

УДК 533+517.9

ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ И НЕЯВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

А. М. Барлукова, А. П. Чупахин

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: ayuna.barlukova@gmail.com

Исследуется небарохронное регулярное частично инвариантное решение (подмодель) ранга один и дефекта два уравнений газовой динамики, описывающее неустановившиеся пространственные движения газа. Уравнения газовой динамики редуцируются к неявному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для вспомогательной функции и к интегрируемой системе. Приведена полная классификация неправильных особых точек ключевого уравнения в зависимости от параметра, характеризующего поток газа, а также найдены преобразования неправильных особых точек при изменении параметра. Исследованы качественные свойства решения и в терминах движения газа дана их физическая интерпретация. Показано, что существует два режима движения, один из которых является сверхзвуковым, а во втором возможен непрерывный переход через скорость звука.

Ключевые слова: частично инвариантное решение, неявные уравнения, неправильные особые точки, дозвуковой и сверхзвуковой режимы движения газа, преобразования неправильных особых точек.

Введение. Частично инвариантные решения порождают широкие классы точных решений дифференциальных уравнений [1–3]. В моделях механики сплошной среды частично инвариантные решения описывают многомерные движения, представляющие большой интерес как при проведении теоретических исследований, так и при решении конкретных газодинамических задач [4]. Особенностью регулярных частично инвариантных решений уравнений газовой динамики является возможность их представления в виде объединения интегрируемой неинвариантной подсистемы и инвариантного неявного дифференциального уравнения [5]. В настоящее время исследование таких уравнений получило значительное развитие [6–9], что обусловлено их геометрической трактовкой, которая дает представление о структуре множества ветвлений решений, а также разнообразными приложениями таких уравнений в механике и физике. В настоящей работе исследуется решение, приводимое к инвариантному неявному уравнению, в котором при различных значениях физических параметров происходят перестройка многообразия ветвления интегральных кривых и смена типа неправильных особых точек (НОТ). Решение описывает многомерное неустановившееся движение газа, в котором источники и стоки расположены на движущихся поверхностях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00026), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ 6706.2012.1), а также в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 44 и Программы Отделения энергетики, машиностроения и процессов управления РАН № 2.13.4.

1. Описание решения. Рассматривается частично инвариантное решение уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния, задаваемое подалгеброй $L_{5,18}$ из оптимальной системы подалгебр алгебры симметрии L_{11} [1, 2]:

$$\begin{aligned} H_1 &= \partial_y, & H_2 &= \partial_z, & H_3 &= t \partial_y + \partial_v, & H_4 &= t \partial_z + \partial_w, \\ H_5 &= \beta(t \partial_x + \partial_u + \partial_t) + y \partial_z - z \partial_y + v \partial_w - w \partial_v. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Алгебра (1.1) имеет универсальный инвариант $\lambda = x - t^2/2$, $u - t$, p , ρ , S и порождает частично инвариантное регулярное решение [3] ранга один и дефекта два [4, 5]. Функции v , w являются неинвариантными, решение имеет представление

$$u = t + U(\lambda), \quad v = v(t, x, y, z), \quad w = w(t, x, y, z), \quad (\rho, S, p)|\lambda. \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в уравнения газовой динамики и проводя замену $x \rightarrow \lambda$, получаем фактор-систему

$$UU' + 1 + \rho^{-1}p' = 0; \quad (1.3)$$

$$v_t + Uv_\lambda + vv_y + wv_z = 0; \quad (1.4)$$

$$w_t + Uw_\lambda + vw_y + ww_z = 0; \quad (1.5)$$

$$U\rho' + \rho(U' + v_y + w_z) = 0; \quad (1.6)$$

$$US' = 0, \quad (1.7)$$

где штрих означает производную инвариантных функций по λ .

Из равенства (1.7) следует, что при $U \neq 0$ энтропия постоянна: $S = S_0$. Введем лагранжеву координату

$$\xi = t - \int \frac{d\lambda}{U(\lambda)}.$$

Тогда система (1.4)–(1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} v_t + vv_y + wv_z &= 0, & w_t + vw_y + ww_z &= 0, \\ v_y + w_z &= h(\lambda), & v_y w_z - v_z w_y &= k(\lambda), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $h(\lambda) = -[U(\ln \rho)' + U']$ — след; k — определитель матрицы Якоби $J = \partial(v, w)/\partial(y, z)$. Система (1.8) переопределена и состоит из четырех уравнений для двух искомым функций v и w . В работе [5] система (1.8) приведена в инволюцию и проинтегрирована.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения формулы. После введения новой переменной $X = X(\lambda)$, выпрямляющей производную:

$$U(\lambda) \frac{d}{d\lambda} = \frac{d}{dX}, \quad \frac{dX}{d\lambda} = \frac{1}{U(\lambda)}, \quad U(\lambda) = \frac{d\lambda}{dX} = \frac{1}{dX_\lambda},$$

условия совместности системы (1.8) приводятся к системе уравнений

$$h_X + h^2 = 2k, \quad k_X + hk = 0,$$

проинтегрировав которую получаем

$$h = \frac{Q_X}{Q}, \quad k = \frac{Q_{XX}}{2Q}, \quad Q = 1 + h_0 X + k_0 X^2, \quad h_0 = \text{const}, \quad k_0 = \text{const}. \quad (1.9)$$

Функции плотности ρ и инвариантной компоненты скорости U в (1.3)–(1.7) задаются формулами

$$\rho = \frac{\rho_0}{\lambda_X Q}, \quad U = \lambda_X. \quad (1.10)$$

Заметим, что в этом случае лагранжева переменная равна $\xi = t - X$. Функция $\lambda = \lambda(X)$ служит своеобразным потенциалом решения, поскольку через нее и ее производные определяются все искомые функции [5], и является решением уравнения (1.3), которое после подстановки в него выражений (1.10) и представления $p = S\rho^\gamma$ принимает вид

$$Q^{\gamma-1}(\lambda_X^{\gamma+1} - 2(b_0 - y)\lambda_X^{\gamma-1}) + \varkappa_0 = 0. \quad (1.11)$$

В (1.11) многочлен Q задается формулой (1.9); b_0 — постоянная, соответствующая энергии газа; \varkappa_0 — параметр, характеризующий поток газа:

$$\varkappa_0 = \frac{2\gamma S_0 \rho_0^{\gamma-1}}{\gamma - 1}.$$

Уравнение (1.11) относится к классу неявных дифференциальных уравнений [6–8], или, менее точно, уравнений, не разрешенных относительно производной. В последнее время уравнения такого типа вызывают большой интерес как математиков, так и механиков. При классификации возможных особенностей неявных уравнений были выявлены их интересные геометрические свойства. Неявные уравнения используются в теории управления, газовой динамике, теории плазмы.

