УДК 539.374

ОДНО ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Б. Д. Аннин

(Новосибирск)

Найдено точное решение статической осесимметричной задачи идеальной пластичности с условием пластичности Мизеса.

Пусть $r\varphi z$ — цилиндрические координаты, $\sigma_r\sigma_\varphi$, σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжений, u, w — компоненты вектора скорости, k — постоянная. Уравнения, которым удовлетворяют независящие от φ компоненты тензора напряжений и вектора скорости, суть

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0$$

$$(\sigma_r-\sigma_\varphi)^2+(\sigma_\varphi-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\tau_{rz}{}^2=6k^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\lambda(2\sigma_r-\sigma_\varphi-\sigma_z),\qquad \frac{u}{r}=\lambda(2\sigma_\varphi-\sigma_z-\sigma_r)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\lambda(2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\varphi),\qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}=6\lambda\tau_{rz}$$

Здесь λ — некоторая положительная функция.

Ищем решение системы (1) в виде

$$\sigma_r=az+\sigma_r{}^*,\qquad \sigma_\varphi=az+\sigma_\varphi{}^*,\qquad \sigma_z=az+\sigma_z{}^* \tag{2}$$

$$u=u^*\exp z,\qquad w=w^*\exp z$$

Здесь a — произвольная постоянная, а величины со звездочкой зависят только от r.

Из (1) следует:

$$\tau_{rz}=-{}^1\!/_2 ar+cr^{-1} \tag{3}$$

где c — произвольная постоянная.

Подставляя (2), (3), в (1) и исключая λ, получим для величин со звездочкой систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим случай $a=c=0$. Из условия несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

вытекающего из (1), и условия $\tau_{rz}=0$ найдем, считая, что w ограничено при $r=0$

$$u=AJ_0{}'(r)\exp z,\qquad w=-AJ_0(r)\exp z \tag{4}$$

(Если w неограничено при $r=0$, в (4) следует добавить функцию Макдональда.)

В выражении (4) A — произвольная постоянная

$$J_0{}'(t)\equiv dJ_0(t)\,/\,dt$$

$J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента, удовлетворяющая уравнению

$$td^2J_0(t)\,/\,dt^2+dJ_0(t)\,/\,dt-tJ_0(t)=0$$

и условиям

$$J_0(0)=1,\quad J_0{}'(0)=0$$

Обозначим

$$-rJ_0(r)\,/\,J_0{}'(r)\equiv f(r)$$

Здесь $f(r)$ принимает значение от — 2 до ∞, если r изменяется от 0 до ∞. Находим [1], стр. 304)

$$\sigma_r / k = -\int_r^R [f(r)+2]\, r^{-1} F(r)\, dr, \qquad F(r) \equiv [1 + f(r) + f^2(r)]^{-1/2}$$

$$\sigma_\varphi / k = \sigma_r / k + [f(r)+2]\, F(r) \tag{5}$$

$$\sigma_z / k = \sigma_r / k + [2f(r)+1]\, F(r)$$

где R — произвольная постоянная.

Это решение при $R > 0$, $A > 0$ описывает пластическое течение кругового цилиндра длины L $(-L \leqslant z \leqslant 0,\ 0 \leqslant r \leqslant R)$, который нагружен по плоским торцам напряжением, распределенным по закону (5), и свободен от напряжений на боковой поверхности.

Заметим, что система (1) после исключения λ допускает алгебру Ли операторов [2,3] с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial w}$$

$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} + w\frac{\partial}{\partial w}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial \sigma_r} + \frac{\partial}{\partial \sigma_\varphi} + \frac{\partial}{\partial \sigma_z}$$

Эта алгебра — подалгебра Ли операторов, допускаемых системой (1). Решение вида (2), а также решение ([4], стр. 96) суть инвариантные решения, построенные на одномерных подгруппах, порожденных операторами (5).

Поступила 9 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.
3. Аннин Б. Д. Новые частные решения пространственной задачи идеальной пластичности. Аннотация докладов Всесоюзной конференции по применению теории предельного равновесия в статике и динамике тонкостенных пространственных конструкций, Тбилиси, 1971 (доклад публикуется в трудах конференции).
4. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.

УДК 539.375 : 620.171

О РАСЧЕТЕ ДИАГРАММ РАЗРУШЕНИЯ

Е. М. Морозов, В. Т. Сапунов

(Москва)

Рассматриваются уравнения, описывающие критические и докритические диаграммы разрушения, получаемые из энергетического критерия разрушения в интегральной формулировке. Уравнения приближенно учитывают наличие малой пластической области перед концом трещины, включают в себя коэффициент интенсивности напряжений и в случае циклического нагружения один эмпирический коэффициент. Результаты расчета и эксперимента согласуются между собой.

Функциональная зависимость между внешней нагрузкой и длиной магистральной трещины в плоском образце, называемая диаграммой разрушения, отражает способность материала сопротивляться распространению трещины и служит оценочной характеристикой при выборе материала и, возможно, окажется основанием для проведения расчетов деталей конструкции.