УДК 532.546

К ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОРИСТОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ СРЕДЕ

В. Ш. Шагапов[*,**], З. М. Нагаева[***]

[*] Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111 Казань, Россия

[**] Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа, Россия

[***] Уфимский государственный нефтяной технический университет, 450062 Уфа, Россия
E-mails: Shagapov@rambler.ru, Nagaeva_Zilya@mail.ru

Изучены фильтрационные волны давления в трещинах, находящихся в пористой проницаемой среде. Проанализировано влияние пористости и проницаемости пласта и трещины, ширины трещины, а также реологических свойств насыщающего флюида на динамику возмущений в трещине. Показано, что в пористом проницаемом пласте трещина является волновым каналом, по которому распространяются низкочастотные колебания давления в скважинах. Получены точные решения, описывающие эволюцию полей давления в трещине при мгновенном изменении давления в скважине на постоянную величину. На основе этих решений определены соответствующие зависимости расхода флюида от времени и давления на границах.

Ключевые слова: гидроразрыв пласта, трещина, волны давления, интегродифференциальное уравнение, дисперсионный анализ.

DOI: 10.15372/PMTF20170512

Введение. Одним из основных способов интенсификации добычи нефти из низкопроницаемых пластов является гидроразрыв пластов (ГРП). В работе [1] подробно описаны теоретические основы технологий осуществления ГРП, а также методика инженерных расчетов продуктивных пластов после ГРП. Теория гидроразрыва пластов, основанная на совместном решении уравнений гидродинамики и теории упругости, предложена в работе [2] и развита в [3–8]. Известно, что контроль характеристик гидроразрыва, положения трещин в пласте можно осуществлять с использованием акустического зондирования [9], гидропрослушивания и гидродинамических испытаний скважин [10]. Динамика фильтрационных волн в трещинах и трещиновато-пористых средах исследовалась в [11, 12]. В [13] изучалось распространение волн в трещиноватом слое, заполненном жидкостью, при отсутствии фильтрационных потоков в окружающие упругие горные породы.

В данной работе рассмотрены некоторые модельные задачи о распространении возмущений давления по трещинам с учетом фильтрации в окружающее пористое пространство, используемые в технологиях гидропрослушивания.

1. Основные уравнения. Рассмотрим вертикальную трещину (рис. 1) в однородном пласте, образовавшуюся в результате гидроразрыва пласта и представляющую собой ка-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-20022).

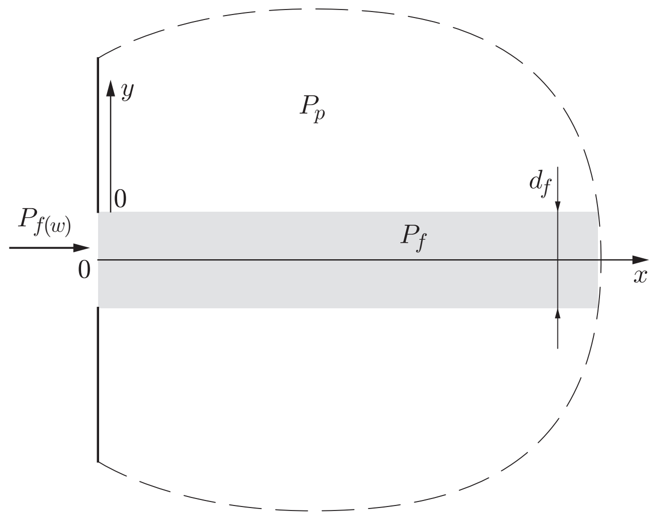

Рис. 1. Схема трещины (заштрихованная область) в пласте

нал прямоугольного сечения, в котором находится пористая проницаемая среда. (На рис. 1 P_f, P_p, $P_{f(w)}$ — давление в трещине ($0 < x < \infty$), пласте ($0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$) и призабойной зоне ($x = 0$).) Высота трещины вдоль оси скважины (перпендикулярно плоскости рисунка) и ширина трещины соответственно равны h_f и d_f, причем $h_f \gg d_f$. Влиянием силы тяжести будем пренебрегать. Скелеты пористой среды в пласте и трещине будем считать несжимаемыми. Запишем уравнение сохранения массы для флюида, находящегося в полубесконечной трещине, для единицы высоты трещины:

$$d_f\Big(m_f\,\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\frac{\partial\,(\rho_f v_f)}{\partial x}\Big)=(-2\rho_p v_p)\big|_{y=0}\qquad(0<x<\infty). \tag{1.1}$$