Уравнения данного вида возникают при отыскании частично инвариантных регулярных решений уравнений газовой динамики и, как правило, представляют собой интеграл энергии, записанный в виде неявного уравнения для вспомогательной функции (обобщенного потенциала), задающей решение. Исследование решения таких уравнений основано на существовании неправильных особых точек и их классификации. В данной работе проведено исследование решения уравнения (1.11) и показано, каким образом при изменении параметров задачи (преобразования особых точек) меняется тип НОТ.

2. Инвариантное решение системы подмодели П(5.18). Найдем инвариантное решение системы (1.3)–(1.7), где все функции зависят лишь от λ . Полагаем, что в этом случае $v = v_0 = \text{const}$, $w = w_0 = \text{const}$. Тогда $h = 0$, следовательно,

$$h = \frac{Q_X}{Q} = \frac{h_0 + 2k_0 X}{Q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_0 = 0, \quad k_0 = 0.$$

Значит, в качестве полинома можно выбрать $Q = 1$. Далее получаем

$$U\rho' + \rho U' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\rho U)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{q_0}{U}, \quad q_0 = \text{const}; \quad (2.1)$$

$$UU' + 1 + \varkappa_0(\rho^{\gamma-1})' = 0. \quad (2.2)$$

Подставляя в (2.2) выражение для ρ , полученное из (2.1):

$$UU' + 1 + \varkappa_0 q_0^{\gamma-1} \left(\frac{1}{U^{\gamma-1}} \right)' = 0, \quad (2.3)$$

и интегрируя уравнение (2.3), имеем

$$\frac{1}{2}U^2 + \lambda + \varkappa_0 q_0^{\gamma-1} \frac{1}{U^{\gamma-1}} = b_0.$$

Рассмотрим полученное выражение для случая $\gamma = 3$:

$$U^4 - 2(b_0 - \lambda)U^2 + \varkappa_0 = 0.$$

Решаем биквадратное уравнение относительно U :

$$U^2 = b_0 - \lambda \pm \sqrt{(b_0 - \lambda)^2 - \varkappa_0}. \quad (2.4)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае решение определяется явными формулами (2.1), (2.4).

3. Неправильные особые точки неявных дифференциальных уравнений.

Приведем некоторые сведения из теории неявных дифференциальных уравнений [6–8].
Уравнение

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx} \quad (3.1)$$

задает в пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, p)$ поверхность уравнения Σ , которая состоит из нескольких компонент и проецируется на плоскость Oxy . Кривая K в $\mathbb{R}^3(x, y, p)$, на которой $F_p = 0$, т. е. уравнение (3.1) не разрешается относительно производной p , называется криминантой, а ее проекция на плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ — дискриминантной кривой D . Кривая K представляет собой множество ветвлений интегральных кривых уравнения (3.1), которые расположены на различных листах поверхности Σ . Неединственность решения, т. е. пересечение интегральных кривых, имеет место при проецировании различных листов Σ на плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$. На кривой K могут быть расположены НОТ уравнения (3.1), которые определяются из системы уравнений

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_x + pF_y = 0. \quad (3.2)$$

Для классификации этих точек целесообразно с уравнением (3.1) связать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, введя новую независимую переменную τ :

$$\frac{dx}{d\tau} = F_p, \quad \frac{dy}{d\tau} = pF_p, \quad \frac{dp}{d\tau} = -(F_x + pF_y), \quad (3.3)$$

где $x = x(\tau)$; $y = y(\tau)$; $p = p(\tau)$. Такая форма записи, предложенная Ж. А. Пуанкаре, делает переменные x, y, p равноправными. Тогда неправильные особые точки — это невырожденные особые точки системы (3.3). Их классификация аналогична традиционной, за исключением того, что к названию особой точки добавляется термин “сложенный”: сложенный узел, сложенный фокус и т. д. Особенностью НОТ является то, что при прохождении через них интегральная кривая уравнения (3.1) перемещается с одного листа на другой. Используем полученные результаты для анализа уравнения (1.11).

4. Анализ особых точек уравнения (1.11). В работе [10] показано, что для качественного анализа решений неявных уравнений, возникающих при исследовании частично инвариантных решений, можно выбрать простейшее значение $\gamma = 3$. Тогда уравнение (1.11) является биквадратным, что делает анализ более наглядным, но не ограничивает общности рассмотрения. Не ограничивая общности анализа, зададим $b_0 = 2$. Тогда уравнение (1.11) принимает вид

$$F \equiv p^4 - 2(2 - \lambda)p^2 + \frac{\lambda_0}{Q^2} = 0, \quad p = \lambda X, \quad Q = 1 + h_0 X + k_0 X^2. \quad (4.1)$$

В зависимости от вида, к которому приводится многочлен Q , выделяются три канонических случая:

- 1) эллиптический: $h_0 = 0, k_0 = 1: Q = 1 + X^2$;
- 2) гиперболический: $h_0 = 0, k_0 = -1: Q = 1 - X^2$;
- 3) параболический: $h_0 = -2, k_0 = 1: Q = (1 - X)^2$.

Поверхность $\Sigma = \bigcup_{\alpha=1}^N \Sigma_\alpha$ состоит из N компонент: двух для эллиптического случая,

четырех для параболического и шести для гиперболического случая (рис. 1). Имеет место симметрия относительно плоскости $p = 0$.

Обозначим интегральные кривые уравнения (4.1), расположенные на разных листах различных компонент поверхности Σ , через $C_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, где $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$. В эллиптическом случае $\varepsilon_1 = +1$ для “верхней” компоненты Σ_1 ($p > 0$) поверхности Σ и $\varepsilon_1 = -1$ для

