

УДК 524.3-17  
DOI: 10.15372/PMTF202315341

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ ВОЛН

Ц. Лю, Ц. Лэй

Пекинский технологический институт, Пекин, Китай  
E-mails: xrhmlq@163.com, leijm@bit.edu.cn

С использованием законов аэродинамики и динамики абсолютно твердых тел предложены численные методы исследования движения твердых тел при воздействии ударных волн. Изучено влияние массы и положения центра тяжести твердого тела на его движение. Из полученных результатов следует, что движение тела одинаково при различных зависимостях положительного давления от времени и различных массах тела. Тем не менее тело небольшой массы может изменить направление вращения. Показано, что с увеличением высоты, на которой расположен центр тяжести, также может изменяться направление вращения, а наличие дифракции может вызвать дальнейшее вращение тела. При движении жесткого тела на его подветренной стороне скорость понижения давления уменьшается.

**Ключевые слова:** ударные волны, контакт тела с поверхностью земли, соударение, численное моделирование

**Введение.** Взрывоопасные вещества при неправильном обращении или хранении могут детонировать, что приводит к несчастным случаям. Возникающие в результате ударные волны при столкновении с различными телами вызывают ударные нагрузки, что приводит к повреждению конструкций, изменению характера движения незакрепленных конструкций и повреждению окружающих объектов. Поэтому крайне важно исследовать динамику объектов, находящихся на поверхности земли, при воздействии на них ударных волн.

При исследовании взаимодействия ударных волн с различными объектами обычно проводятся теоретический анализ, эксперимент и численное моделирование [1]. Однако теоретический анализ часто требует принятия многочисленных предположений, вследствие чего он менее пригоден для инженерных приложений. В современных исследованиях широко используются экспериментальные и численные методы. В работе [2] выполнены измерения скорости распространения сферических ударных волн с целью определения изменения избыточного давления в зависимости от расстояния. В [3–7] проведены экспериментальные исследования влияния защиты барьеров и других факторов на распространение ударных волн. В работе [8] изучена деформация защитных плит при воздействии ударных волн и обнаружено образование эллиптических отверстий. В работе [9], в которой приводятся результаты исследования разрушающих свойств многослойного стекла при воздействии на него ударных волн, не обнаружено образования межслойных трещин.

В [10] представлены результаты экспериментальных исследований локальных повреждений и фрагментации неармированных каменных стен при воздействии на них ударных волн. Установлено, что применение системы сухих подвесных каменных плит позволяет уменьшить повреждение стен, вызванное воздействием ударных волн. В работе [11] изучена деформация круглых консольных балок при воздействии ударных волн, в работе [12] — напряжения в железобетонных колоннах. Выполнены исследования влияния ударных нагрузок на людей, находящихся внутри зданий [13].

Развитие численных методов и вычислительной техники позволило использовать численное моделирование при изучении взаимодействия ударных волн с различными объектами. В отличие от экспериментальных исследований численное моделирование является эффективным методом определения изменений давления в ударных волнах и воздействия ударной нагрузки на объекты. В работе [14] приведен обзор результатов исследований взаимодействия ударных волн с объектами и их экспериментальной проверки в ударной аэродинамической трубе. В [15–17] выполнены численные исследования распространения ударной волны над препятствиями. В ряде работ исследовалось влияние окружающей среды на распространение ударной волны, например, в туннелях [18], в городской среде [19]. В работе [20] изучено взаимодействие косой ударной волны и зданий и установлено, что угол между зданием и ударной волной существенно влияет на ударную нагрузку на здание. В работе [21] с использованием пакета программ AUTODYN-3D исследовано воздействие ударной нагрузки на взрывозащитные стены и отмечено, что взрывозащитная стена эффективно снижает ударную нагрузку. В [22–25] с использованием численных методов изучены динамические реакции объектов на ударные волны, такие как разрушение пластин из различных материалов. В указанных выше работах в основном представлены исследования распространения ударной волны над препятствиями и повреждений объектов при ее воздействии. При этом недостаточное внимание уделялось изучению движения объектов как жесткого целого при воздействии на них ударной волны.

В данной работе разработан метод численного моделирования для исследования движения объектов как жесткого целого под действием ударной волны. На основе предложенного метода выполнен анализ движения объекта при различной длительности воздействия на него положительного давления, а также при различных массе объекта и высоте, на которой находится центр тяжести. Получен закон движения объекта и изучено влияние этого движения на распространение ударной волны, что позволяет получить более полное представление о динамических характеристиках объекта при воздействии на его поверхность ударной нагрузки.

**1. Численный метод.** Ударные нагрузки, индуцированные ударными волнами, изменяют характер движения объекта, что, в свою очередь, оказывает влияние на характеристики распространения ударной волны. В результате происходит сложный физический процесс. При столкновении объекта с поверхностью земли возникают контактные силы и силы трения, существенно влияющие на движение объекта. Это значительно затрудняет численное моделирование движения объекта под действием ударных волн.

Для решения задачи о взаимосвязи поля потока (ударной волны) и движения твердого тела используется алгоритм слабой связи. Этот алгоритм часто применяется при численном решении связанных задач. В частности, при использовании этого алгоритма задача разделяется на задачу определения поля течения и задачу о движении твердого тела. Процесс вычислений начинается с решения задач определения поля потока для расчета ударных нагрузок. Затем с учетом полученных ударных нагрузок решаются уравнения движения объекта. После этого результирующая скорость или смещение объекта вновь передается в поле потока для соответствующего изменения граничных условий для него.

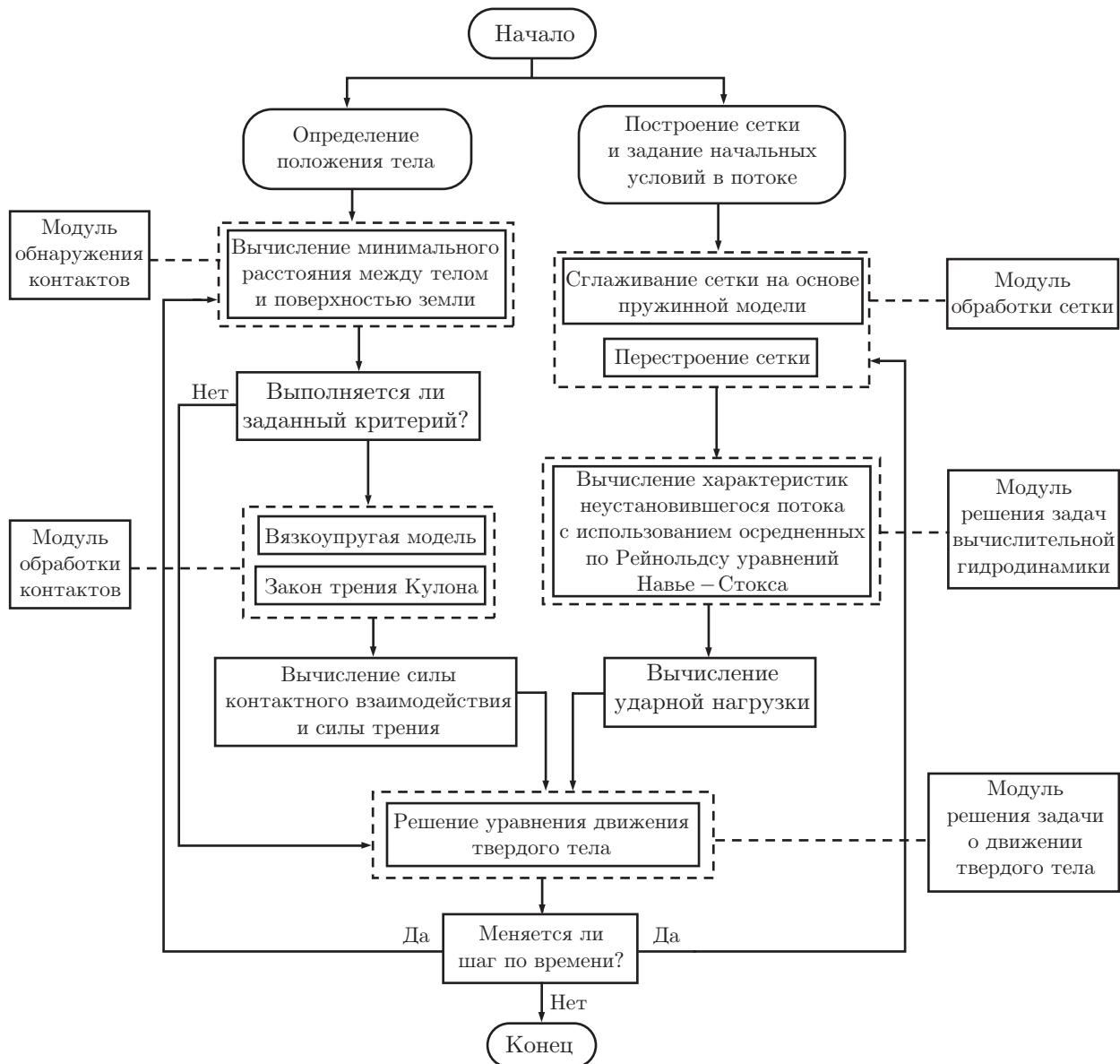


Рис. 1. Блок-схема численного метода

На рис. 1 представлена схема разработанного метода численного моделирования, основанного на алгоритме слабой связи. С использованием этого метода исследуется движение объектов на поверхности земли под действием ударных волн. Метод численного моделирования состоит из пяти основных модулей: модуля обнаружения контактов, модуля обработки контактов, модуля решения задач вычислительной гидродинамики, модуля обработки сетки и модуля решения задачи о движении твердого тела.

Модули выполняют следующие функции.

1. Модуль обнаружения контактов предназначен для определения момента соударения объекта с поверхностью земли. Минимальное расстояние между объектом и поверхностью земли вычисляется постоянно. Если минимальное расстояние становится меньше указанного ограничения, считается, что произошло столкновение объекта с поверхностью земли.

2. Модуль обработки контактов предназначен для определения силы соударения и силы трения при столкновении объекта с поверхностью земли. Для определения силы

соударения используется вязкоупругая модель, а для определения силы трения — закон кулоновского трения.

3. Модуль решения задач вычислительной гидродинамики используется для моделирования распространения ударных волн. Для получения характеристик нестационарного поля течения решаются нестационарные уравнения Эйлера. Ударные нагрузки определяются путем интегрирования поверхностного давления на объект.

4. Модуль обработки сетки состоит из двух подмодулей: подмодуля сглаживания на основе метода “пружины” и подмодуля перестройки сетки. Оба подмодуля используются для определения деформации сетки, вызванной движением твердого тела, в области, занятой жидкостью.

5. Модуль решения задачи о движении твердого тела используется для расчета шести степеней свободы движения. Уравнения поступательного движения объекта решаются в инерциальной системе координат, а уравнения вращения — в системе координат, связанной с объектом.

1.1. *Модуль решения задач вычислительной гидродинамики.* Поток жидкости является нестационарным вследствие движения твердого тела, вызванного воздействием ударных волн. При этом возникает необходимость использования методов определения деформации сетки для ее адаптации к динамическим изменениям на границе потока. Интегральное трехмерное уравнение Эйлера, используемое при решении задач методом двойного временного шага и на основе технологии динамического перестроения сетки, может быть записано в виде

$$\Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{\Omega} \mathbf{Q} dV + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{W} dV + \iint_{\partial\Omega} (E, F, G) \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

где  $\Omega$  — контрольный объем;  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  — поверхность, ограничивающая объем  $\Omega$ , и внешняя нормаль к ней;  $t$  — время;  $\tau$  — псевдовремя, используемое при переходе с шага на шаг по времени;  $\Gamma$ ,  $\mathbf{Q}$  — предобусловливающая матрица и вектор примитивных переменных соответственно [26, 27]. Величины  $\mathbf{W}$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T,$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \end{bmatrix} [u - u_{grid}] + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ pu \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \end{bmatrix} [v - v_{grid}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ pu \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \end{bmatrix} [w - w_{grid}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ pu \end{bmatrix}.$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — компоненты вектора скорости жидкости в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно;  $u_{grid}$ ,  $v_{grid}$ ,  $w_{grid}$  — компоненты вектора скорости сетки;  $\rho$ ,  $p$ ,  $e$  — плотность, давление и полная энергия на единицу массы соответственно.

Для решения уравнений Эйлера в интегральной форме используется метод конечных объемов. Для дискретизации по времени и пространственным переменным уравнений нестационарного движения принята разностная схема второго порядка вверх по потоку.

Конвективный поток вычисляется по схеме Рой, а градиент определяется методом наименьших квадратов. С использованием этих численных методов моделируются нестационарное течение потока и процесс распространения ударных волн.

1.2. *Модуль решения задачи о движении твердого тела.* Уравнение поступательного движения объекта в инерциальной системе координат имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса;  $\dot{\mathbf{v}}$  — ускорение;  $\mathbf{F}$  — результирующая сила, действующая на объект.