Здесь m_i, ρ_i, v_i — пористость, плотность и скорость фильтрации флюида; нижний индекс принимает значения f и p, соответствующие трещине и окружающей ее пористой среде. Слагаемое в правой части (1.1) задает интенсивность притока флюида через боковые стенки трещины, отнесенную к единице ее площади. Поэтому для определения этого слагаемого необходимо учитывать процесс фильтрации в пористой среде вне трещины. Поскольку вблизи стенок трещин для градиентов давления в пласте выполняется условие $|\partial P_p/\partial x| \ll |\partial P_p/\partial y|$ вследствие существенного различия проницаемостей в трещине и пласте ($k'_f \gg k'_p$), будем полагать, что фильтрационное течение в пласте направлено перпендикулярно стенкам трещины. С учетом этого допущения запишем уравнение сохранения массы

$$m_p\,\frac{\partial\rho_p}{\partial t}+\frac{\partial\,(\rho_p v_p)}{\partial y}=0\qquad(0<x<\infty,\quad 0<y<\infty). \tag{1.2}$$

Для описания процесса фильтрации в трещине и окружающем ее пористом пространстве примем закон Дарси

$$v_f=-\frac{k'_f}{\mu}\,\frac{\partial P_f}{\partial x}\quad(0<x<\infty),\qquad v_p=-\frac{k'_p}{\mu}\,\frac{\partial P_p}{\partial y}\quad(0<x<\infty,\ 0<y<\infty), \tag{1.3}$$

где k'_i ($i = f, p$) — коэффициент проницаемости; μ — динамическая вязкость жидкости (флюида).

Принятая модель не учитывает многомерные эффекты фильтрации вблизи скважины, так как длина этого участка канала существенно меньше общей длины канала. Диапазоны значений переменных x, y $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ соответствуют начальной стадии процесса, когда возмущение давления от скважины не достигло правой границы трещины.

Сжимаемость флюида будем учитывать в акустическом приближении

$$P_i - P_0 = C^2(\rho_i - \rho_0) \qquad (i = f, p), \tag{1.4}$$

где C — скорость звука для флюида; нижний индекс "0" у давления и плотности соответствует их невозмущенным значениям. Тогда уравнения (1.1), (1.2) с учетом (1.3), (1.4) можно привести к виду

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\varkappa_p}{d_f}\left(\frac{\partial P_p}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} \qquad (0 < x < \infty); \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \qquad (0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty), \tag{1.6}$$

где

$$\varkappa_i = \frac{k_i' \rho_0 C^2}{m_i \mu} \qquad (i = f, p).$$

Заметим, что P_f является функцией переменных t, x, а P_p — функцией переменных t, x, y. Система уравнений (1.5), (1.6) может быть сведена к одному интегродифференциальному уравнению для P_f. Давление P_p на стенке равно P_f, а вдали от трещины в пористой среде давление однородное и равно P_0:

$$P_p = P_f \quad (y = 0), \qquad P_p = P_0 \quad (y \to \infty).$$

Согласно принципу Дюамеля [14] решение уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$P_p = P_0 \quad (t \leqslant t_0,\ 0 < y < \infty), \qquad P_p = P_f \quad (t > t_0,\ y = 0),$$

может быть записано в виде

$$P_p - P_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial u(y, t-\tau)}{\partial t}\,(P_f(\tau, x) - P_0)\,d\tau, \quad u(y, t-\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{y/(2\sqrt{\varkappa_p (t-\tau)}\,)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2}\,d\alpha. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в уравнение (1.5) и полагая $t_0 = -\infty$, после ряда преобразований получаем следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} - 2\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\varkappa_p}{d_f} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial\,(P_f(\tau, x) - P_0)}{\partial \tau}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\pi \varkappa_p (t-\tau)}}. \tag{1.8}$$

2. Дисперсионный анализ. Уравнение (1.8) является линейно-однородным для функции $\Delta P_f = P_f - P_0$. Будем искать его решение в виде затухающей бегущей волны:

$$\Delta P_f = A_f^{(p)}\,\mathrm{e}^{-i(\omega t - K_f x)}\,. \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.8), из условия существования нетривиального решения ($A_f^{(p)} \neq 0$) получаем дисперсионное уравнение

$$K_f^2 = i\Big(\frac{\omega}{\varkappa_f} + 2\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\sqrt{\varkappa_p}}{\varkappa_f}\,\frac{\sqrt{i\omega}}{d_f}\Big), \tag{2.2}$$

где $\omega > 0$ — круговая частота колебаний; $K_f = k_f + i\delta_f$ — комплексное волновое число, причем действительная часть волнового числа k_f определяет фазовую скорость

