (1.6).

3. Свободная энергия Ψ представляется интегралом по всему пространству

$$\Psi = \int\left[\int\limits_0^M (\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + E_k\delta D_k)\right]dV, \tag{3.1}$$

где 0 — состояние, характеризующееся отсутствием электрического поля и деформаций; M — состояние при наличии электрического поля и деформаций. Предполагается, что подынтегральное выражение в (3.1) имеет вид полного дифференциала.

Для формулирования теоремы о минимуме свободной энергии определим непрерывные виртуальные перемещения δu_i и индукции $\delta\mathbf{D}$ при помощи равенств

$$\begin{array}{ll} \delta u_i = u_i' - u_i, & x \in V; \\ \delta u_i = 0, & x \in S; \\ dw\,\delta\mathbf{D} = 0, & \oint\limits_\Sigma \delta\mathbf{D}\,d\Sigma = 0. \end{array}$$

При этом предполагается, что

$$F_i = 0, \quad \rho = 0.$$

Теорема о минимуме свободной энергии состоит в следующем: истинное состояние равновесия тела, материал которого обладает упрочнением, отличается от всякого виртуального состояния тем, что полная свободная энергия при постоянной температуре для истинного состояния минимальна. При доказательстве теоремы использовалось условие

$$\sigma_u \geqslant \frac{1}{2}E^2\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_u}$$

и условие упрочнения

$$\frac{\partial S_u}{\partial\varepsilon_u} > 0; \quad \frac{\partial S_u}{\partial\varepsilon_u}\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}} > \left(\frac{\partial S_u}{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}}\right)^2; I = \frac{D(S_u, \sigma, E)}{D(\varepsilon_u, \varepsilon_{\alpha\alpha}, D)} > 0.$$

Можно доказать теорему о простом пропорциональном нагружении диэлектрика в электрическом поле для материалов, определяемых равенствами:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0; \quad k = \infty; \quad S_u = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_u}; \quad E = \frac{\partial\Phi}{\partial D}; \tag{3.2}$$

$$\Phi = A\varepsilon_u^{\gamma+1} + D^2B(\varepsilon_u); \; A, \; \gamma = \text{const}.$$

Нагружение назовем простым, если направляющие тензоры механических напряжений [1] и единичные векторы напряженности поля постоянны во времени. Назовем процессом пропорционального сопротивления нагружению процесс, при котором напряжения, деформации, индукция изменяются пропорционально своим параметрам, зависящим от времени. Пропорциональным нагружением назовем изменение массовых сил, поверхностных сил и электрического поля, пропорциональное параметрам, зависящим от времени.

Показано, что простое пропорциональное нагружение материала (3.2) в присутствии электрического поля является процессом непропорционального сопротивления нагружению.

Можно получить, что задача об упругой разгрузке диэлектрика в приращениях соответствующих величин не будет иметь вид упругой задачи диэлектрика, что объясняется нелинейной по полям формой электрических слагаемых в уравнениях равновесия и граничных условиях. Если задачу о разгрузке решать методом последовательных приближений, то на каждом этапе необходимо решать отдельно задачу электростатики, уравнения разгрузки при известном деформированном состоянии, найденном из предыдущего приближения, и механическую задачу при известных полях и индукциях. При известных полях и индукциях задача об упругой разгрузке в приращениях механических величин будет иметь вид упругой задачи при условии, что на тело действуют приращения электрических сил.

Поэтому так же, как и в отсутствие электрического поля имеет место следующая теорема о разгрузке, справедливая на каждом этапе последовательных приближений. Перемещения в некоторый момент стадии разгрузки отличаются от их значений в момент начала разгрузки на величины упругих перемещений, которые возникали бы в теле, если бы в естественном состоянии к нему были приложены внешние массовые силы, найденные в предыдущем приближении, равные разностям сил, действующих на тело в указанные моменты. То же относится и к деформациям, индукции и напряжениям. В качестве следствия теоремы об упругой разгрузке получается теорема об остаточных напряжениях, деформациях, перемещениях при полном снятии внешних нагрузок и поля.

Поступила 20 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. I. М., ГИТТМ, 1948.
2. **Колокольчиков В. В.** Моментная теория малых упругопластических деформаций.— «Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех», 1970, № 1.
3. **Стреттон Д. А.** Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.