В системе координат, связанной с телом, уравнение вращения объекта записывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = I^{-1}(\mathbf{M}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times (I \cdot \boldsymbol{\omega}_b)), \quad (2)$$

где  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_b$  — угловое ускорение;  $I$  — тензор инерции;  $\mathbf{M}_b$  — результирующий момент, действующий на объект в системе координат, связанной с телом. При переходе из инерциальной системы координат в систему координат, связанную с телом, момент преобразуется по формуле

$$\mathbf{M}_b = R \mathbf{M}_g.$$

Здесь  $\mathbf{M}_g$  — момент, полученный непосредственно в модуле решения задач вычислительной гидродинамики в инерциальной системе координат;  $R$  — матрица преобразования:

$$R = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\theta & -C_\theta S_\psi \\ S_\psi S_\gamma - S_\theta C_\psi C_\gamma & C_\theta C_\gamma & S_\theta S_\psi C_\gamma + C_\psi S_\gamma \\ S_\theta C_\psi S_\gamma + S_\psi C_\gamma & -C_\theta S_\gamma & C_\psi C_\gamma - S_\theta S_\psi S_\gamma \end{bmatrix},$$

$\theta, \psi, \gamma$  — углы Эйлера (угол тангажа, угол рыскания и угол крена);  $C_\chi = \cos(\chi)$ ;  $S_\chi = \sin(\chi)$ .

После определения ускорений поступательного и вращательного движений по уравнениям (1), (2) с помощью многоточечного алгоритма Адамса — Моултона четвертого порядка могут быть получены поступательные и вращательные скорости [28]:

$$\chi^{k+1} = \chi^k + \frac{\Delta t}{24} (9\dot{\chi}^{k+1} + 19\dot{\chi}^k - 5\dot{\chi}^{k-1} + \dot{\chi}^{k-2}), \quad (3)$$

где  $\chi$  обозначает  $\mathbf{v}$  или  $\boldsymbol{\omega}_b$ .

Для того чтобы определить положение объекта, необходимо определить связь между скоростью вращения и изменением угла наклона. Определив скорость вращения по уравнению (3), изменение угла ориентации можно вычислить по формуле

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_\gamma & C_\gamma \\ 0 & C_\gamma/C_\theta & -S_\gamma/C_\theta \\ 1 & -T_\theta C_\gamma & T_\theta S_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix},$$

где  $T_\chi = \operatorname{tg}(\chi)$ ;  $\omega_{bx}, \omega_{by}, \omega_{bz}$  — компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}_b$ .

Для определения положения и ориентации объекта используется алгоритм Эйлера первого порядка в обратном направлении:

$$\boldsymbol{\Phi}_{n+1} = \boldsymbol{\Phi}_n + \Delta t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{n+1},$$

где  $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{v}$ , если  $\boldsymbol{\Phi}$  — положение,  $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\theta}$ , если  $\boldsymbol{\Phi}$  — ориентация.

1.3. *Модуль обработки сетки.* Вследствие движения твердого тела в области, занятой жидкостью, необходима перестройка сетки.

Для изменения сетки при незначительном искажении проводится ее сглаживание с использованием метода “пружин”, при значительном искажении строится новая сетка.

При сглаживании сетки с использованием метода “пружин” связи между любыми двумя узлами сетки моделируются сетью пружин. До начала движения границы расстояния между этими пружинами определяют равновесное состояние сетки. Перемещение некоторого граничного узла индуцирует силу, пропорциональную удлинению всех пружин, соединенных с этим узлом. В соответствии с законом Гука сила, действующая на узел сетки, вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}_i = \sum_j^{n_i} K_{ij} (\Delta \mathbf{X}_j - \Delta \mathbf{X}_i),$$

где  $\Delta \mathbf{X}_i$ ,  $\Delta \mathbf{X}_j$  — перемещения узла  $i$  и соседнего с ним узла  $j$ ;  $n_i$  — число узлов, связанных с узлом  $i$ ;  $K_{ij}$  — жесткость пружины, связывающей узлы  $i$  и  $j$ :

$$K_{ij} = \frac{k}{\sqrt{|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|}},$$

$k$  — константа.

В состоянии равновесия результирующая сила, действующая на узел, должна быть равна нулю. Это условие приводит к итерационному уравнению

$$\Delta \mathbf{X}_i^{m+1} = \sum_j^{n_i} K_{ij} \Delta \mathbf{X}_i^m \Big/ \sum_j^{n_i} K_{ij}, \quad (4)$$

где  $m$  — номер итераций.

Поскольку смещения на границах известны, уравнение (4) для всех внутренних узлов решается с использованием алгоритма Якоби. После достижения сходимости алгоритма вычисляется новое положение узла

$$\mathbf{X}_i^{n+1} = \mathbf{X}_i^n + \Delta \mathbf{X}_i.$$

В случае если смещение границы значительно превышает размеры локальных ячеек, сглаживание только на основе метода “пружин” может приводить к ухудшению качества ячеек. В результате сетка становится непригодной для дальнейших вычислений. Для решения этой проблемы строится новая сетка. Определяются агломерации ячеек, которые значительно искажены или размер которых не удовлетворяет установленному критерию. Затем на этих агломерациях ячеек повторно строятся сетки.

При построении сеток в первую очередь учитываются три основных параметра: максимальный и минимальный размеры ячейки и степень искажения ячейки. Если размер или асимметрия ячейки не соответствует заданному стандарту, она подвергается процессу реконструкции. Если вновь созданные ячейки соответствуют установленным критериям, то они используются при построении сетки. В противном случае новые ячейки отбрасываются, а исходные сохраняются.

**1.4. Модуль обнаружения контактов.** При расчете возникает существенная сложность в случае столкновения объекта с поверхностью земли. В момент соударения объекта с поверхностью земли некоторые границы сливаются, после прекращения соударения эти границы разделяются. Определение критерия слияния и разделения границ при перестроении сетки представляет значительную сложность. Чтобы преодолеть эту сложность, в данной работе вводится пороговая величина расстояния  $L_t$  между объектом и поверхностью земли. Для обнаружения соударения непрерывно вычисляется минимальное расстояние между объектом и поверхностью земли  $L_{\min}$ . В тот момент, когда это расстояние становится меньше порогового значения  $L_t$ , считается, что произошло столкновение. Данный

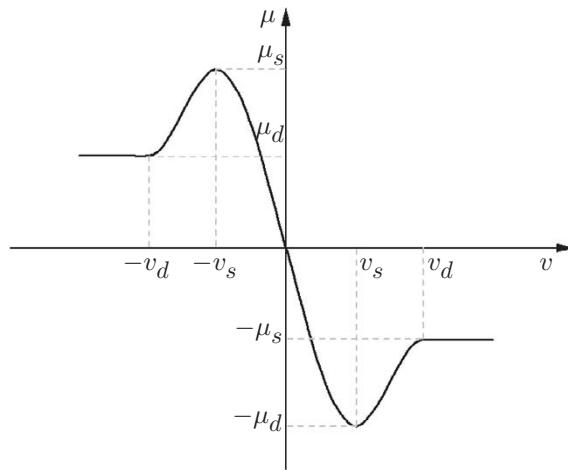


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от относительной скорости скольжения при  $\mu_s = 0,7$ ,  $\mu_d = 0,65$ ,  $v_s = 2$  мм/с,  $v_d = 5$  мм/с

метод обнаружения столкновения позволяет не только определить момент столкновения, но и уменьшить сложности, возникающие при слиянии и разделении границ.

1.5. *Модуль обработки контактов.* При столкновении объекта с поверхностью земли появляются значительные сила соударения и сила трения. В данной работе сила соударения определяется с использованием вязкоупругой модели, а сила трения — на основе закона трения Кулона.

При вычислении силы, возникающей при соударении, используется система, состоящая из пружины и демпфера. Формула для расчета силы столкновения записывается в следующем виде [29, 30]:

$$F_n = K\delta^r + D\dot{\delta}.$$

Здесь  $F_n$  — сила столкновения;  $K = 2,8 \cdot 10^6$  Н/м — коэффициент жесткости;  $\delta$  — деформация;  $\dot{\delta}$  — относительная скорость;  $r = 1,2$  — показатель жесткости. Коэффициент демпфирования  $D$  вычисляется по формуле

$$D = s(\delta, 0, 0, d, C),$$

где  $C = 1000$  с/мм — максимальный коэффициент демпфирования;  $d$  — глубина внедрения (при  $d = 0,5$  мм коэффициент  $C$  достигает максимального значения); функция  $s$  — ступенчатая функция:

$$s(x, x_0, y_0, x_1, y_1) = \begin{cases} y_0, & x \leq x_0, \\ y_0 + \bar{x}^2(3 - 2\bar{x})\bar{y}, & x_0 < x < x_1, \\ y_1, & x \geq x_1, \end{cases}$$

$x$  — переменная;  $x_0, y_0, x_1, y_1$  — константы; величины  $\bar{x}, \bar{y}$  вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \bar{y} = y_1 - y_0.$$

Сила трения  $F_r$  определяется законом трения Кулона

$$F_r = \mu F_n,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. На рис. 2 показана зависимость коэффициента трения от относительной скорости скольжения

$$\mu = -s(v, -v_s, -1, v_s, 1)s(|v|, v_s, \mu_s, v_d, \mu_d).$$

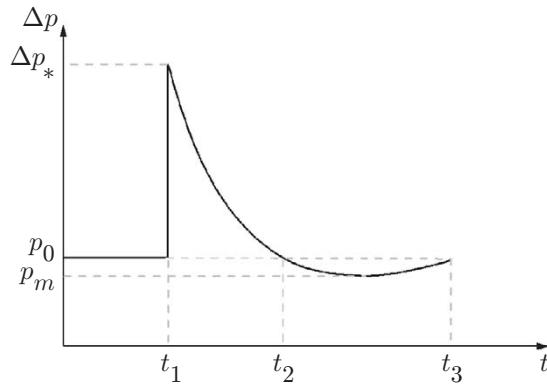


Рис. 3. Зависимость давления в ударной волне от времени

**2. Закон распространения взрывной волны в воздухе.** Образующиеся при взрыве продукты находятся при высокой температуре и большом давлении и сильно сжимают окружающий газ, что приводит к резкому изменению его физических параметров, таких как давление и температура. В результате формируется ударная волна. Начальная скорость ударной волны быстро уменьшается вследствие потерь энергии. После того как давление продуктов взрыва уменьшается до значения, равного давлению окружающей среды, их расширение происходит по инерции, что приводит к образованию зоны с отрицательным давлением. В этой зоне окружающий газ сжимает продукты взрыва, в результате чего давление в них увеличивается. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто равновесное состояние. Первое расширение является наиболее разрушительным, при этом максимальное давление равно избыточному давлению на фронте ударной волны.

На рис. 3 показана зависимость давления в ударной волне от времени. Атмосферное давление до прихода ударной волны обозначается через  $p_0$ . В момент времени  $t_1$  вследствие прихода ударной волны давление испытывает скачок  $\Delta p_*$ . В интервале времени  $t_1 \div t_2$  давление уменьшается до значения  $p_0$ . В интервале времени  $t_2 \div t_3$  давление уменьшается до минимального значения  $p_m$ , а затем вновь становится равным исходному значению. В данной работе при описании распространения ударной волны используется формула Бейкера [31]

$$\Delta p(t) = \Delta p_* \left(1 - \frac{t}{\Delta\tau}\right) e^{-\zeta t/\Delta\tau},$$

где  $\zeta$  — коэффициент затухания;  $\Delta\tau$  — интервал времени, в котором давление положительно.

При расчете необходимо знать зависимость между параметрами ударной волны и избыточным давлением. Уравнение состояния идеального газа записывается в виде

$$p = \rho R T, \quad (5)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — температура газа.

Уравнения непрерывности параметров на фронте ударной волны имеют вид

$$D = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0}{\rho_1 - \rho_0}, \quad p_1 - p_0 = \rho_0 (D - u_0) (u_1 - u_0), \quad (6)$$

где  $D$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$  — скорость волны, давление, плотность и скорость частиц на фронте соответственно;  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0$  — давление, плотность, скорость частиц в газе перед фронтом волны.

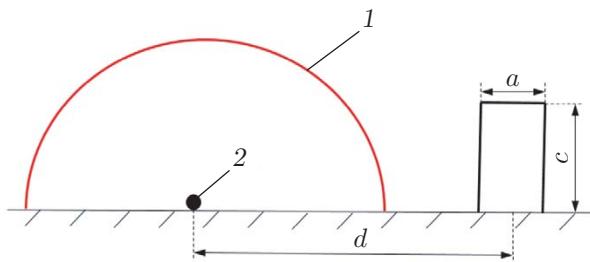


Рис. 4. Расчетная модель:  
1 — ударная волна, 2 — взрывчатое вещество

Адиабатическое уравнение Гюгонио записывается в следующем виде:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_0}{(k+1)\rho_0 - (k-1)\rho_1}. \quad (7)$$

Предполагается, что до прихода ударной волны газ находится в неподвижном состоянии. Следовательно,

$$u_0 = 0. \quad (8)$$

Из (5)–(8) получаем

$$D = a_0 \sqrt{\frac{k+1}{2k} \frac{p_1}{p_0} + \frac{k-1}{2k}}, \quad u_1 = a_0 \left( \frac{p_1}{p_0} - 1 \right) / \left( k \sqrt{\frac{k+1}{2k} \frac{p_1}{p_0} + \frac{k-1}{2k}} \right), \quad (9)$$

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{(k+1)p_1 + (k-1)p_0}{(k+1)p_0 + (k-1)p_1},$$

где  $a_0$  — скорость звука в газе перед фронтом волны.