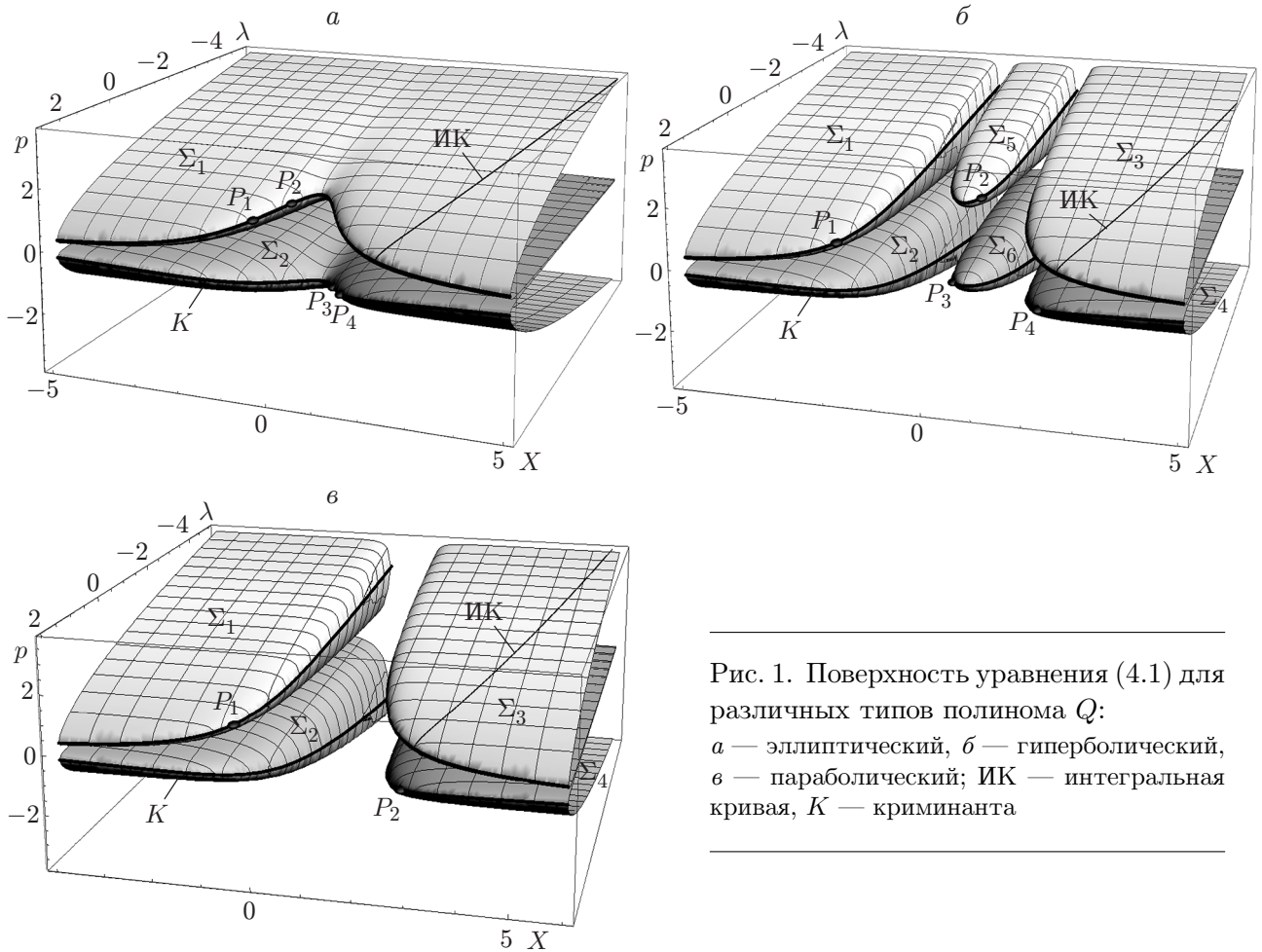


Рис. 1. Поверхность уравнения (4.1) для различных типов полинома Q :
a — эллиптический, *б* — гиперболический,
в — параболический; ИК — интегральная
 кривая, K — кривизанта

“нижней” компоненты Σ_2 ($p < 0$). Интегральная кривая $C_{1\varepsilon_1}$ при $\varepsilon_2 = +1$ проходит по верхнему листу компоненты Σ_1 , при $\varepsilon_2 = -1$ — по нижнему листу.

В параболическом случае для определенности рассмотрим компоненты поверхности Σ , лежащие левее плоскости $X = 1$, сохранив для интегральных кривых обозначения, введенные выше.

В гиперболическом случае сохраним обозначения $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ для интегральных кривых, однако необходимо учитывать, что они могут иметь разные области определения по X в зависимости от того, лежат они на центральной “вставке” поверхности Σ или на неограниченной компоненте поверхности Σ_1 (см. рис. 1, *б*).

На плоскости $\mathbb{R}^2(X, \lambda)$ через каждую точку области существования Ω решения уравнения (4.1) проходит ровно четыре его интегральных кривых. Действительно, представим уравнение (4.1) в виде

$$p = \varepsilon_1 \sqrt{[(2 - \lambda)Q + \varepsilon_2 \sqrt{(2 - \lambda)^2 Q^2 - \varkappa_0}] / Q}. \tag{4.2}$$

Процедура выбора $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ в (4.2) описана выше. Вещественные решения уравнения (4.1) существуют только в области Ω : $\lambda \leq 2$, причем в каждой точке Ω уравнение (4.1) имеет ровно четыре решения относительно p .

Криминанта K уравнения (4.1) задается уравнениями

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{\varkappa_0/|Q|}, \quad p = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\varkappa_0/|Q|}}, \quad \lambda \leq 2,$$

ее проекция на плоскость (X, λ) определяет дискриминантную кривую Γ уравнением для произвольного b_0 :

$$(b_0 - \lambda)^2 Q^2 = \varkappa_0, \quad \lambda \leq b_0. \quad (4.3)$$

Неправильные особые точки уравнения (4.1) являются корнями уравнения

$$|Q|^3 = \pm \sqrt{\varkappa_0} (Q')^2. \quad (4.4)$$

Анализируя число корней уравнения (4.4), получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *В зависимости от типа многочлена Q и значения параметра \varkappa_0 уравнение (4.4) имеет различное число вещественных корней:*

- 1) для эллиптического случая — четыре корня при $\varkappa_0 > \varkappa_*$, два корня при $\varkappa_0 = \varkappa_*$;
- 2) для гиперболического случая — четыре корня при любом значении $\varkappa_0 > 0$;
- 3) для параболического случая — два корня при любом значении $\varkappa_0 > 0$.

Здесь \varkappa_* — фиксированное значение \varkappa_0 , зависящее от выбора термодинамических параметров и b_0 (при $\gamma = 3$, $b_0 = 2$ $\varkappa_* = (27/16)^2$).

Доказательство леммы 1 основано на непосредственном анализе знака дискриминанта кубического уравнения, к которому сводится уравнение (4.4), и оценке числа его положительных корней с использованием теорем Декарта и Виета.