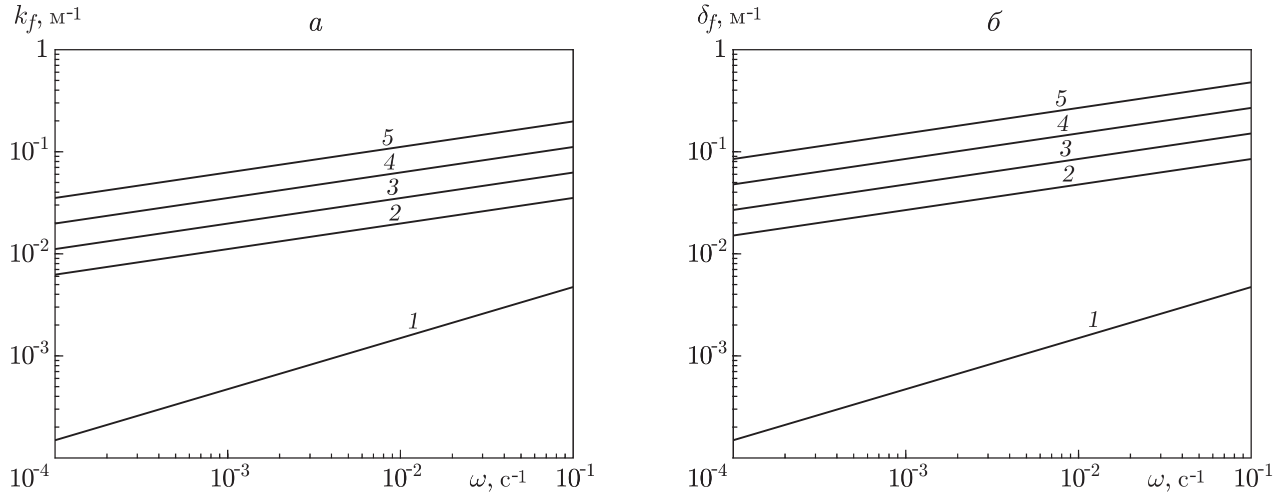

Рис. 2. Зависимости волнового числа (*а*) и коэффициента затухания (*б*) от частоты при различных значениях коэффициента проницаемости пористой среды k'_p:
1 — $k'_p = 0$, *2* — $k'_p = 10^{-15}$ м^2, *3* — $k'_p = 10^{-14}$ м^2, *4* — $k'_p = 10^{-13}$ м^2, *5* — $k'_p = 10^{-12}$ м^2

$C_{(Ph)} = \omega/k_f$, а мнимая часть δ_f — коэффициент затухания, характеризующий глубину проникания гармонических волн.

На рис. 2 представлены зависимости волнового числа k_f и коэффициента затухания δ_f от частоты ω при $m_p = m_f = 10^{-1}$, $k'_f = 10^{-10}$ м^2, $d_f = 5 \cdot 10^{-3}$ м. В качестве флюида рассматривалась вода ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $C = 1500$ м/с, $\mu = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с).

Определим характерную частоту ω_*, при которой модули первого и второго слагаемых в правой части (2.2) имеют один порядок. Из этого условия с учетом выражения для $\varkappa_p$ в (1.6) получаем

$$\omega_* = 4\,\frac{m_p}{m_f^2}\,\frac{k'_p\rho_0 C^2}{\mu d_f^2}.$$

Из анализа дисперсионного уравнения (2.2) следует, что при частотах $\sqrt{\omega} \ll \sqrt{\omega_*}$ первое слагаемое в правой части (2.2), зависящее от сжимаемости флюида в трещине, по модулю значительно меньше второго слагаемого. В важных для практики задачах наибольший интерес представляет низкочастотный диапазон ($\sqrt{\omega} \ll \sqrt{\omega_*}$) дисперсионного уравнения. Это условие можно записать с использованием критического времени. Введем масштаб времени волнового процесса $\tilde{t} = \omega^{-1}$ и критическое время $t_* = \omega_*^{-1}$. Тогда из полученного выше условия для частот следует $\tilde{t} \gg t_*$.