При атмосферном давлении  $k = 1,4$ ,  $p_0 = 101325$  Па,  $\rho_0 = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>. Соотношения (9) позволяют определить параметры ударной волны с использованием избыточного давления. Полученные соотношения дают информацию о поведении ударных волн в различных газовых средах.

**3. Вычислительные модели и расчетные сетки.** На рис. 4 показана схема модели, используемой в данной работе. Начальное расстояние между объектом и взрывчатым веществом  $d = 40$  м. До прихода ударной волны объект, представляющий собой параллелепипед с размерами  $2,2 \times 2,5 \times 4,5$  м ( $a = 2,2$  м,  $c = 4,5$  м), остается неподвижным. В расчетах масса объекта принималась равной 0,5, 1,0, 2,0 т. Высота, на которой расположен центр тяжести объекта, принималась равной  $h = 1,50; 2,25; 3,00$  м.

На рис. 5 показаны расчетные сетки для вычисления параметров потока. Расчетная область состоит из внешней и внутренней областей. Сетка во внутренней области (области движения объекта) выбирается таким образом, чтобы обеспечить точность вычислений. При движении объекта под действием ударных волн сетка во внутренней области обновляется с использованием метода “пружин” и метода построения новой сетки, в то время как сетка во внешней области остается неизменной.

**4. Верификация численных расчетов.** Для верификации численного решения используется задача о нормальном отражении ударной волны: падающая волна распространяется перпендикулярно неподвижной стенке, при отражении от нее генерируется волна, движущаяся в противоположном направлении (рис. 6). Соотношение между давлением

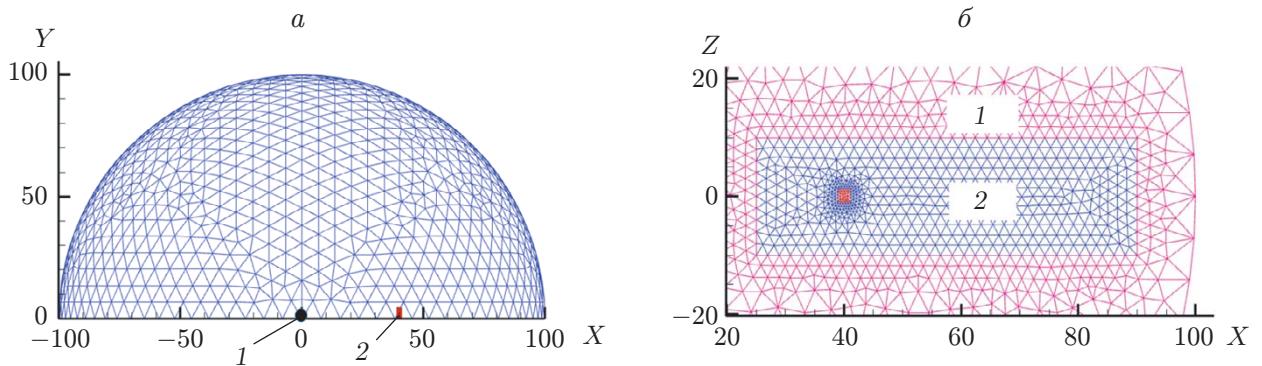


Рис. 5. Расчетная сетка для вычисления параметров потока:  
 а — сетка в области распространения ударной волны (1 — взрывчатое вещество, 2 — объект), б — сетка вблизи объекта (1 — внешняя область, 2 — внутренняя область)

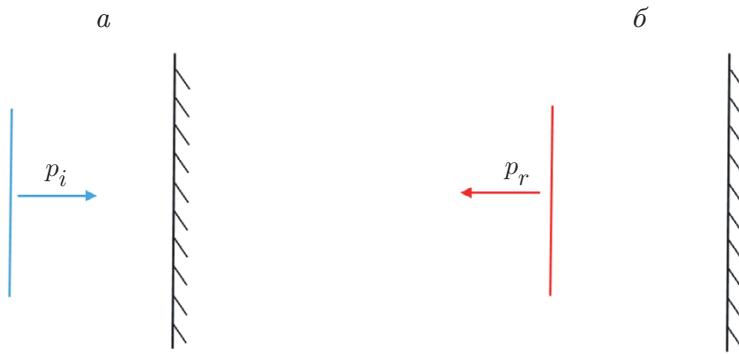


Рис. 6. Нормальное отражение волн:  
 а — падающая волна, б — отраженная волна

в отраженной волне  $p_r$  и давлением в падающей волне  $p_i$  записывается в следующем виде [32]:

$$p_r = p_i \frac{(3k - 1)p_i - (k - 1)p_0}{(k - 1)p_i - (k + 1)p_0}. \quad (10)$$

Выполнено численное моделирование нормального отражения ударных волн с различными давлениями. На рис. 7 представлено численное решение, а также аналитическое решение, полученное с использованием уравнения (10). Численное решение хорошо согла-суется с аналитическим при различных значениях давления. Таким образом, используе-мый в данной работе численный метод обладает высокой надежностью при моделировании распространения ударной волны.

Исследовались три расчетные сетки: грубая сетка, содержащая  $3,57 \cdot 10^6$  ячеек, сетка с ячейками среднего размера, содержащая  $5,36 \cdot 10^6$  ячеек, и мелкая сетка, содержащая  $6,82 \cdot 10^6$  ячеек. В численных расчетах задавались следующие значения параметров задачи:  $\Delta p = 2$  МПа,  $m = 1$  т,  $h = 2,25$  м,  $\Delta \tau = 40$  мс. Шаг по времени равен  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$  с.

На рис. 8 приведены результаты вычисления характеристик поступательного и вра-щательного движений объекта с использованием различных расчетных сеток. Результаты, полученные на грубой и мелкой сетках, различаются существенно, в то время как резуль-таты, полученные на сетке с ячейками среднего размера и мелкой сетке, практически не различаются. Поэтому дальнейшее численное моделирование выполнялось с использова-нием сетки с ячейками среднего размера.

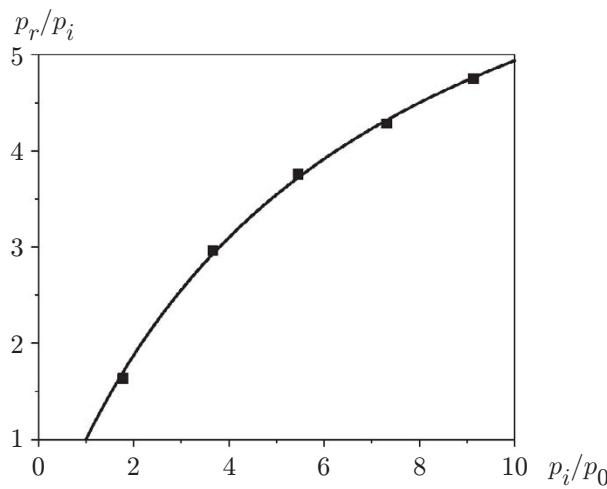


Рис. 7. Численное (точки) и аналитическое (линия) решения

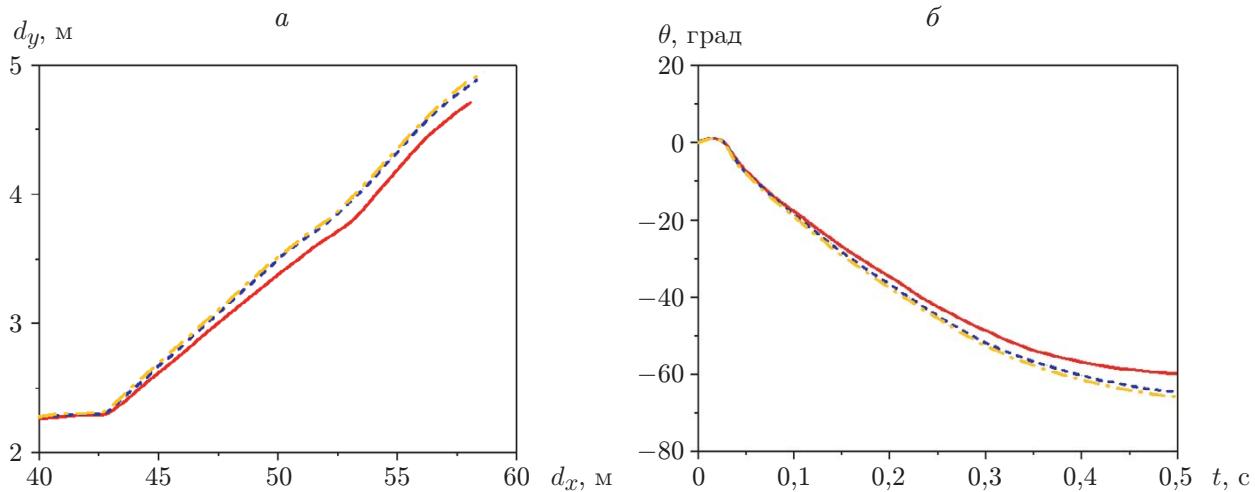


Рис. 8. Результаты вычисления параметров поступательного (a) и вращательного (б) движений объекта с использованием различных расчетных сеток: сплошные линии — грубая сетка, штриховые — сетка с ячейками среднего размера, штрихпунктирные — мелкая сетка

С использованием сетки с ячейками среднего размера проведено исследование влияния на результаты численных расчетов величины шага по времени. Расчеты выполнены при значениях шага по времени  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  с,  $\Delta t_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  с,  $\Delta t_3 = 10^{-5}$  с. Остальные параметры расчета указаны выше. На рис. 9 представлены результаты расчета параметров поступательного и вращательного движений объекта при различной величине шага по времени. Различие результатов, полученных при  $\Delta t_2$  и  $\Delta t_3$ , незначительное, в то время как результаты, полученные при  $\Delta t_1$ , существенно отличаются от результатов, полученных при  $\Delta t_2$  и  $\Delta t_3$ . Таким образом, при моделировании распространения ударной волны шаг по времени выбран равным  $\Delta t_2$ .

**5. Результаты численного моделирования и их обсуждение.** Проведено численное моделирование движения объекта на поверхности земли под действием ударных волн при следующих значениях параметров: избыточное давление  $\Delta p = 2$  МПа, время действия

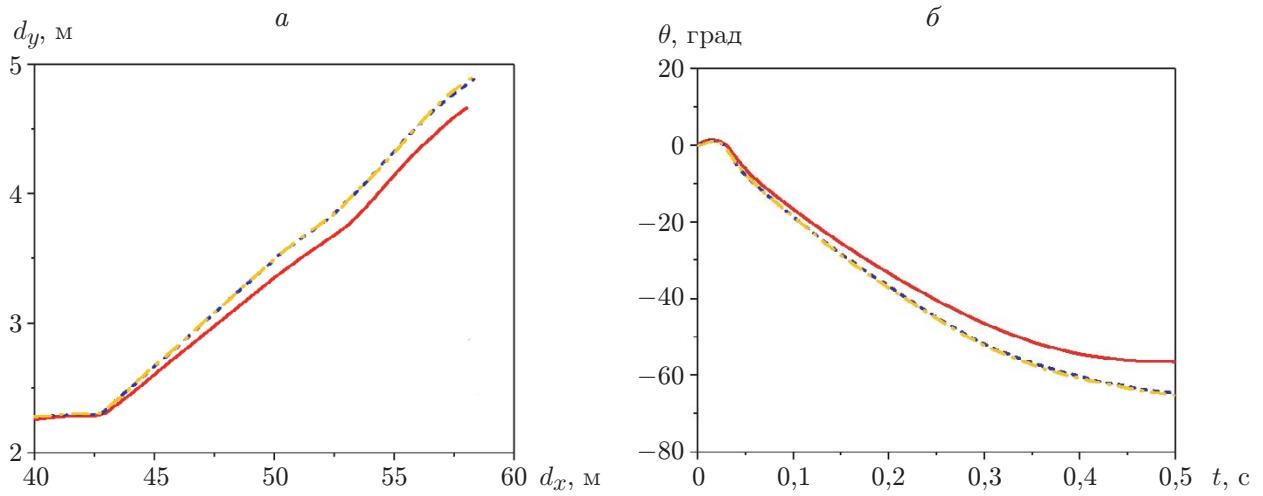


Рис. 9. Результаты численных расчетов поступательного (a) и вращательного (б) движений объекта при различной величине шага по времени:  
сплошные линии —  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  с, штриховые —  $\Delta t_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  с, штрихпунктирные —  $\Delta t_3 = 10^{-5}$  с

положительного давления  $\Delta\tau = 20 \div 60$  мс, масса объекта  $m = 0,5 \div 2,0$  т, высота, на которой расположен центр тяжести объекта,  $h = 1,5 \div 3,0$  м. Исследуются закон движения объекта и его влияние на распространение ударной волны. Моделирование проводится в интервале времени  $0 \div 0,5$  с.