Для невырожденных особых точек имеет место

Лемма 2. *В зависимости от типа полинома Q уравнение (4.1) может иметь только следующие неправильные особые точки:*

- 1) в эллиптическом случае — точки типа фокуса, седла или узла;
- 2) в гиперболическом и параболическом случаях — точки типа фокуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для неявного уравнения $F(X, \lambda, p) = 0$ отыскание и классификация особых точек сводятся к отысканию и классификации особых точек системы (3.3). Неправильные особые точки находятся из системы (3.2).

Матрица линеаризованной системы (3.2) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4p & 4[(3p^2 - (2 - \lambda))] \\ 0 & 4p^2 & 8p[2p^2 - (2 - \lambda)] \\ 2\varkappa_0(Q'/Q^3)' & 0 & -6p^2 \end{pmatrix},$$

где штрих обозначает производную по переменной X . Инварианты системы (3.2) k_1 , k_2 , k_3 равны

$$\begin{aligned} k_1 &= \text{tr } A = -2p^2, & k_2 &= -24p^4 - 8\varkappa_0(Q'/Q^3)'[3p^2 - (2 - \lambda)], \\ k_3 &= \det A = 32\varkappa_0 p^2 (Q'/Q^3)'(p^2 - (2 - \lambda)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как на дискриминантной кривой $p^2 = 2 - \lambda$, то $\det A = 0$. Согласно (4.5) характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\mu^3 + 2p^2 \mu^2 - 8[3p^4 + \varkappa_0(Q'/Q^3)'(3p^2 - (2 - \lambda))]\mu = 0,$$

один из его корней равен нулю, уравнение для $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$:

$$\mu^2 + 2p^2 \mu - 8[3p^4 + \varkappa_0(Q'/Q^3)'(3p^2 - (2 - \lambda))] = 0. \quad (4.6)$$

Дискриминант квадратного уравнения (4.6) равен

$$D = 100p^4 + 32\varkappa_0(Q'/Q^3)'(3p^2 - (2 - \lambda)).$$

Следовательно, на кривинанте $2 - \lambda = p^2$ имеем

$$D = 100p^4 + 64\kappa_0 p^2 (Q'/Q^3)' = 4p^2 (25p^2 + 16\kappa_0 (Q'/Q^3)'). \quad (4.7)$$

Для ключевого уравнения (4.1) в НОТ выполняется соотношение

$$p^3 = \kappa_0 Q'/Q^3. \quad (4.8)$$

Согласно (4.8) дискриминант (4.7) уравнения (4.1) принимает вид

$$D = 4p^2 (25(\kappa_0 Q'/Q^3)^{2/3} + 16\kappa_0 (Q'/Q^3)') = 4p^2 \kappa_0^{2/3} (25(Q'/Q^3)^{2/3} + 16\kappa_0^{1/3} (Q'/Q^3)').$$

Из невырожденности особых точек следует, что $D \neq 0$. Для определения дискриминанта имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} D &= \operatorname{sgn} \left[25 \left(\frac{Q'}{Q^3} \right)^{2/3} + 16\kappa_0^{1/3} \frac{Q^3 Q'' - 3Q^2 (Q')^2}{Q^6} \right] = \\ &= \operatorname{sgn} \left[25 \frac{(Q')^{2/3}}{Q^2} + 16\kappa_0^{1/3} \frac{QQ'' - 3(Q')^2}{Q^4} \right] = \operatorname{sgn} \left[\frac{25Q^2 (Q')^{2/3} + 16\kappa_0^{1/3} (QQ'' - 3(Q')^2)}{Q^4} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, в НОТ получаем

$$\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} [25Q^2 (Q')^{2/3} + 16\kappa_0^{1/3} (QQ'' - 3(Q')^2)]. \quad (4.9)$$

Выражение в квадратных скобках (4.9) обозначим через $d(X, \kappa_0)$.

Согласно теореме Виета для корней квадратного уравнения (4.6) запишем

$$\mu_1 + \mu_2 = -2p^2 < 0; \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &= -8 \{ 3p^4 + \kappa_0 (Q'/Q^3)' [3p^2 - (2 - \lambda)] \} \Big|_{\Gamma} = \\ &= -8(3p^4 + \kappa_0 (Q'/Q^3)' 2p^2) = -16p^2 [3p^2/2 + \kappa_0 (Q'/Q^3)']. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Из уравнения (4.10) следует, что для $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ либо $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$, либо $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$. Если $\mu_1 \in \mathbb{C}$, $\mu_2 \in \mathbb{C}$, то их реальные части не могут быть равны нулю. Значит, НОТ не могут быть центрами.

Следовательно, возможны лишь следующие ситуации:

- 1) при $D > 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, причем $\mu_1 + \mu_2 < 0$, НОТ является седлом;
- 2) при $D > 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$ НОТ — узел;
- 3) при $D < 0$, $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha \neq 0$ НОТ — фокус.

Проанализируем данные ситуации применительно к каждому из трех типов полинома Q . Рассмотрим уравнение (4.11). Пусть $r = [3p^2/2 + \kappa_0 (Q'/Q^3)']$. Из (4.8) найдем параметр p . Подставив его в r , получаем

$$r(X, \kappa_0) = \frac{3}{2} \kappa_0^{2/3} \frac{(Q')^{2/3}}{Q^2} + \kappa_0 \frac{QQ'' - 3(Q')^2}{Q^4} = \frac{\kappa_0^{2/3}}{2Q^4} (3(Q')^{2/3} Q^2 + 2\kappa_0^{1/3} (QQ'' - 3(Q')^2)).$$

Тогда $\operatorname{sgn} r = \operatorname{sgn} (3(Q')^{2/3} Q^2 + 2\kappa_0^{1/3} (QQ'' - 3(Q')^2))$.

Пусть $l(X, \kappa_0) = 3(Q')^{2/3} Q^2 + 2\kappa_0^{1/3} (QQ'' - 3(Q')^2)$, тогда $\operatorname{sgn} r = \operatorname{sgn} l(X, \kappa_0)$.

Для канонических полиномов Q запишем выражения для функций $l(X, \kappa_0)$, $d(X, \kappa_0)$.