Как отмечено выше, найденное условие для характерных частот и времен выполняется в большинстве случаев, представляющих практический интерес. Поэтому далее вместо (2.2) будем использовать упрощенное дисперсионное выражение

$$K^2 = 2\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\sqrt{\varkappa_p}}{\varkappa_f}\,\frac{\sqrt{-i\omega}}{d_f}. \tag{2.3}$$

Используя представление $-i = \exp(3\pi i/2)$ в соответствии с формулой Эйлера, из (2.3) получаем соотношения

$$k_f = \sqrt{2\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\sqrt{\varkappa_p\omega}}{\varkappa_f d_f}}\cos\Big(\frac{3\pi}{8}\Big), \qquad \delta_f = \sqrt{2\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\sqrt{\varkappa_p\omega}}{\varkappa_f d_f}}\sin\Big(\frac{3\pi}{8}\Big). \tag{2.4}$$

Отсюда для декремента затухания $\Delta = 2\pi\delta/k$ следует $\Delta = 2\pi \operatorname{tg}(3\pi/8) \approx 15{,}2$. Таким образом, на расстоянии порядка длины волны рассматриваемые фильтрационные волны давления практически полностью затухают (их амплитуда уменьшается в $\mathrm{e}^{15} \approx 3{,}16 \times 10^5$ раз).

3. Распространение гармонических колебаний давления от скважины по трещине. Пусть в скважине, от которой распространяется вертикальная трещина, давление флюида меняется по закону

$$P_{f(w)} = P_0 + A_{(w)}^{(p)} \cos\omega t. \tag{3.1}$$

Полагаем, что источник гармонических волн функционирует в течение достаточно большого промежутка времени, поэтому в трещине и пористой среде вблизи нее устанавливаются периодические колебания. Тогда решение, описывающее распространение давления в трещине и удовлетворяющее граничному условию (3.1) при $x = 0$, можно записать в виде

$$P_f = P_0 + A_{(w)}^{(p)}\, \mathrm{e}^{-\delta_f x} \cos(\omega t - k_f x) \tag{3.2}$$

(k_f, δ_f определяются на основе формул (2.4)). Согласно решению (3.2) давление в каждой точке трещины с координатой x совершает синусоидальные колебания с круговой частотой ω и амплитудой

$$A_f^{(p)} = A_{(w)}^{(p)}\, \mathrm{e}^{-\delta_f x}\,.$$

При этом сдвиг по фазе относительно колебаний давления в скважине равен

$$\Delta\varphi_f^{(p)} = k_f x.$$

На рис. 3 представлены распределения амплитуды

$$\Delta_f = A_f^{(p)}/A_{(w)}^{(p)} = \mathrm{e}^{-\delta_f x}\,.$$

Для параметров пласта, трещины и флюида приняты следующие значения: $d_f = 10^{-2}$ м, $k_f' = 10^{-10}$ м^2, $k_p' = 10^{-14}$ м^2, $m_f = 10^{-1}$, $m_p = 10^{-1}$, $\mu = 10^{-3}$ Па$\cdot$с. Далее во всех рассматриваемых случаях, за исключением случаев, оговоренных особо, параметры пласта, трещины и флюида имеют те же значения, что и для рис. 2.

На рис. 4 показана эволюция поля давлений в трещине, описываемая решением (3.2) при $\omega = 10^{-3}$ с$^{-1}$.

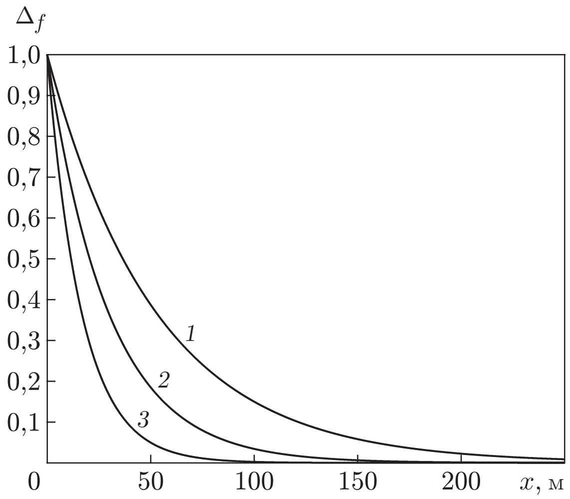

Рис. 3. Распределение амплитуды колебаний давления вдоль трещины при различных значениях частоты: *1* — $\omega = 10^{-4}$ с$^{-1}$, *2* — $\omega = 10^{-3}$ с$^{-1}$, *3* — $\omega = 10^{-2}$ с$^{-1}$