5.1. *Влияние интервала времени, в котором давление положительно.* На рис. 10 приведены зависимости от времени параметров поступательного и вращательного движений объекта при различных значениях  $\Delta\tau$ . После того как ударная волна достигает объекта, параметры как поступательного, так и вращательного движения увеличиваются со временем.

На рис. 11 приведены зависимости от времени компонент вектора скорости поступательного движения и угловой скорости объекта при различных значениях  $\Delta\tau$ . После достижения ударной волной объекта компонента скорости поступательного движения  $v_x$  быстро увеличивается до максимального значения, затем уменьшается и через 0,062 с после столкновения уменьшается скачкообразно (см. рис. 11,а). Компонента скорости  $v_y$  сначала увеличивается до максимального значения, затем непрерывно уменьшается, а при  $t = 0,062$  с (при столкновении объекта с поверхностью земли) меняет направление (см. рис. 11,б). Ударная нагрузка индуцирует положительную скорость вращения  $\omega$ , однако при  $t = 0,025$  с (при первом столкновении с ударной волной) происходит переход от положительной скорости вращения к отрицательной, а при  $t = 0,062$  с (при втором столкновении) отрицательная скорость вращения увеличивается (см. рис. 11,в).

Проведено исследование воздействия ударных волн и столкновений с поверхностью земли на движение объекта с учетом свойств потока. На рис. 12 приведены изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  в различные моменты времени. Коэффициент давления определялся по формуле

$$c_p = \frac{p_l - p_0}{\Delta p},$$

где  $p_l$  — локальное давление. В начальном состоянии поверхность объекта  $AB$  является наветренной, поверхность  $CD$  — подветренной.

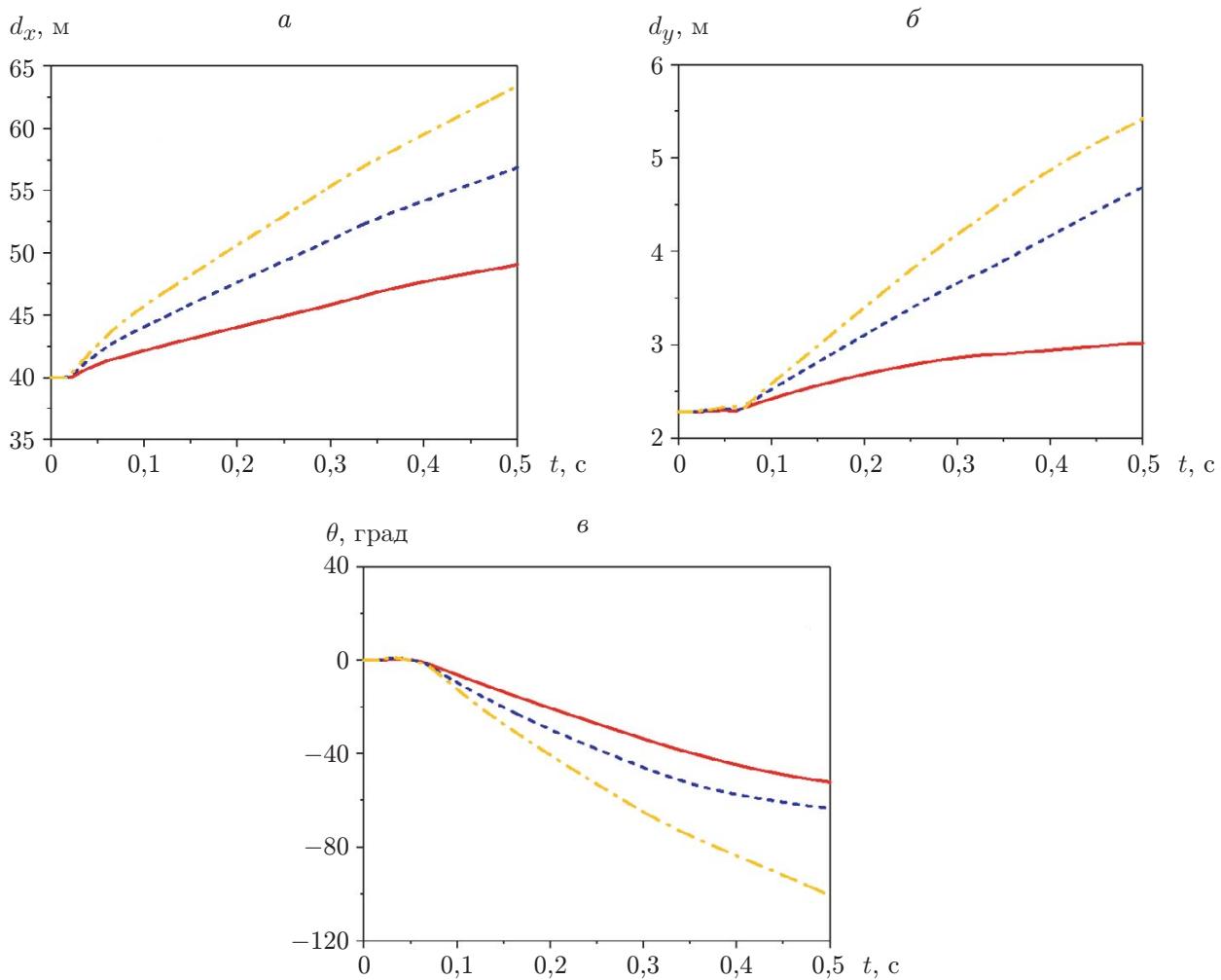


Рис. 10. Зависимости от времени компонент вектора смещения при поступательном движении  $d_x$  (а),  $d_y$  (б) и угла поворота  $\theta$  при вращении объекта вокруг оси  $Oz$  (в) при  $\Delta p = 2$  МПа,  $m = 1$  т,  $h = 2,25$  м и различных значениях  $\Delta\tau$ : сплошные линии —  $\Delta\tau = 20$  мс, штриховые —  $\Delta\tau = 40$  мс, штрихпунктирные —  $\Delta\tau = 60$  мс

Поскольку ударная волна является сферической, сначала удару подвергается нижняя часть поверхности  $AB$ . Следовательно, точка приложения ударной нагрузки расположена ниже центра масс объекта. В результате возникает положительный момент ударной нагрузки, что приводит к возникновению положительной скорости вращения  $\omega$ . Кроме того, продукты взрыва при высоком давлении проникают в зазор между объектом и поверхностью земли. При этом возникает ударная сила, действующая в направлении оси  $y$ , что вызывает появление положительной компоненты скорости поступательного движения  $v_y$  (см. рис. 12, а).

При столкновении ударной волны с гранью  $AB$  волна отражается, вследствие чего вблизи этой грани образуется зона высокого давления. В этой зоне возникает значительная ударная сила, что приводит к быстрому увеличению  $v_x$  до максимального значения. Однако различие давлений в зоне высокого давления и в примыкающей к ней области приводит к образованию волн разрежения, которые быстро распространяются от периферии зоны высокого давления к ее центральной части. Как следствие, давление быстро

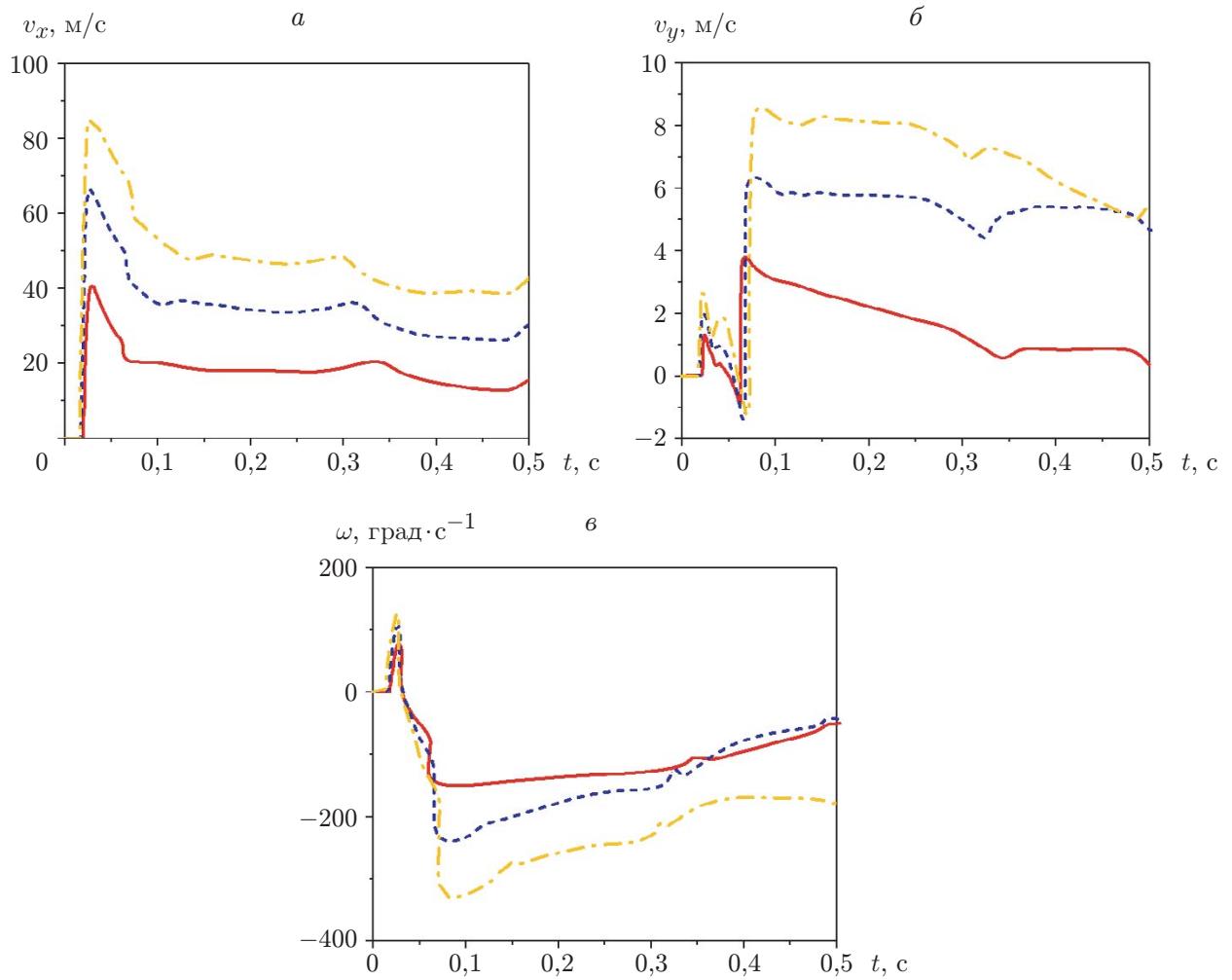


Рис. 11. Зависимости компонент векторов поступательной  $v_x$  (а),  $v_y$  (б) и вращательной  $\omega$  (в) скоростей объекта от времени при  $\Delta p = 2$  МПа,  $m = 1$  т,  $h = 2,25$  м и различных значениях  $\Delta\tau$ :  
сплошные линии —  $\Delta\tau = 20$  мс, штриховые —  $\Delta\tau = 40$  мс, штрихпунктирные —  $\Delta\tau = 60$  мс

понижается, что приводит к замедлению роста компоненты скорости  $v_x$ . Более того, при обтекании объекта потоком газа в области высокого давления изменяется направление движения этого потока и возникает его циркуляция (см. рис. 12, б).

Циркуляция вызывает дифракцию, в результате чего волна сталкивается с гранью  $CD$ , что приводит к увеличению давления и дальнейшему уменьшению скорости. Увеличение компоненты скорости  $v_x$ . Более того, при положительной скорости вращения ( $\omega > 0$ ) происходит столкновение объекта с поверхностью земли в точке  $B$ , что приводит к изменению положительной скорости вращения на отрицательную ( $\omega < 0$ ) (см. рис. 12, в).

По мере уменьшения давления входящего потока влияние ударной волны на движение объекта ослабевает. Тем не менее объект повторно сталкивается с поверхностью земли в точке  $C$ , что приводит к увеличению угловой скорости  $\omega$  и изменению отрицательной скорости  $v_y$  на положительную (см. рис. 12, г).

В дальнейшем давление вблизи грани  $CD$  остается достаточно большим, поэтому компонента скорости  $v_x$  и угловая скорость  $\omega$  постепенно уменьшаются. Кроме того, под действием силы тяжести компонента скорости  $v_y$  непрерывно уменьшается (см. рис. 12, д).