1. При $Q = 1 + X^2$ имеем

$$\begin{aligned} l(X, \kappa_0) &= 3 \cdot 4^{1/3} X^{2/3} (1 + X^2)^2 + 4\kappa_0^{1/3} (1 - 5X^2), \\ d(X, \kappa_0) &= 25 \cdot 2^{2/3} X^{2/3} (1 + X^2)^2 - 32(5X^2 - 1)\kappa_0^{1/3}. \end{aligned}$$

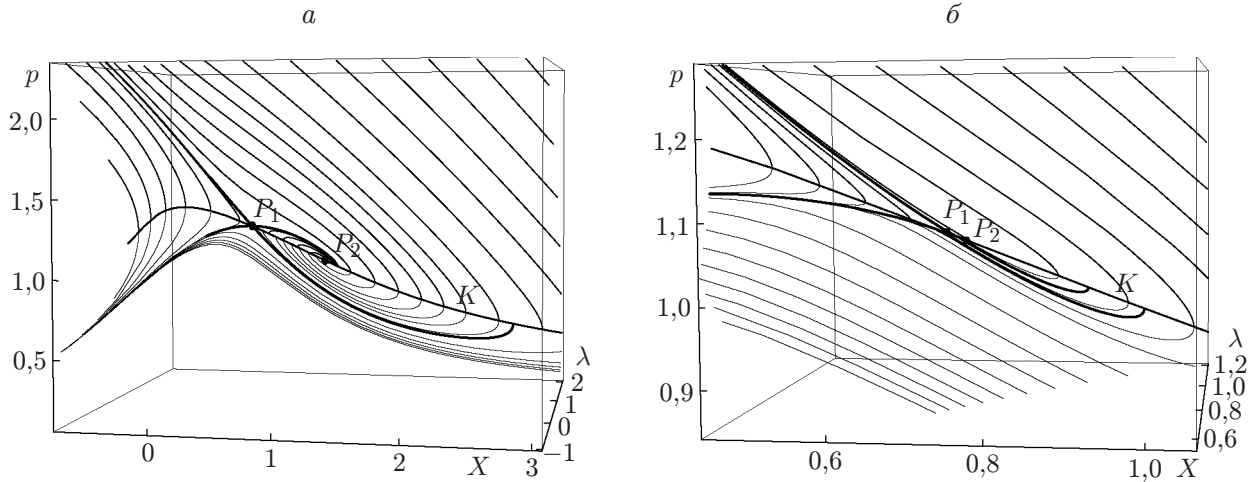


Рис. 2. Неправильные особые точки P_1, P_2 — седло и фокус (а) и седло и узел (б) на компоненте поверхности Σ_1 в эллиптическом случае

Из формул (4.10), (4.11) следует, что при $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) > 0$ НОТ является узлом; при $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) < 0$ — седлом; при $d(X, \varkappa_0) < 0$ НОТ является фокусом.

В эллиптическом случае системы неравенств $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) > 0$ и $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) < 0$ имеют решения, следовательно, НОТ могут быть узлами, седлами или фокусами (рис. 2). Таким образом, доказан п. 1 леммы 2.

2. При $Q = 1 - X^2$ имеем

$$l(X, \varkappa_0) = 3 \cdot 4^{1/3} X^{2/3} (1 - X^2)^2 - 4\varkappa_0^{1/3} (1 + 5X^2),$$

$$d(X, \varkappa_0) = 25 \cdot 2^{2/3} (-X)^{2/3} (X^2 - 1)^2 - 32(5X^2 + 1)\varkappa_0^{1/3}.$$

В гиперболическом случае ни одна из систем неравенств $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) > 0$ и $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) < 0$ не имеет решения, следовательно, НОТ не могут быть седлами или узлами. Вместе с тем неравенство $d(X, \varkappa_0) < 0$ может иметь решения, значит, НОТ являются фокусами (рис. 3).

3. При $Q = (1 - X)^2$ имеем

$$l(X, \varkappa_0) = (3 \cdot 4^{1/3} (1 - X)^{8/3} - 20\varkappa_0^{1/3}) (1 - X)^2,$$

$$d(X, \varkappa_0) = 25 \cdot 2^{2/3} (X - 1)^{14/3} - 160\varkappa_0^{1/3} (X - 1)^2.$$

В параболическом случае системы неравенств $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) > 0$ и $d(X, \varkappa_0) > 0, l(X, \varkappa_0) < 0$ не имеют решения. Как и в предыдущем случае, НОТ могут быть только фокусами при $d(X, \varkappa_0) < 0$ (рис. 4). Лемма доказана.

5. Исследование типа неправильных особых точек в эллиптическом случае.

Из леммы 2 следует, что в эллиптическом случае, в отличие от остальных, тип особой точки, зависящий от параметра \varkappa_0 , может меняться. Выясним, каким образом меняется тип НОТ при изменении параметра \varkappa_0 .

В рассматриваемом случае система (3.2) для отыскания НОТ имеет вид

$$p^4 - 2(2 - \lambda)p^2 + \varkappa_0/(1 + X^2)^2 = 0,$$

$$4p^3 - 4(2 - \lambda)p = 0, \quad 4\varkappa_0 X/(1 + X^2)^3 - 2p^3 = 0. \quad (5.1)$$

Из (5.1) получаем зависимость между координатой X НОТ и значением параметра \varkappa_0 :

$$\varkappa_0 = (X^4 + 3X^2 + 3 + 1/X^2)^2/16. \quad (5.2)$$

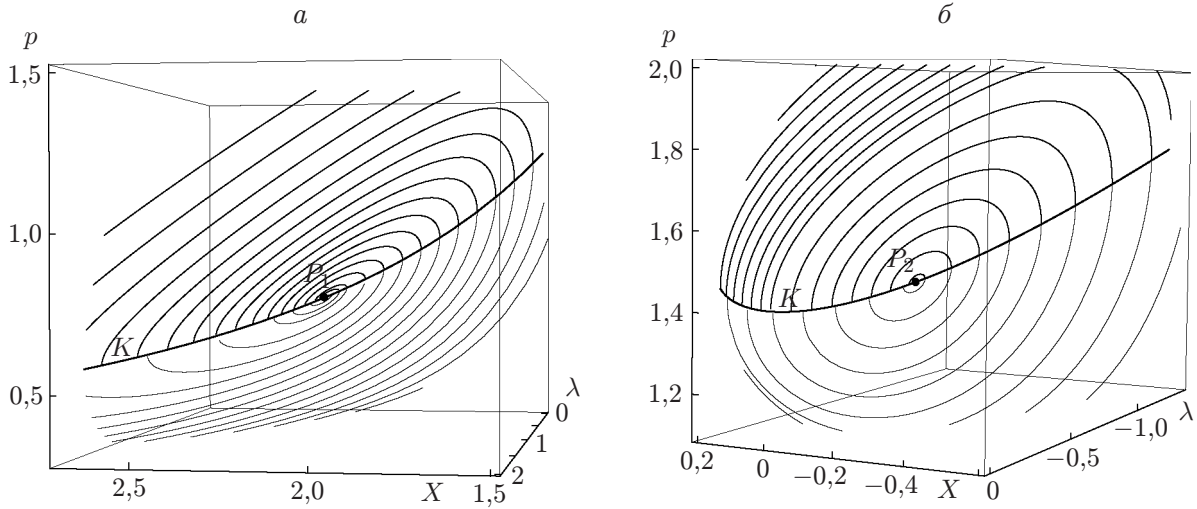


Рис. 3. Неправильные особые точки P_1, P_2 — фокусы на компонентах поверхности Σ_1 (а) и Σ_5 (б) в гиперболическом случае