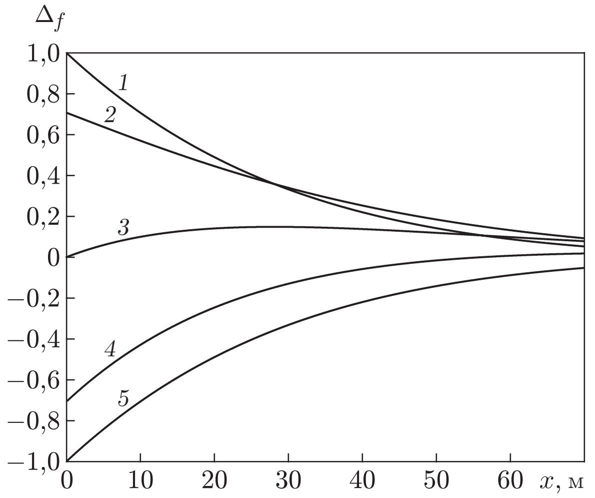

Рис. 4

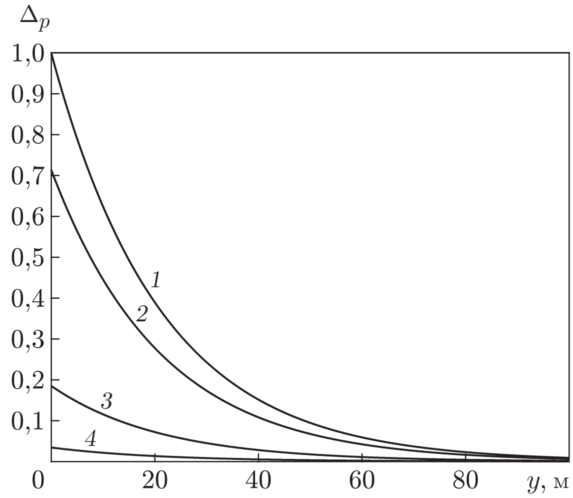

Рис. 5

Рис. 4. Эволюция безразмерных полей возмущения давления в трещине в течение полупериода колебаний давления в скважине, описываемая формулой (3.2): *1* — $\omega t = 0$, *2* — $\omega t = \pi/4$, *3* — $\omega t = \pi/2$, *4* — $\omega t = 3\pi/4$, *5* — $\omega t = \pi$

Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний давления от расстояния до трещины при различных значениях координаты x: *1* — $x = 0$, *2* — $x = 10$ м, *3* — $x = 50$ м, *4* — $x = 100$ м

Используя решение (3.2), можно получить решение, описывающее поле давления в пористой среде вблизи трещины:

$$P_p = P_0 + A^{(p)}_{(w)}\,\mathrm{e}^{-\delta_f x - \delta_p y} \cos(\omega t - k_f x - k_p y), \qquad k_p = \delta_p = \sqrt{\omega/(2\varkappa_p)}.$$

Следовательно, в каждой точке пористой среды ($x > 0$, $y > 0$) давление флюида совершает периодические колебания с амплитудой

$$A^{(p)}_p = A^{(p)}_{(w)}\,\mathrm{e}^{-\delta_f x - \delta_p y}$$

и со сдвигом по фазе

$$\Delta\varphi^{(p)}_p = k_f x + k_p y.$$

На рис. 5 показано распределение амплитуд давлений $\Delta_p = A^{(p)}_p / A^{(p)}_{(w)} = \mathrm{e}^{-\delta_f x - \delta_p y}$ по координате y при $\omega = 10^{-3}$ с$^{-1}$.

4. Распространение цилиндрических волн давления. Рассмотрим также гармонические волны, распространяющиеся от скважины в однородной пористой проницаемой среде. Основное уравнение фильтрации для осесимметричного течения записывается в виде

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r \frac{\partial P_p}{\partial r}\Big) \qquad (a < r < \infty), \tag{4.1}$$

где $r = a$ — радиус скважины.

Пусть давление в скважине меняется по синусоидальному закону, аналогичному (3.1):

$$P_p = P_0 + A^{(p)}_{(w)} \cos\omega t \qquad (r = a). \tag{4.2}$$

Давление на бесконечности равно невозмущенному значению:

$$P_p = P_0 \qquad (r \to \infty). \tag{4.3}$$

Решение уравнения (4.1) будем искать в виде

$$P_p = P_0 + \mathrm{Re}\,(A_p^{(p)}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}). \tag{4.4}$$

Подставляя выражение (4.4) в (4.1), получаем уравнение для $A_p^{(p)}$

$$-\frac{i\omega}{\varkappa_p}\,A_p^{(p)} = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{d}{dr}\,A_p^{(p)}\Big),$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям (4.2), (4.3), имеет вид

$$A_p^{(p)} = A_{(w)}^{(p)}\,\frac{K_0(r\sqrt{-i\omega/\varkappa_p}\,)}{K_0(a\sqrt{-i\omega/\varkappa_p}\,)}, \qquad K_0(z) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-z\,\mathrm{ch}\,\zeta}\,d\zeta \tag{4.5}$$

($K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка) [14].