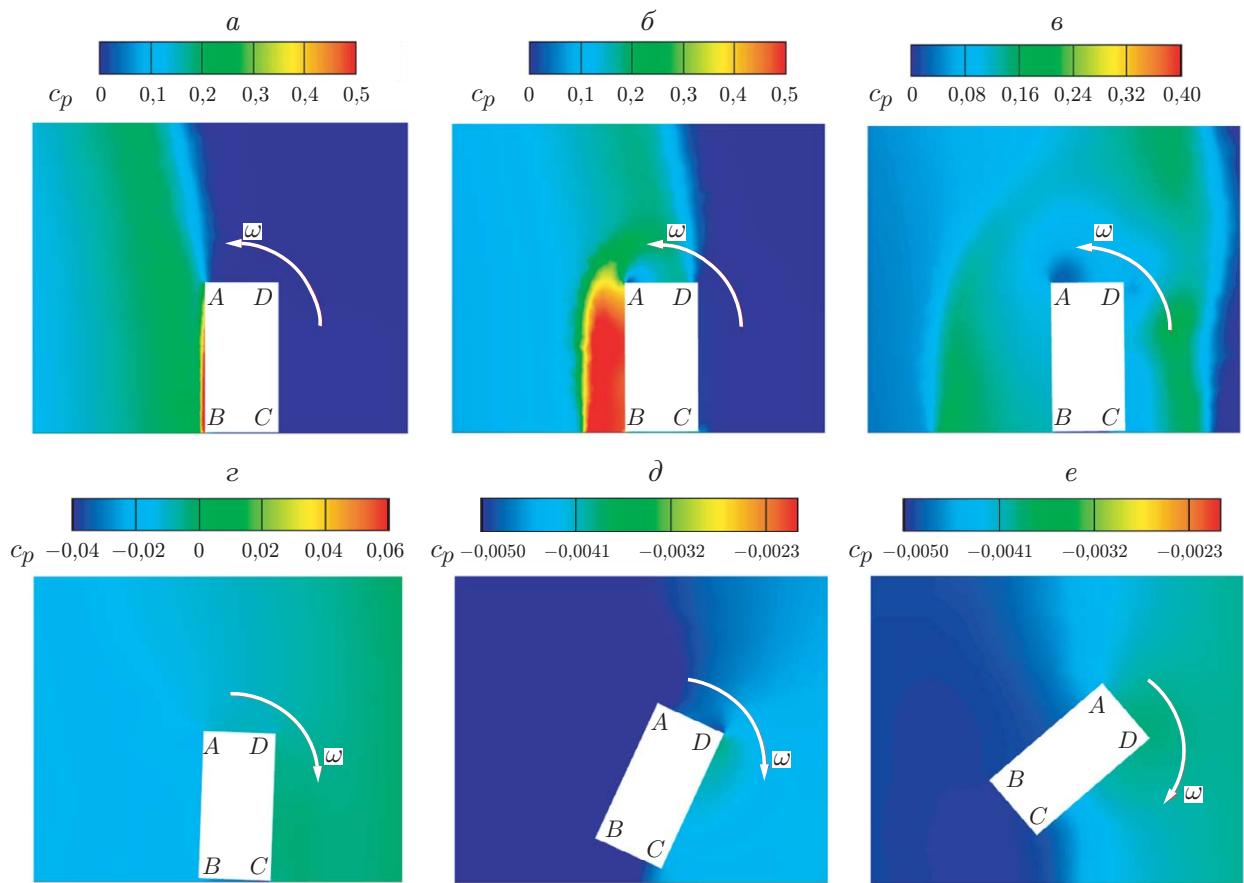


Рис. 12. Изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  при  $\Delta p = 2$  МПа,  $m = 1$  т,  $h = 2,25$  м в различные моменты времени:

$a$  —  $t = 0,017$  с,  $\delta$  —  $t = 0,020$  с,  $\varepsilon$  —  $t = 0,025$  с,  $\vartheta$  —  $t = 0,068$  с,  $\partial$  —  $t = 0,170$  с,  $e$  —  $t = 0,320$  с

Чрезмерное расширение газа, вызванное инерцией, приводит к образованию зоны отрицательного давления. В результате зона отрицательного давления сжимается, что оказывает влияние на движение объекта. Однако, как следует из зависимостей, приведенных на рис. 11, процесс сжатия оказывает незначительное влияние на движение объекта (см. рис. 12,  $e$ ).

**5.2. Влияние массы.** На рис. 13 приведены зависимости от времени компонент вектора смещения при поступательном и вращательном движении объекта и различных значениях его массы  $m$ . Видно, что с уменьшением массы смещение  $d_x$  увеличивается. Скорость увеличения  $d_y$  существенно уменьшается при  $m = 2$  т. При  $m = 0,5$  т угол поворота  $\theta$  сначала увеличивается, а затем уменьшается.

На рис. 14 представлены зависимости от времени компонент векторов скоростей поступательного и вращательного движений объекта при различных значениях его массы  $m$ .

Из зависимостей, приведенных на рис. 14,  $a$ , следует, что закономерность изменения компоненты скорости  $v_x$  при различных значениях массы  $m$  одна и та же: скорость сначала увеличивается, достигая максимума, а затем непрерывно уменьшается. Заметим, что максимальное значение  $v_x$  увеличивается с уменьшением массы объекта.

Из зависимостей, представленных на рис. 14,  $b$ , следует, что при  $m \geq 1$  т закономерность изменения  $v_y$  одна и та же. Однако следует отметить, что меньшим массам

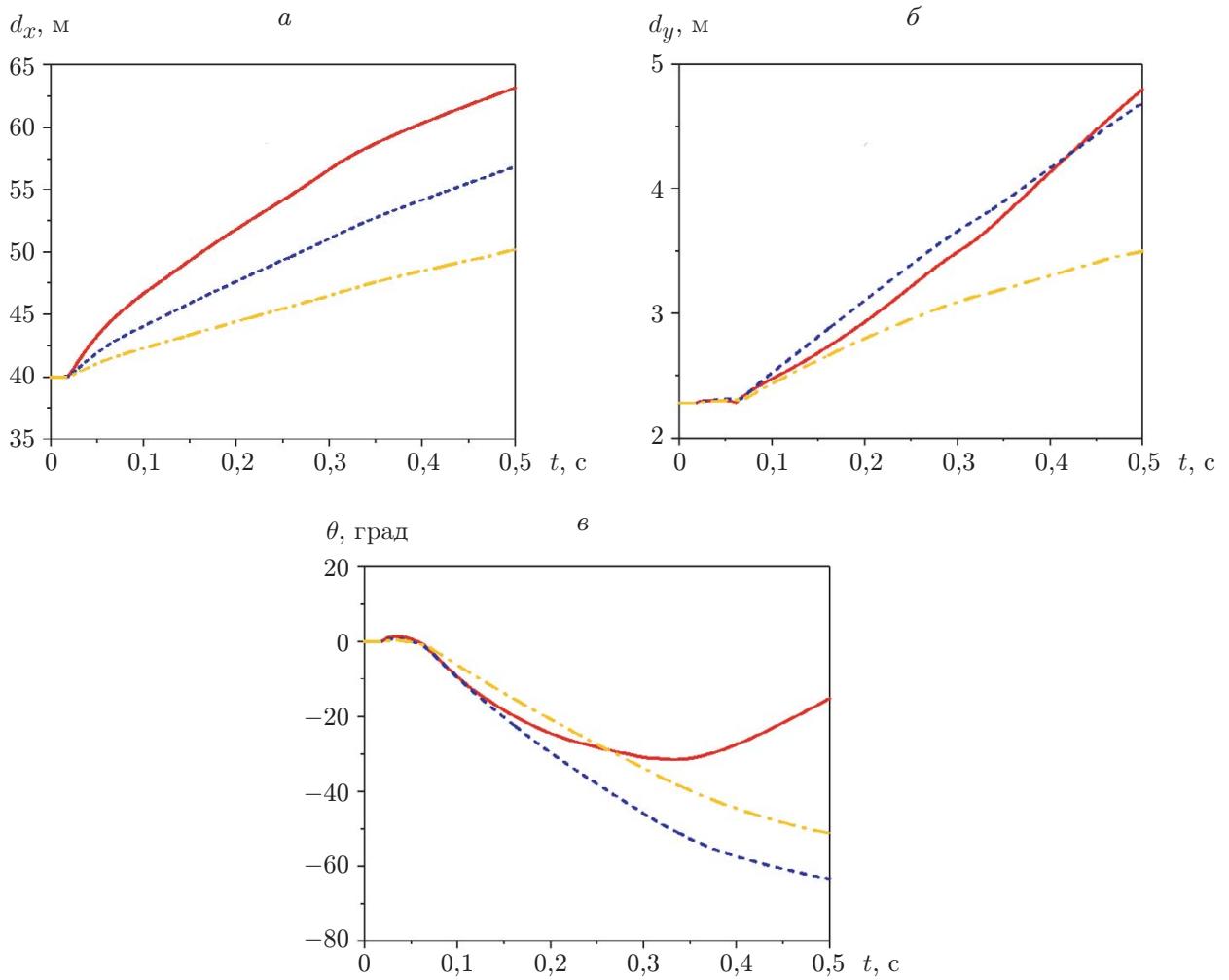


Рис. 13. Зависимости от времени компонент вектора смещения  $d_x$  (а),  $d_y$  (б) при поступательном движении и угла поворота  $\theta$  (в) при вращательном движении объекта при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $h = 2,25$  м и различных значениях его массы  $m$ :

сплошные линии —  $m = 0,5$  т, штриховые —  $m = 1$  т, штрихпунктирные —  $m = 2$  т

соответствуют большие значения  $v_y$ . При  $m = 0,5$  т характер изменения  $v_y$  практически такой же, как и при  $m = 1$  т.

Из зависимостей, приведенных на рис. 14, в, следует, что при различных значениях  $m$  закономерность изменения  $\omega$  одна и та же, однако при  $m = 0,5$  т  $\omega$  меняет знак. Следовательно, угол поворота  $\theta$  сначала увеличивается, а затем уменьшается.

На рис. 15 приведены изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  в различные моменты времени.

Из результатов, приведенных на рис. 12, 15, следует, что при  $m = 0,5$  т и  $m = 1$  т распределения давления в сечении  $z = 0$  практически одинаковы.

Положительный момент сил, индуцированных ударной волной, обусловливает положительную скорость вращения ( $\omega > 0$ ). При меньшей массе объекта скорость вращения  $\omega$  больше (см. рис. 15, а).

Отражение ударной волны приводит к образованию вблизи грани  $AB$  зоны высокого давления. Вследствие этого происходит быстрое увеличение компоненты скорости  $v_x$  до максимального значения (см. рис. 15, б).

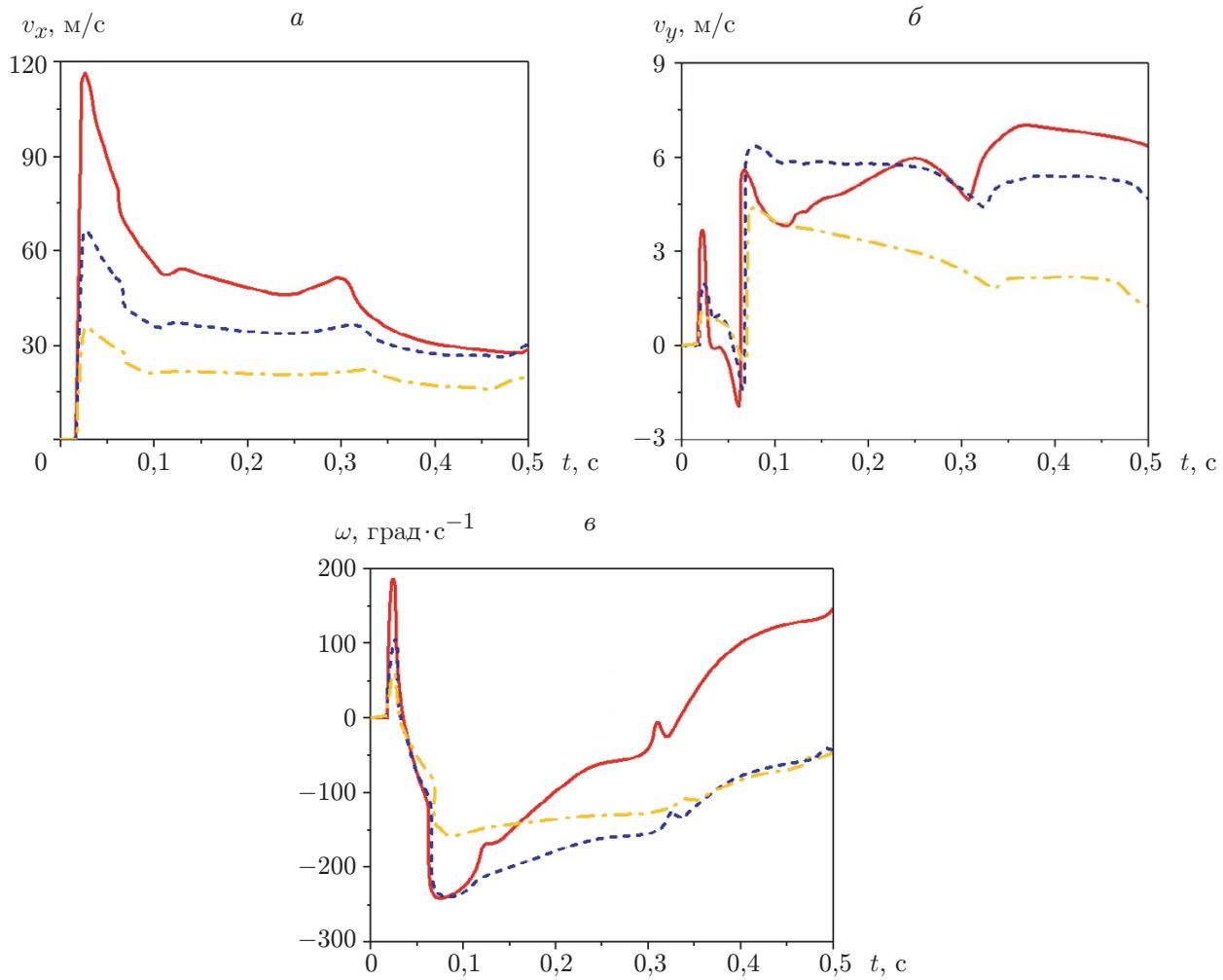


Рис. 14. Зависимости от времени компонент векторов поступательной  $v_x$  (а),  $v_y$  (б) и вращательной  $\omega$  (в) скоростей объекта при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta \tau = 40$  мс,  $h = 2,25$  м и различных значениях  $m$ :  
сплошные линии —  $m = 0,5$  т, штриховые —  $m = 1$  т, штрихпунктирные —  $m = 2$  т