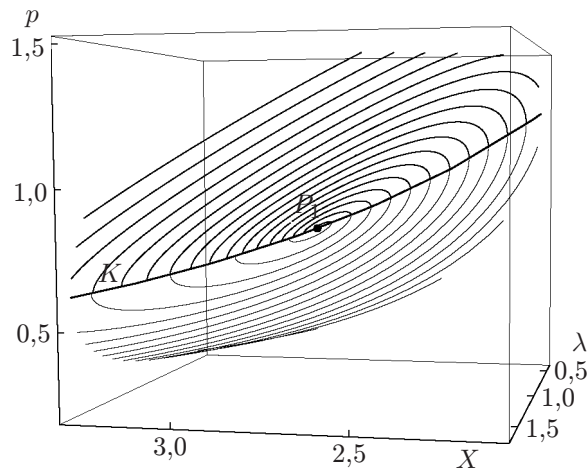


Рис. 4. Неправильная особая точка P_1 — фокус на компоненте поверхности Σ_1 в параболическом случае

Пусть k — кривая, заданная уравнением (5.2) на плоскости $\mathbb{R}^2(X, \varkappa_0)$. При доказательстве леммы 2 установлено, что в эллиптическом случае:

— НОТ является узлом при

$$D(X, \varkappa_0) > 0, \quad l(X, \varkappa_0) < 0; \tag{5.3}$$

— НОТ является седлом при

$$D(X, \varkappa_0) > 0, \quad l(X, \varkappa_0) > 0; \tag{5.4}$$

— НОТ является фокусом при

$$D(X, \varkappa_0) < 0.$$

Подставляя в (5.3) значения D и l , получаем, что решением данной системы неравенств являются следующие значения X и \varkappa_0 :

$$\varkappa_1(X) = \frac{27X^2(1+X^2)^6}{16(5X^2-1)^3} < \varkappa_0 < \frac{15625X^2(1+X^2)^6}{8192(5X^2-1)^3} = \varkappa_2(X), \quad X > \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{5.5}$$

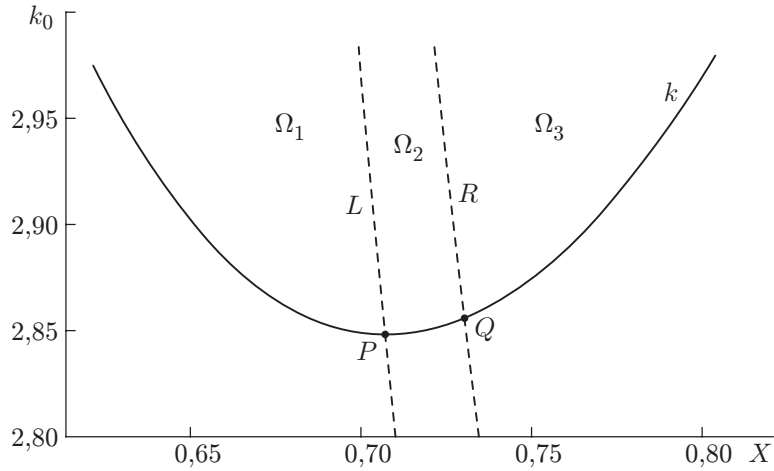


Рис. 5. Типы неправильных особых точек:

Ω_1 – Ω_3 — области существования НОТ различного типа (Ω_1 — седла, Ω_2 — узлы, Ω_3 — фокусы)

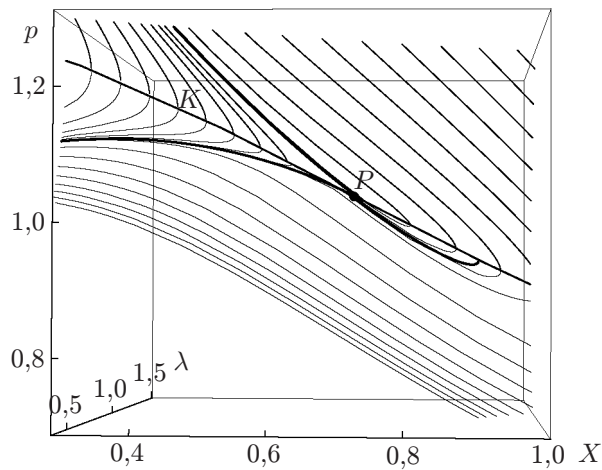


Рис. 6. Неправильная особая точка P — седлоузел, получаемый при фиксированном значении параметра \varkappa_0

Геометрическая интерпретация системы неравенств (5.5) на плоскости $\mathbb{R}^2(X, \varkappa_0)$ имеет следующий вид. Обозначим через L и R кривые $\varkappa_0 = \varkappa_i(X)$, где $i = 1, 2$, \varkappa_i определены в (5.5). В областях, лежащих слева от кривой R (Ω_1 и Ω_2 на рис. 5), дискриминант уравнения (4.6) $D > 0$, а в области справа от кривой R (Ω_3 на рис. 5) $D < 0$. Следовательно, НОТ, у которых $(X, \varkappa_0) \subset \Omega_3$, являются фокусами. Согласно (5.3), (5.4) в области Ω_1 $l > 0$, в области Ω_2 $l < 0$. Следовательно, точки в области Ω_1 являются седлами, а в области Ω_2 — узлами. Обозначим через $P = (X_p, \varkappa_{0p})$ и $Q = (X_q, \varkappa_{0q})$ точки пересечения кривых L и R с кривой k . Таким образом, при изменении параметра \varkappa_0 , определенного в п. 1, происходит изменение типа НОТ из узла в фокус. Точке P — минимальному значению функции (5.2) — соответствует НОТ, являющаяся седлоузлом, точке Q — вырожденная особая точка. Интегральные кривые для этого случая показаны на рис. 6.