Подставляя (4.5) в (4.4), получаем решение, описывающее распространение давления вокруг скважины:

$$\Delta P_p = A_{(w)}^{(p)}\,\frac{N_0(r\sqrt{\omega/\varkappa_p}\,)}{N_0(a\sqrt{\omega/\varkappa_p}\,)}\cos\,(\omega t - \Delta\varphi_p).$$

Здесь

$$K_0(z\sqrt{-i}\,) = \mathrm{ker}_0\,(z) - i\,\mathrm{kei}_0\,(z) = N_0(z)\,\mathrm{e}^{-i\varphi(z)},$$

$$N_0(z) = \sqrt{\mathrm{ker}_0^2\,(z) + \mathrm{kei}_0^2\,(z)}\,, \qquad \varphi(z) = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{ker}_0\,(z)/\,\mathrm{kei}_0\,(z)),$$

$$\Delta\varphi = \varphi(r\sqrt{\omega/\varkappa_p}\,) - \varphi(a\sqrt{\omega/\varkappa_p}\,).$$

На рис. 6 представлено распределение безразмерной амплитуды колебаний давления в пористой среде $\Delta_p = \Delta P_p/A_{(w)}^{(p)}$. Радиус скважины принят равным $a = 10^{-1}$ м. Из рис. 3, 5, 6 следует, что характерное расстояние, на котором затухают гармонические возмущения давления, распространяющиеся вдоль трещины, а также в пласте вблизи нее, может

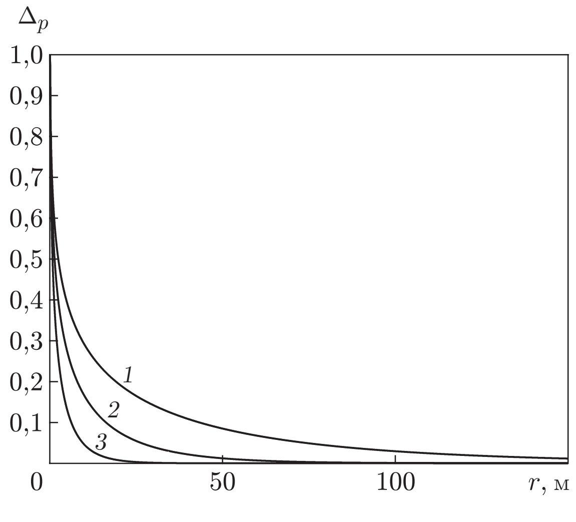

Рис. 6. Распределение амплитуды давления вокруг скважины в отсутствие радиальных трещин при различных значениях круговой частоты: *1* — $\omega = 10^{-4}$ с$^{-1}$, *2* — $\omega = 10^{-3}$ с$^{-1}$, *3* — $\omega = 10^{-2}$ с$^{-1}$

значительно превышать характерное расстояние при отсутствии радиальной трещины, особенно в случае слабопроницаемых пластов ($k'_p \leqslant 10^{-13}$ м^2). В частности, на рис. 3, б видно, что при отсутствии трещины амплитуда волны с круговой частотой $\omega = 10^{-3}$ практически полностью затухает на расстоянии $r \approx 30$ м, в то время как при наличии трещины полное затухание происходит при $x \approx 100$ м. Следовательно, радиальная трещина, распространяющаяся от скважины, является волновым каналом для передачи низкочастотных возмущений давления в скважине на значительные расстояния (порядка 10^2 м) [11].

5. Фильтрация флюида к скважине через трещину при мгновенном уменьшении давления. На основе уравнения (1.8) (полагая левую часть (1.8) равной нулю) рассмотрим процесс фильтрации флюида к скважине (или от скважины). Пусть в исходном состоянии ($t \leqslant 0$) флюид в трещине и окружающей ее пористой среде находится в состоянии покоя ($v_f = v_P = 0,\ P = P_0$), в момент времени $t = 0$ давление в скважине изменяется на величину $\Delta P_{f(w)}$ и далее поддерживается постоянным: $\Delta P_{f(w)} = \mathrm{const}$ ($\Delta P_{f(w)} = P_{f(w)} - P_0$). Если $\Delta P_{f(w)} > 0$, то давление увеличивается (происходит закачивание флюида в пласт через трещину), если $\Delta P_{f(w)} < 0$, то давление уменьшается (откачивание жидкости). С учетом принятых допущений уравнение (1.8) и система начальных и граничных условий записываются в виде