При обтекании ударной волной объекта происходит его столкновение с поверхностью земли в точке  $B$ , в результате чего отрицательная скорость вращения  $\omega$  становится положительной (см. рис. 15,в).

При  $t = 0,061$  с происходит второе столкновение объекта с поверхностью земли в точке  $C$ . Заметим, что столкновение происходит раньше, а давление вблизи объекта больше, чем в случае  $m = 1$  т (см. рис. 12,г, 15,г).

При  $t = 0,17$  с на подветренной поверхности объекта массой  $m = 0,5$  т возникает зона высокого давления. Следует отметить, что в этой зоне давление больше, чем при  $m = 1$  т (см. рис. 12,д), что обусловливает большую скорость затухания  $\omega$  при  $m = 0,5$  т (см. рис. 15,д).

Наконец, при  $t = 0,31$  с происходит процесс сжатия, вызванный чрезмерным расширением ударной волны. В результате вблизи грани  $CD$  образуется зона высокого давления (см. рис. 15,е). При  $m = 0$  эта зона оказывает существенное влияние на движение объекта, в результате чего отрицательная скорость вращения  $\omega$  становится положительной.

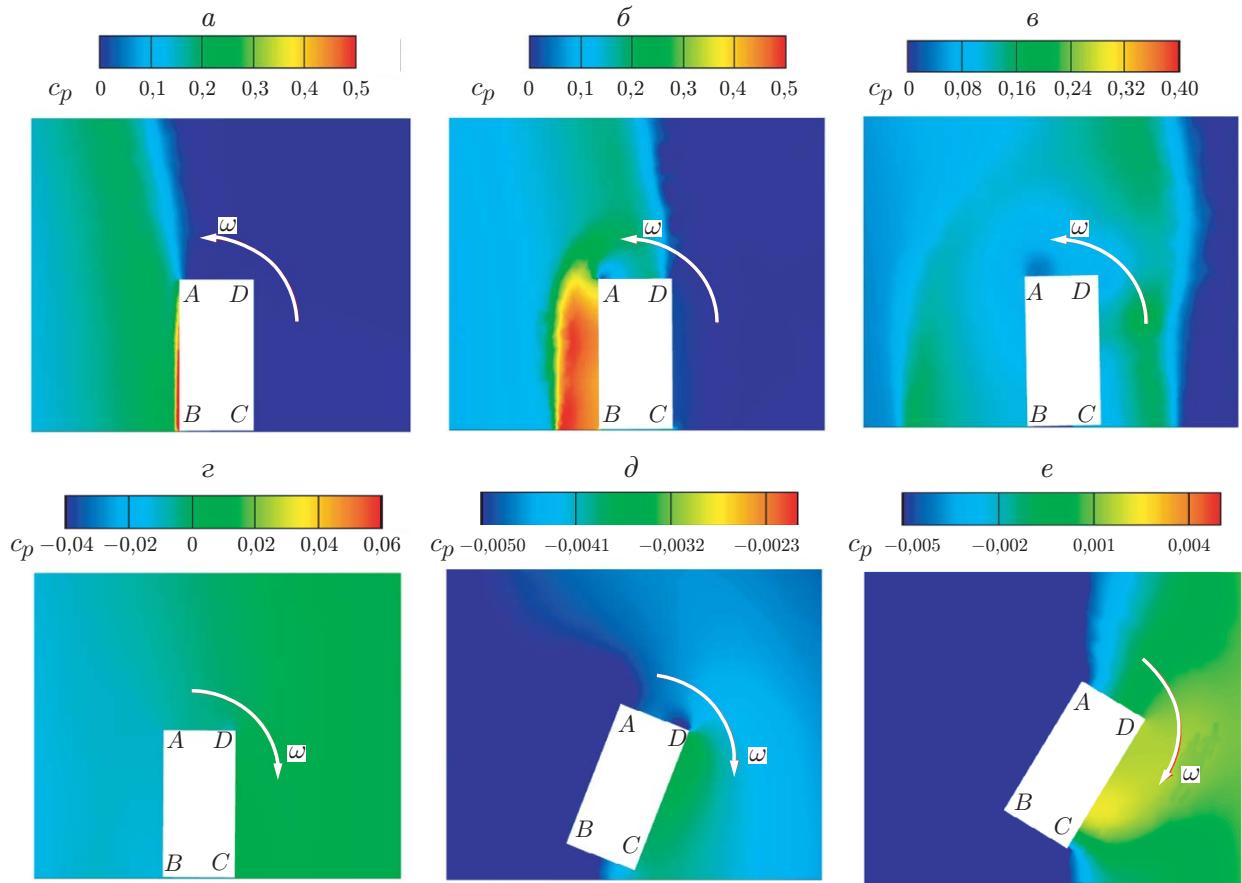


Рис. 15. Изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 0,5$  т,  $h = 2,25$  м в различные моменты времени:  
 $a$  —  $t = 0,017$  с,  $b$  —  $t = 0,020$  с,  $c$  —  $t = 0,025$  с,  $d$  —  $t = 0,061$  с,  $\delta$  —  $t = 0,170$  с,  $e$  —  $t = 0,310$  с

5.3. Влияние положения центра тяжести. На рис. 16 приведены зависимости от времени компонент вектора смещений объекта при его поступательном и вращательном движении при различных положениях центра тяжести.

Из зависимостей, приведенных на рис. 16,  $a$ , следует, что при различных значениях  $h$  характер изменения  $d_x$  со временем один и тот же. На рис. 16,  $b, b$  видно, что при  $h \geq 2,25$  м характер изменения  $d_y$  и  $\omega$  со временем один и тот же. Тем не менее при  $h = 1,5$  м скорость изменения со временем как  $d_y$ , так и  $\omega$  больше, чем при других значениях  $h$ .

На рис. 17 представлены зависимости от времени компонент вектора скорости смещений при поступательном и вращательном движении объекта при различных значениях  $h$ . Видно, что при различных значениях  $h$  характер изменения компоненты  $v_x$  один и тот же. Однако по мере увеличения  $h$  максимальное значение  $v_x$  сначала увеличивается, а затем уменьшается (см. рис. 17,  $a$ ).

Из рис. 17,  $b$  следует, что при  $h = 1,5$  м и  $h = 3$  м характер изменения  $v_y$  один и тот же:  $v_y$  сначала увеличивается до максимального значения, а затем непрерывно уменьшается. Однако при  $h = 2,25$  м повторное столкновение объекта с поверхностью земли приводит к смене отрицательного знака  $v_y$  на положительный, затем  $v_y$  непрерывно уменьшается.

Зависимость угловой скорости  $\omega$  от времени при различных значениях  $h$  имеет различный характер. При  $h = 1,5$  м отрицательная величина  $\omega$  быстро увеличивается по модулю,

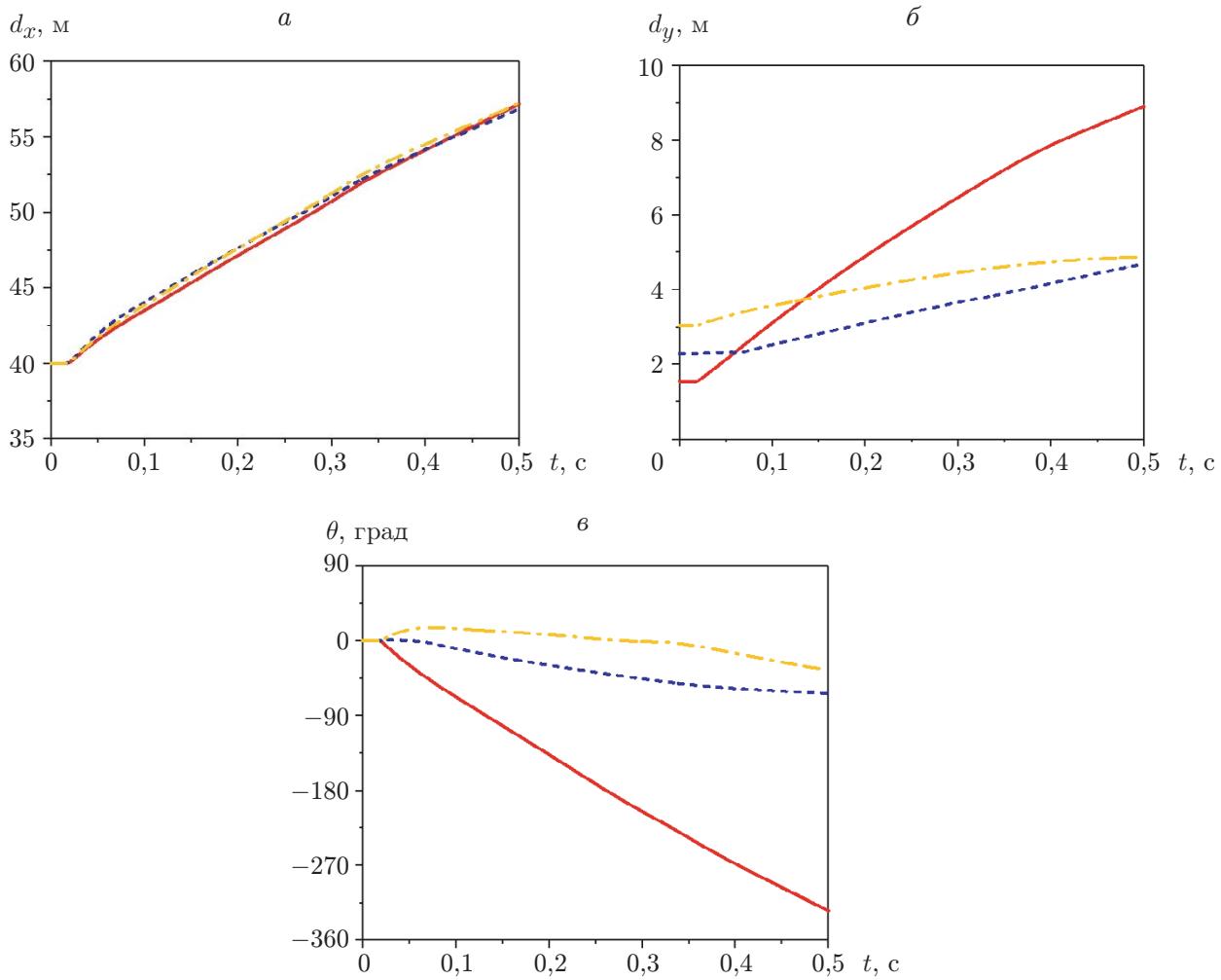


Рис. 16. Зависимости от времени компонент вектора смещений  $d_x$  (а),  $d_y$  (б) при поступательном движении и угла поворота  $\theta$  (в) при вращательном движении объекта при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 1$  т и различных значениях  $h$ : сплошные линии —  $h = 1,5$  м, штриховые —  $h = 2,25$  м, штрихпунктирные —  $h = 3$  м

а затем непрерывно уменьшается. При  $h = 2,25$  м при повторном столкновении объекта с поверхностью земли положительный знак величины  $\omega$  меняется на отрицательный, в результате чего происходит мгновенное увеличение угловой скорости до максимального значения. При  $h = 3$  м угловая скорость быстро увеличивается до максимального значения, затем непрерывно уменьшается и становится отрицательной (см. рис. 17, в).