6. Свойства движения. Исследуем характер движения газа в направлении инвариантной координаты X . Согласно (1.9), (1.10) скорость звука определяется формулой

$$c^2 = \gamma p / \rho = \gamma S_0 \rho_0^{\gamma-1} = \gamma S_0 \rho_0^{\gamma-1} [\lambda_X (1 + h_0 X + k_0 X^2)]^{-(\gamma-1)} = c_0^2 [\lambda_X (1 + h_0 X + k_0 X^2)]^{-(\gamma-1)}.$$

Тогда квадрат числа Маха равен

$$N = M^2 = \frac{U^2}{c^2} = \frac{\lambda_X^2}{c_0^2} [\lambda_X(1 + h_0X + k_0X^2)]^{\gamma-1} = \frac{1}{c_0^2} \lambda_X^{\gamma+1} (1 + h_0X + k_0X^2)^{\gamma-1}.$$

При $\gamma = 3$ имеем

$$N = \lambda_X^4 (1 + h_0X + k_0X^2)^2 / c_0^2. \quad (6.1)$$

Согласно (4.2) получаем

$$\lambda_X^2 = b_0 - \lambda \pm \sqrt{(b_0 - \lambda)^2 - \frac{\varkappa_0}{Q^2}} = \frac{(b_0 - \lambda)Q \pm \sqrt{(b_0 - \lambda)^2 Q^2 - \varkappa_0}}{Q}. \quad (6.2)$$

Подставляя выражение для λ_X^2 из (6.2) в (6.1), находим

$$\begin{aligned} N &= \frac{\lambda_X^4 Q^2}{c_0^2} = \frac{Q^2}{c_0^2} \left(2(b_0 - \lambda)\lambda_X^2 - \frac{\varkappa_0}{Q^2} \right) = \frac{1}{c_0^2} (2(b_0 - \lambda)Q^2 \lambda_X^2 - \varkappa_0) = \\ &= \frac{1}{c_0^2} \left(2(b_0 - \lambda)Q^2 \frac{(b_0 - \lambda)Q + \varepsilon\sqrt{R}}{Q} - \varkappa_0 \right) = \\ &= \frac{1}{c_0^2} (2(b_0 - \lambda)^2 Q^2 + 2(b_0 - \lambda)Q\varepsilon\sqrt{R} - \varkappa_0), \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Сформулируем и докажем утверждение о представлении инвариантных звуковых характеристик на данном решении.

Лемма 3. *Точки дискриминантной кривой (4.3) являются образами на плоскости (X, λ) инвариантных звуковых характеристик. При переходе через звуковую характеристику режим движения газа меняется со сверхзвукового на дозвуковой в направлении координаты X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Звуковая характеристика $\xi(t, \mathbf{x}) = 0$ в физическом пространстве $\mathbb{R}^4(t, \mathbf{x})$ задается уравнением [2]

$$\xi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \varepsilon c |\nabla \xi|, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Инвариантная звуковая характеристика на рассматриваемом решении определяется уравнением $\xi(t, \mathbf{x}) = \lambda - \lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = \text{const}$ в виде

$$\chi \equiv x - t^2/2 - \lambda_0 = 0. \quad (6.4)$$

Тогда из уравнений звуковых характеристик (6.4), (1.2) получаем уравнение инвариантной звуковой характеристики на данном решении в пространстве инвариантов:

$$U(\lambda) = \varepsilon c(\lambda), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Используя ключевое уравнение (1.11) при $\gamma = 3$ и уравнение дискриминантной кривой (4.3), находим

$$\frac{c_0^2}{Q^2(b_0 - \lambda)^2} = 1. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) является уравнением звуковой характеристики на плоскости (X, λ) и совпадает с уравнением (4.3) дискриминантной кривой. Лемма доказана.

Лемма 4. *Интегральные кривые C_{++} , C_{-+} соответствуют сверхзвуковым режимам течения газа, и для них выполняется неравенство*

$$U^2 > c^2. \quad (6.6)$$

Интегральные кривые C_{+-} , C_{--} соответствуют режимам течения газа, при которых возможен переход через скорость звука, и для них выполняется неравенство

$$U^2 < c^2. \quad (6.7)$$

Доказательство. С учетом (6.3) неравенство (6.6) эквивалентно неравенству

$$\frac{2(b_0 - \lambda)^2 Q^2 + 2\varepsilon(b_0 - \lambda)Q\sqrt{R} - \varkappa_0}{c_0^2} > 1. \quad (6.8)$$

При $\gamma = 3$ константа $c_0^2 = \varkappa_0$, следовательно, после ряда преобразований выражение (6.8) принимает вид

$$(b_0 - \lambda)^2 Q^2 + \varepsilon(b_0 - \lambda)Q\sqrt{R} > \varkappa_0. \quad (6.9)$$

Неравенство (6.9), содержащее квадратный корень $\sqrt{(b_0 - \lambda)^2 Q^2 - \varkappa_0}$, определено при условии

$$(b_0 - \lambda)^2 Q^2 > \varkappa_0. \quad (6.10)$$

Используя (6.10), преобразуем левую часть неравенства (6.9):

$$\begin{aligned} (b_0 - \lambda)^2 Q^2 + \varepsilon(b_0 - \lambda)Q\sqrt{(b_0 - \lambda)^2 Q^2 - \varkappa_0} &\geq \\ &\geq \varkappa_0 + \varepsilon(b_0 - \lambda)Q(b_0 - \lambda)Q\sqrt{1 - \frac{\varkappa_0}{(b_0 - \lambda)^2 Q^2}} \geq \\ &\geq \varkappa_0 + \varepsilon\varkappa_0\sqrt{1 - \frac{\varkappa_0}{(b_0 - \lambda)^2 Q^2}} = \varkappa_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\varkappa_0}{(b_0 - \lambda)^2 Q^2}}\right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Тогда согласно (6.11) неравенство (6.9) принимает вид

$$\varkappa_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\varkappa_0}{(b_0 - \lambda)^2 Q^2}}\right) > \varkappa_0. \quad (6.12)$$

Следовательно, неравенство (6.12) выполняется при $\varepsilon = 1$, что является условием выполнения неравенства (6.6). Заметим, что значение $\varepsilon = 1$ соответствует листам поверхности C_{++} и C_{-+} (см. п. 4). Аналогично анализируется неравенство (6.7). Это неравенство выполняется при $\varepsilon = -1$, следовательно, такой режим реализуется на листах C_{+-} и C_{--} поверхности Σ ключевого уравнения. Лемма доказана.