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \frac{2}{d_f}\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\varkappa_p}{\varkappa_f}\int\limits_0^t \frac{\partial \Delta P_f}{\partial \tau}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\varkappa_p(t-\tau)}}, \quad \Delta P_f = P_f - P_0 \quad (t > 0,\ x > 0); \tag{5.1}$$

$$\Delta P_f = 0 \quad (t \leqslant 0,\ x > 0), \qquad \Delta P_f = \Delta P_{f(w)} \quad (t > 0,\ x = 0). \tag{5.2}$$

Далее будем использовать преобразование Лапласа. Для этого введем обозначение

$$\Delta\bar P_f = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\Delta P_f\,dt.$$

Тогда из уравнения (5.1) с учетом (5.2) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Delta\bar P_f^2}{dx^2} = \frac{2}{d_f}\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\sqrt{\varkappa_p}}{\varkappa_f}\,\sqrt{\lambda}\,\Delta\bar P_f. \tag{5.3}$$

Из граничного условия (5.2) следует

$$\Delta\bar P_f = \lambda^{-1}\,\Delta P_{f(w)} \qquad (x = 0). \tag{5.4}$$

Из уравнения (5.3) с учетом (5.4), а также с учетом ограниченности ΔP_f на бесконечности ($x \to \infty$) получаем

$$\Delta\bar P_f = \frac{\Delta P_{f(w)}}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{A\lambda^{1/2}}\,x} \qquad \Big(A = \frac{2}{d_f}\,\frac{m_p}{m_f}\,\frac{\sqrt{\varkappa_p}}{\varkappa_f}\Big).$$

Тогда, используя формулу обращения Меллина, решение можно записать в виде

$$\Delta P_f = \frac{\Delta P_{f(w)}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t-\sqrt{A\lambda^{1/2}}\,x}}{\lambda}\,d\lambda. \tag{5.5}$$

Здесь подынтегральная функция является аналитической на всей плоскости комплексной переменной λ, за исключением начала координат, поэтому она является однозначной и

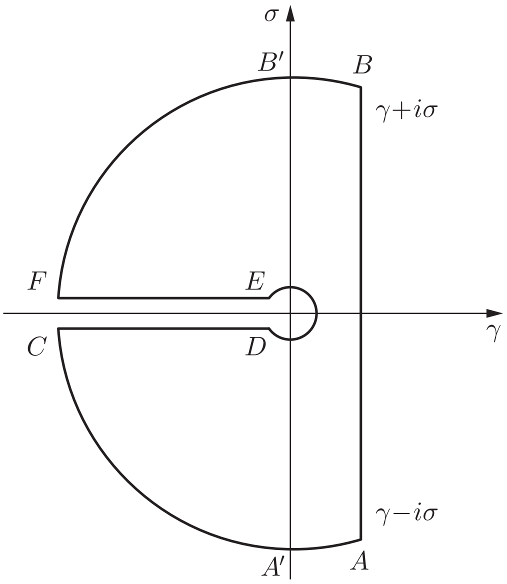

Рис. 7

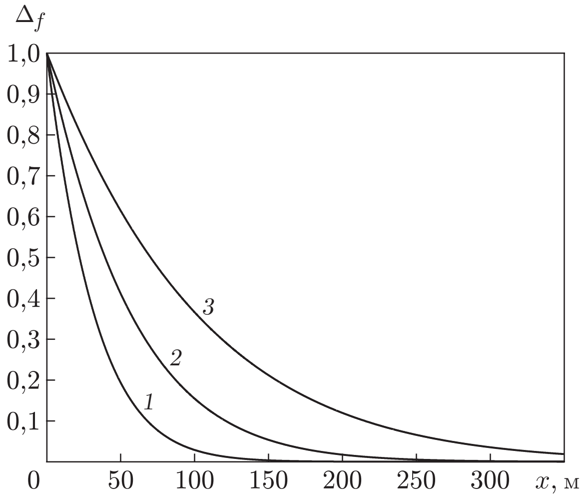

Рис. 8

Рис. 7. Контур интегрирования

Рис. 8. Поле давления в различные моменты времени:
1 — $t = 10^3$ с, *2* — $t = 10^4$ с, *3* — $t = 10^5$ с

аналитической в плоскости с разрезом вдоль отрицательного направления действительной оси. Согласно теореме Коши интегрирование вдоль прямой $(\gamma - i\sigma;\ \gamma + i\sigma)$ можно заменить интегрированием вдоль любой кривой, которая оканчивается точками $\gamma \pm i\sigma$ и не пересекает разрез (рис. 7). Следуя [15], решение (5.5) можно привести к виду

$$\Delta P_f = \Delta P_{f(w)}\Delta_f(t,x), \qquad \Delta_f(t,x) = 1 - \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\sqrt{A/2}\,x\xi\right)}{\xi}\,\mathrm{e}^{-t\xi^4-\sqrt{A/2}\,x\xi}\,d\xi. \tag{5.6}$$