На рис. 18 представлены изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 1$  т,  $t = 0,025$  с и различных значениях параметра  $h$ .

При  $h = 1,5$  м возникает отрицательный момент ударной силы, при этом угловая скорость  $\omega$  становится отрицательной. С увеличением угловой скорости  $\omega$  зазор между объектом и поверхностью земли увеличивается, что приводит к увеличению силы удара в направлении оси  $y$  и, следовательно, к увеличению компоненты скорости  $v_y$  (см. рис. 18, а).

При  $h = 2,25$  м отрицательный момент ударной силы уменьшается, в результате чего уменьшается угловая скорость  $\omega$ . При столкновении объекта с поверхностью земли угловая скорость  $\omega$  меняет знак. Вследствие наличия небольшого зазора между объектом и поверхностью земли сила удара в направлении оси  $y$  уменьшается, что приводит к незначительному изменению компоненты скорости  $v_y$  (см. рис. 18, б).

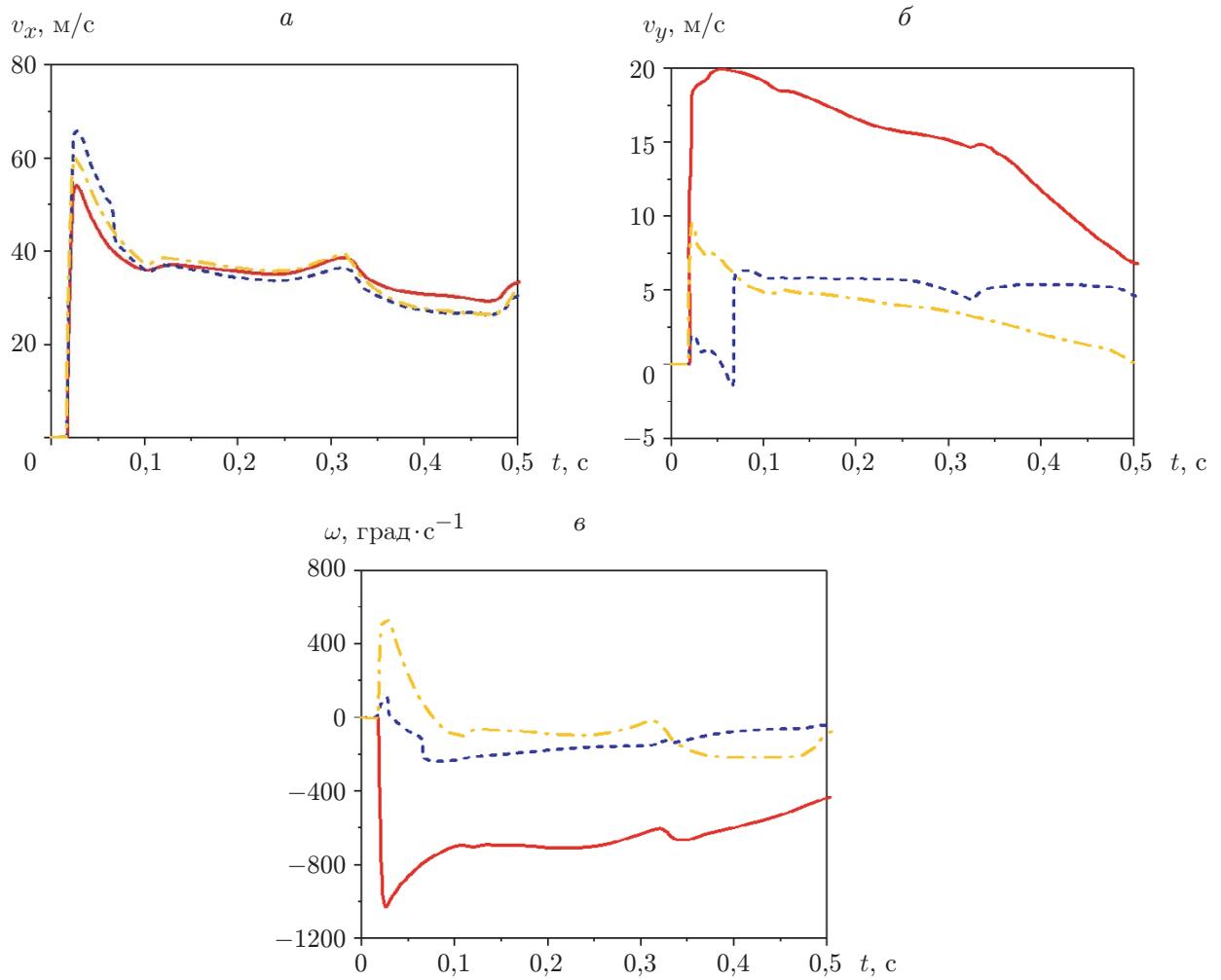


Рис. 17. Зависимости от времени компонент векторов поступательной  $v_x$  (а),  $v_y$  (б) и вращательной  $\omega$  (в) скоростей движений объекта при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 1$  т и при различных значениях  $h$ :

сплошные линии —  $h = 1,5$  м, штриховые —  $h = 2,25$  м, штрихпунктирные —  $h = 3$  м

При  $h = 3$  м возникает положительный момент ударной силы, в результате чего угловая скорость  $\omega$  становится положительной. Увеличение зазора между объектом и поверхностью земли приводит к увеличению компоненты скорости  $v_y$  (см. рис. 18, б).

При обтекании ударной волной объекта наименьший угол его поворота имеет место при  $h = 2,25$  м, в результате чего ударная сила, действующая на наветренную грань объекта, и компонента скорости  $v_x$  становятся максимальными.

Представленные на рис. 19 результаты свидетельствуют о наличии дифракции, приводящей к увеличению давления на подветренной поверхности объекта. При этом давление набегающего потока уменьшается, что приводит к уменьшению давления на наветренной поверхности объекта. Такое распределение давления оказывает влияние на характер вращения объекта, в частности, обусловливает уменьшение угловой скорости  $\omega$  при различных значениях  $h$ . Заметим, что при распределении давления в случае  $h = 3$  м угловая скорость  $\omega$  меняет знак.

5.4. *Анализ распространения ударной волны над объектами.* Для исследования распространения ударных волн и влияния движения объекта на этот процесс проводилось

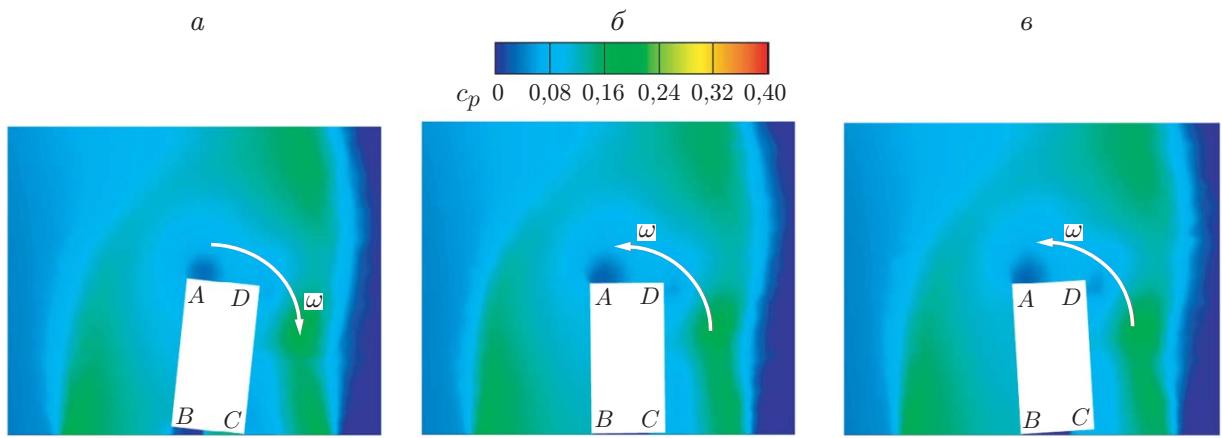


Рис. 18. Изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 1$  т,  $t = 0,025$  с и различных значениях параметра  $h$ :  
 $a$  —  $h = 1,5$  м,  $b$  —  $h = 2,25$  м,  $c$  —  $h = 3$  м

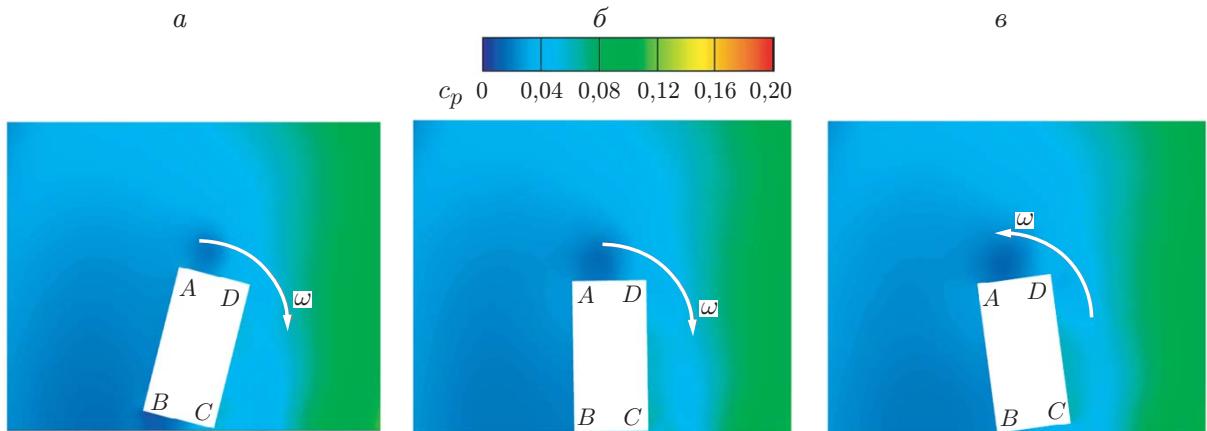


Рис. 19. Изолинии коэффициента давления  $c_p$  в сечении  $z = 0$  при  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 1$  т,  $t = 0,033$  с и различных значениях  $h$ :  
 $a$  —  $h = 1,5$  м,  $b$  —  $h = 2,25$  м,  $c$  —  $h = 3$  м

измерение давления в нескольких точках (рис. 20). Были выбраны следующие значения параметров процесса:  $\Delta p = 2$  МПа,  $\Delta\tau = 40$  мс,  $m = 1$  т,  $h = 2,25$  м.

На рис. 21 приведены зависимости давления от времени в точках мониторинга 1 и 2. В точке 1 характер зависимости давления от времени один и тот же независимо от того, неподвижен объект или находится в движении. В тот момент, когда ударная волна достигает точки 1, происходит мгновенное повышение давления, за которым следует максимум, вызванный отражением ударной волны. Затем давление в точке 1 постепенно уменьшается и вследствие расширения газа при его движении по инерции становится меньше атмосферного (см. рис. 21, а).

В точке мониторинга 2 характер зависимости давления от времени также не меняется независимо от того, неподвижен объект или находится в движении. Однако, поскольку точка 2 находится на достаточно большом расстоянии и от источника взрыва, и от объекта, первый максимум давления больше второго (см. рис. 21, б).