7. Описание режимов движения газа. С использованием решения ключевого уравнения (4.1) строятся инвариантные функции ρ , U . Дадим физическую трактовку полученного решения для эллиптического случая. На рис. 7 приведены сепаратрисы h_i , l_i ($i = 1, 2$), а также зависимости скорости U и плотности ρ в описываемом решении от переменной X . Каждой интегральной кривой соответствует режим движения газа, описываемый данными функциями. Исследуем этот режим движения, анализируя поведение кривых $\rho = \rho(X)$ и $U = U(X)$. Штриховыми и сплошными линиями на рис. 7 показаны кривые, которые характеризуют скорости частиц, описываемые интегральными кривыми уравнения (4.1), лежащими на нижнем и верхнем листах поверхности уравнения соответственно. Эти кривые соответствуют различным режимам движения газа с нестационарными источниками и стоками. Частицам, движущимся по верхнему листу поверхности уравнения, на рис. 7 соответствуют кривые скорости, расположенные выше кривинанты (см. рис. 7,а), и кривые плотности, расположенные ниже кривинанты (см. рис. 7,б). Наоборот, частицам, движущимся по нижнему листу поверхности уравнения, на рис. 7,а соответствуют кривые

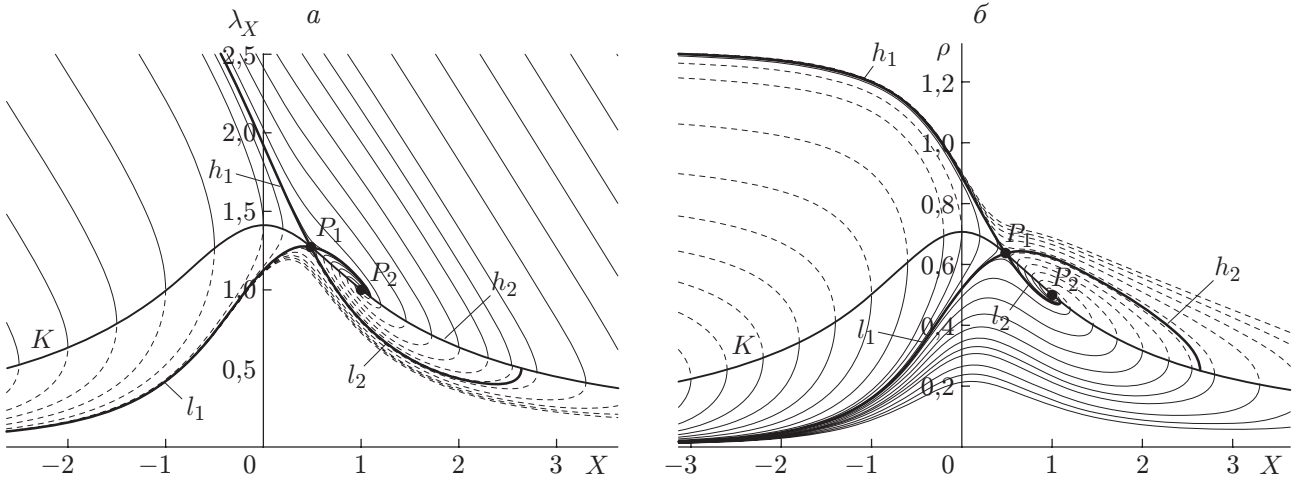


Рис. 7. Зависимости инвариантной компоненты скорости (а) и плотности (б) от переменных X при различных режимах движения газа: штриховые линии — на нижнем листе поверхности уравнения (4.1), сплошные — на верхнем листе поверхности уравнения (4.1)

скорости, расположенные выше кривой K , а на рис. 7,б — зависимости плотности, расположенные ниже кривой K .

Кривые, расположенные выше кривых K и h_2 на рис. 7,а, соответствуют движению потока газа, замедляющемуся с ростом переменной X и прекращающемуся на кривой K , задающей поверхность стока в физическом пространстве. Действительно, при приближении к этой кривой производная $U_X \rightarrow -\infty$, что можно трактовать как замедление движения и остановку всех частиц на этой кривой. Свойства соответствующих такому движению газа зависимостей плотности, лежащих ниже кривых K и l_2 на рис. 7,а, зависят от их положения относительно сепаратрисы l_1 . Кривые, находящиеся слева от l_1 , описывают монотонное увеличение плотности при приближении частиц к кривинанте. В то же время в потоке газа, движение которого начинается в точке, находящейся ниже кривой l_1 на рис. 7,б, плотность сначала возрастает до некоторого максимального значения, затем уменьшается, далее, при приближении к кривинанте, вновь увеличивается. Имеются решения, которые начинаются и заканчиваются на кривинанте. Для таких решений скорость и плотность газа описываются зависимостями, лежащими ниже кривой h_2 и выше l_2 на рис. 7. В этом случае частицы останавливаются на конечном расстоянии от источника. Скорость потока, движение которого описывается кривыми, лежащими между K и l_1 на рис. 7,а, в начале движения близка к нулю, а при приближении к кривинанте монотонно возрастает. На рис. 7,б видно, что сначала поток имеет почти постоянную плотность, которая затем уменьшается, до тех пор пока частицы газа не попадут на кривую K . Кривые, близкие к l_1 при $X \rightarrow -\infty$ и лежащие ниже l_2 , характеризуют скорости частиц, которые, как и в предыдущем случае, в начале движения близки к нулю. Скорость движения этих частиц сначала увеличивается, а затем уменьшается, до тех пор пока частицы не достигнут кривинанты. Плотность газа сначала практически постоянна, а по мере приближения к кривинанте монотонно убывает.

Тип особых точек оказывает влияние на характер движения газа. Так, в случае НОТ типа фокуса имеем решение, определенное на конечном интервале $[X_0, X_1]$, что соответствует движению газа с источником и стоком в начальной $X = X_0$ и конечной $X = X_1$ точках интервала. В физическом пространстве границы интервала $[X_0, X_1]$ задают положение перемещающихся со временем плоскостей, ортогональных оси Ox , на которых расположены источник и сток.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Овсянников Л. В., Чупахин А. П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 990–999.
5. **Чупахин А. П.** Небарохронные модели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 1-99).
6. **Арнольд В. И.** Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевск. респ. тип., 2000.
7. **Давыдов А. А.** Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функцион. анализ и его приложения. 1985. Т. 19, вып. 2. С. 1–10.
8. **Ремизов А. О.** О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 622–630.
9. **Ремизов А. О.** Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятия полей для неявных уравнений // Соврем. математика. Фундам. направления. 2006. Т. 19. С. 131–170.
10. **Паршин Д. В., Чупахин А. П.** Об источнике газа в поле постоянной силы // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 3–16.

Поступила в редакцию 28/V 2012 г.