Функцию $\Delta_f(t,x)$ представим следующим образом:

$$\Delta_f(z) = 1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(z\eta^{1/4}\right)}{\eta}\,\mathrm{e}^{-\eta-z\eta^{1/4}}\,d\eta, \qquad z = \sqrt{\frac{A}{2}}\,\frac{x}{t^{1/4}}, \qquad \eta = t\xi^4. \tag{5.7}$$

Из (5.7) следует, что решение является автомодельным, поскольку оно зависит от одной безразмерной переменной z. На рис. 8 приведены распределения давления при $d_f = 10^{-2}$ м, $k'_f = 10^{-10}$ м^2, $k'_p = 10^{-14}$ м^2, $m_f = 10^{-1}$, $m_p = 10^{-1}$, $\mu = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с, $A = 0{,}04$ с$^{1/2}$/м^2.

Для объемного расхода флюида, отнесенного к единице длины трещины и задаваемого формулой

$$q = -\frac{d_f k'_f}{\mu}\Big(\frac{\partial P_f}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0},$$

на основе решения (5.6) получаем

$$q = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{A}{2}}\,\frac{d_f k'_f}{\mu}\,\Delta P_{f(w)}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t\xi^4}\,d\xi. \tag{5.8}$$

Выполнив замену $t\xi^4 = z^4$ и учитывая, что значение гамма-функции равно $\Gamma(5/4) \approx 0{,}906$, из выражения (5.8) находим

$$q = \frac{3{,}6}{\pi}\sqrt{\frac{A}{2}}\,\frac{d_f k_f'}{\mu}\,\frac{\Delta P_{f(w)}}{t^{1/4}}.$$

Заключение. Таким образом, трещина в пористой среде является волновым каналом для передачи низкочастотных колебаний давления в призабойной зоне скважины, что позволяет анализировать результаты гидроразрыва путем гидропрослушивания. Кроме того, полученные аналитические решения, соответствующие постоянному перепаду давления, могут быть использованы для интерпретации результатов гидродинамических испытаний скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Экономидес М.** Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: От теории к практике / М. Экономидес, Р. Олини, П. Валько. М.: Ин-т компьютер. исслед., 2007.
2. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
3. **Abe H., Mura T., Keer L. M.** Growth rate of penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // J. Geophys. Res. 1976. V. 81, N 29. P. 5335–5340.
4. **Сарайкин В. А., Слепян Л. И.** Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 4. С. 54–73.
5. **Mitchell S. L., Kuske R., Peirce A. P.** An asymptotic framework for finite hydraulic fractures including leak-off // SIAM J. Appl. Math. 2007. V. 67, N 2. P. 364–386.
6. **Линьков А. М.** Аналитическое решение задачи о гидроразрыве для неньютоновской жидкости // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2013. № 1. С. 11–21.
7. **Астафьев В. И., Федорченко Г. Д.** Автомодельное решение задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств.-науч. сер. 2007. № 4. С. 34–41.
8. **Каневская Р. Д.** Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: Недра, 1999.
9. **Шагапов В. Ш., Булатова З. А.** К теории акустического зондирования прискважинных областей пористых и проницаемых горных пород // Геофиз. журн. 2002. Т. 24, № 2. С. 79–91.
10. **Эрлагер Р.** Гидродинамические методы исследования скважин. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2006.
11. **Губайдуллин А. А., Кучугурина О. Ю.** Сферические и цилиндрические линейные волны в насыщенных жидкостью пористых средах // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33, № 1. С. 108–115.
12. **Nigmatullin R. I., Gubaydullin A. A., Shagapov V. Sh.** Numerical investigation of shock and thermal waves in porous saturated medium with phase transitions // Proc. of the Intern. conf. “Porous media: Physics, models, simulation”, Moscow, 19–21 Nov. 1997. Singapore; New Jersey; L.; Hong Kong: World Sci. Publ., 1999. P. 15–21.
13. **Крауклис П. В., Голошубин Г. М., Крауклис Л. А.** Медленная волна в слое с конечной пористостью // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1994. Т. 210. С. 146–153.
14. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999.
15. **Диткин В. А.** Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высш. шк., 1975.

Поступила в редакцию 25/III 2016 г.,
в окончательном варианте — 21/IX 2016 г.