На рис. 22 приведены зависимости давления от времени в точках мониторинга 3 и 4. Независимо от того, движется объект или неподвижен, характер зависимости давления от

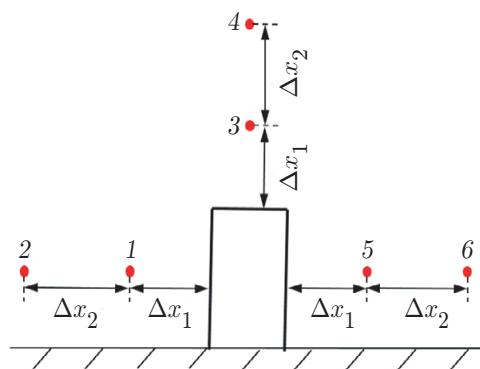


Рис. 20. Расположение точек (1–6), в которых проводилось измерение давления

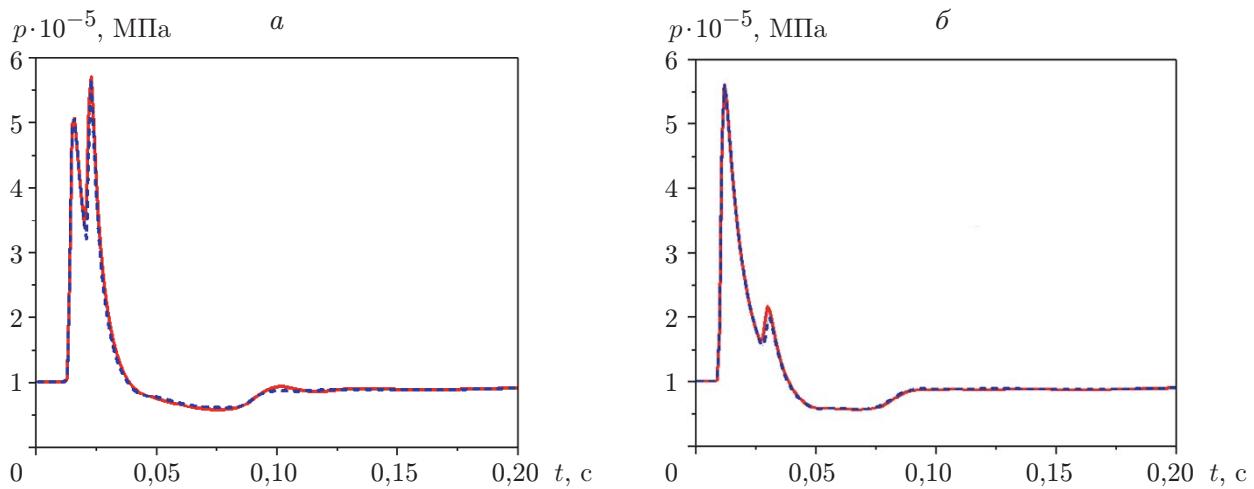


Рис. 21. Зависимости давления от времени в точках мониторинга 1 (а) и 2 (б): сплошные линии — неподвижный объект, штриховые — движущийся объект

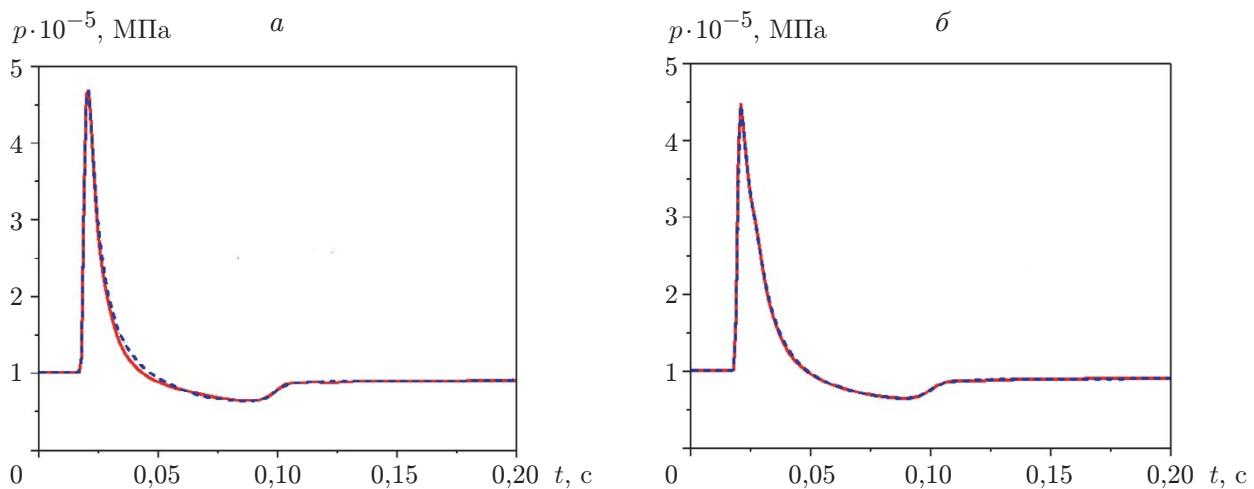


Рис. 22. Зависимости давлений от времени в точках мониторинга 3 (а) и 4 (б): сплошные линии — неподвижный объект, штриховые — движущийся объект

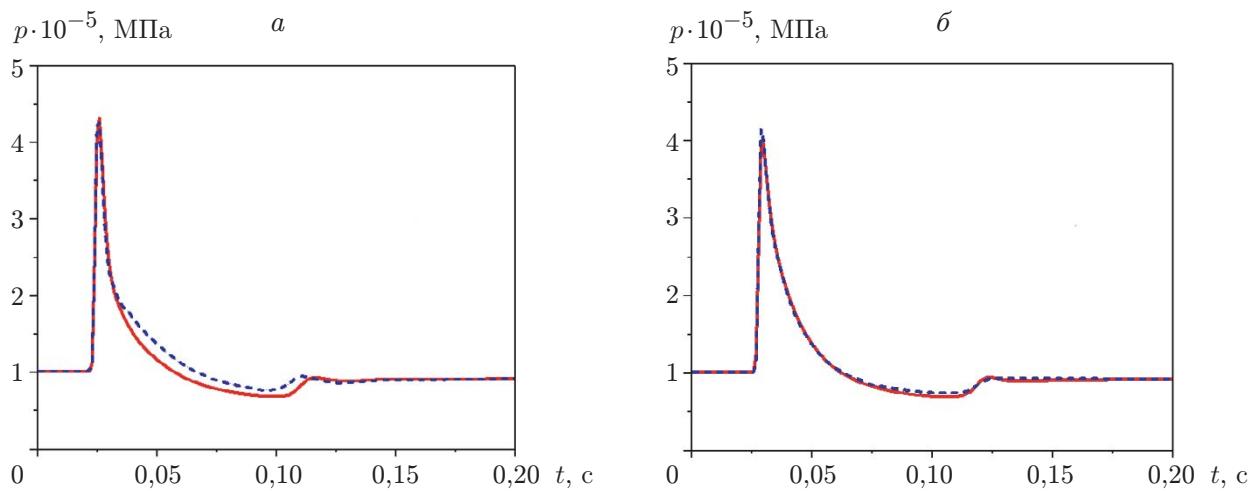


Рис. 23. Зависимости давления от времени в точках мониторинга 5 (а) и 6 (б): сплошные линии — неподвижный объект, штриховые — движущийся объект

времени в точках 3 и 4 практически один и тот же. Однако, поскольку точка 4 расположена на большем расстоянии от объекта, максимальное значение давления в этой точке меньше.

На рис. 23 представлены зависимости давления от времени в точках мониторинга 5 и 6. Независимо от того, неподвижен объект или находится в движении, зависимости давления от времени в точках 5 и 6 практически одинаковы. Однако, в случае если объект находится в движении, наблюдается существенное уменьшение скорости понижения давления, особенно в точке 5. Это свидетельствует о том, что движение объекта влияет на скорость уменьшения давления вблизи подветренной грани. Однако влияние движения объекта на изменение давления в других областях незначительно.

**6. Выводы.** С использованием законов аэродинамики и динамики твердого тела разработан метод численного моделирования движения объектов на поверхности земли под действием ударных волн. На основе метода, предложенного в данной работе, численно исследовано движение объекта на поверхности земли под действием ударных волн.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ofengeim D. K., Drikakis D.** Simulation of blast wave propagation over a cylinder // Shock Waves. 1997. V. 7, N 5. P. 305–317.
2. **Stoner R. G., Bleakney W.** The attenuation of spherical shock waves in air // J. Appl. Phys. 1948. V. 19, N 7. P. 670–678.
3. **Petel O. E., Jetté F. X., Goroshin S., et al.** Blast wave attenuation through a composite of varying layer distribution // Shock Waves. 2011. V. 21, N 3. P. 215–224.
4. **Sochet I., Eveillard S., Vinçont J. Y., et al.** Influence of the geometry of protective barriers on the propagation of shock waves // Shock Waves. 2017. V. 27, N 2. P. 209–219.
5. **Fouchier C., Laboureur D., Youinou L., et al.** Experimental investigation of blast wave propagation in an urban environment // J. Loss Prevent. Process Industries. 2017. V. 49. P. 248–265.
6. **Hao Y. F., Hao H., Shi Y. C., et al.** Field testing of fence type blast wall for blast load mitigation // Intern. J. Structur. Stability. Dynamics. 2017. V. 17, N 8. 1750099.

7. Sugiyama Y., Izumo M., Ando H., Matsuo A. Two-dimensional explosion experiments examining the interaction between a blast wave and a sand hill // Shock Waves. 2018. V. 28, N 3. P. 627–630.
8. Choi Y., Lee J., Yoo Y. H., Yun K. J. A study on the behavior of blast proof door under blast load // Intern. J. Precis. Engng Manufactur. 2016. V. 17, N 1. P. 119–124.
9. Pelfrene J., Kuntsche J., Van Dam S., et al. Critical assessment of the post-breakage performance of blast loaded laminated glazing: experiments and simulations // Intern. J. Impact Engng. 2016. V. 88. P. 61–71.
10. Li Z. X., Zhang X. J., Shi Y. C., Xu Q. F. Experimental studies on mitigating local damage and fragments of unreinforced masonry wall under close-in explosions // J. Perform. Construct. Facil. 2019. V. 33, N 2. 04019009.
11. Van Netten A. A., Dewey J. M. A study of blast wave loading on cantilevers // Shock Waves. 1997. V. 7, N 3. P. 175–190.
12. Sun J. S., Jia Y. S., Yao Y. K., Xie X. Q. Experimental investigation of stress transients of blasted RC columns in the blasting demolition of buildings // Engng Structures. 2020. V. 210. 110417.
13. Gajewski T., Sielicki P. W. Experimental study of blast loading behind a building corner // Shock Waves. 2020. V. 30, N 4. P. 385–394.
14. Le J. Numerical simulation of shock (blast) wave interaction with bodies // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 1999. V. 4, N 1. P. 1–7.
15. Tsryulnikov I. S., Poplavskaya T. V. Interaction of long-wave disturbances of the external flow with a shock wave on a wedge // Thermophys. Aeromech. 2021. V. 28, N 1. P. 29–39.
16. Dey S., Murugan T., Chatterjee D. Numerical visualization of blast wave interacting with objects // J. Appl. Fluid Mech. 2018. V. 11, N 5. P. 1201–1206.
17. Roh T., Lee Y., Lee W., Yoh J. J. Understanding the effects of blast loads on open spaces and enclosed structures in simulations and experiments // Shock Waves. 2020. V. 30, N 7. P. 843–854.
18. Pennetier O., William-Louis M., Langlet A. Numerical and reduced-scale experimental investigation of blast wave shape in underground transportation infrastructure // Process Safety Environment Protect. 2015. V. 94. P. 96–104.
19. Wang X., Remotigue M., Arnoldus Q., et al. High-fidelity simulations of blast loadings in urban environments using an overset meshing strategy // Shock Waves. 2017. V. 27, N 3, P. 409–422.
20. Rose T. A., Smith P. D., May J. H. The interaction of oblique blast waves with buildings // Shock Waves. 2006. V. 16, N 1. P. 35–44.
21. Jin M., Hao Y. F., Hao H. Numerical study of fence type blast walls for blast load mitigation // Intern. J. Impact Engng. 2019. V. 131. P. 238–255.
22. Trunin I. R., Tereshkina I. A., Podurets A. M., et al. Spall fracture of a VNZh-90 alloy under a shock wave load // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, N 5. P. 949–955.
23. Drennov O. B. Effect of an oblique shock wave on the interface between metals // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56, N 3. P. 377–380.
24. Savenkov G. G., Meshcheryakov Yu. I., Barakhtin B. K., Lebedeva N. V. Deformation and fracture mechanisms and structural changes in coarse-grained copper under shock-wave loading // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. V. 55, N 5. P. 896–903.
25. Gertsik S. M., Novozhilov Y. V., Mikhaluk D. S. Numerical simulation of the dynamics of a reinforced concrete slab under an air shock wave // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, N 7. P. 1176–1189.

26. **Pandya S. A., Venkateswaran S., Pulliam T. H.** Implementation of preconditioned dual-time procedures in OVERFLOW // Proc. of the 41st AIAA aerospace sciences meeting and exhibit, Reno (USA), Jan. 6–9, 2003. Washington: AIAA, 2003. DOI: 10.2514/6.2003-72.
27. **Vatsa V., Turkel E.** Choice of variables and preconditioning for time dependent problems // Proc. of the 16th AIAA computational fluid dynamics conf., Orlando (USA), June 23–26, 2003. S. l.: AIAA, 2003. DOI: 10.2514/6.2003-3692.
28. **Snyder D., Koutsavdis E., Anttonen J.** Transonic store separation using unstructured CFD with dynamic meshing // Proc. of the 33rd AIAA fluid dynamics conference and exhibit, Orlando (USA), June 23–26, 2003. S. l.: AIAA, 2003. DOI: 10.2514/6.2003-3919.
29. **Yigit A. S., Ulsoy A. G., Scott R. A.** Spring-dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact // J. Sound Vibrat. 1990. V. 142, N 3. P. 515–525.
30. **Lankarani H. M., Nikravesh P. E.** Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems // Nonlinear Dynamics. 1994. V. 5. P. 193–207.
31. **Baker W. E.** Explosions in air. Texas: Univ. Texas Press, 1973.
32. **Courant R.** Supersonic flow and shock waves / R. Courant, K. O. Friedrichs. N. Y.: Springer, 2012.

*Поступила в редакцию 22/VI 2023 г.,  
после доработки — 11/X 2023 г.  
Принята к публикации 27/XI 2023 г.*

---