ПМТФ, № 3, 1966

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ЭМИССИИ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Сыровой

(Москва)

Приведено аналитическое решение уравнений регулярного пучка при эмиссии с произвольной поверхности в режиме полного пространственного заряда (ρ-режим) и в заданном внешнем магнитном поле $\mathbf{H} \neq 0$ (§ 2); при эмиссии, ограниченной температурой (T-режим), во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$ (§ 3); при эмиссии с ненулевой начальной скоростью (§ 4). Предполагается, что эмиттер является координатной поверхностью $x^1 = 0$ в ортогональной системе x^i ($i = 1, 2, 3$), а плотность тока J и поле ε на нем суть заданные функции $J(x^2, x^3)$, $\varepsilon(x^2, x^3)$. Решение представляется в виде рядов по $(x^1)^\alpha$ с коэффициентами, зависящими от x^2, x^3, определяемыми из рекуррентных соотношений. При эмиссии в ρ-режиме и $\mathbf{H} \neq 0$ имеем $\alpha = {}^1/_3$; при эмиссии, ограниченной температурой, $\alpha = {}^1/_2$; при ненулевой начальной скорости $\alpha = 1$. Результаты обобщаются на случай пучка при наличии неподвижного фона однородной плотности (§ 5).

§ 1. Основные уравнения. Регулярный моноэнергетический нерелятивистский пучок заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в стационарном случае описывается системой дифференциальных уравнений, которая в тензорной форме в произвольной криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$g^{ik} v_i v_k + (u)^2 = 2\varphi, \qquad H^l = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} \frac{\partial v_i}{\partial x^k}$$
$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ik} \rho v_k) = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = \rho \tag{1.1}$$

Здесь v_i — ковариантные компоненты скорости, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, H^l — контравариантные компоненты вектора напряженности внешнего магнитного поля. Уравнения (1.1) записаны в безразмерных переменных $r^\circ, V^\circ, \varphi^\circ, \rho^\circ, H^\circ$ (r, V, H — модули радиуса-вектора, вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля)

$$r = ar^\circ, \quad V = UV^\circ, \quad \varphi = -\frac{U^2}{\eta}\varphi^\circ, \quad \rho = \frac{U^2}{4\pi\eta a^2}\rho^\circ, \quad H = \frac{cU}{\eta a} H^\circ \tag{1.2}$$

причем символ безразмерной величины опущен; a, U — постоянные, имеющие размерность длины и скорости соответственно, c — скорость света. Под u в первом уравнении (1.1) понимается постоянная начальная скорость частиц на поверхности $\varphi = 0$.

В дальнейшем будем считать, что $x^1 = 0$ — уравнение эмиттера в ортогональной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$).

Магнитное поле предполагается заданным. Для рассматриваемых ниже задач достаточно знать две компоненты H^2 и H^3, так как H^1 в этом случае может быть найдена из уравнений Максвелла. Чтобы получить полную систему, к (1.1) следует добавить только одно уравнение

$$e^{ikl} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} = 0 \tag{1.3}$$

ибо солеиоидальность $\mathbf{H}$ вытекает из условий регулярности течения (второе соотношение (1.1), выражающее потенциальность обобщенного импульса $P_i = v_i + A_i$, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал).

Действительно, в развернутой записи эти условия имеют вид

$$\frac{\partial v_2}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^2} = \sqrt{g}\, H^1, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^3} = \sqrt{g}\, H^2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} = \sqrt{g}\, H^3$$

Выражая v_2, v_3 из двух последних уравнений

$$v_2 = \int \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \sqrt{g}\, H^3 \right) dx^1, \qquad v_3 = \int \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} + \sqrt{g}\, H^2 \right) dx^1$$

и подставляя их в первое, получаем

$$\int \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} H^i)\, dx^1 = 0$$

Отсюда и следует требуемое выражение

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} H^i) = 0$$

Таким образом, в области с магнитными зарядами течение не может быть регулярным.

Так как решение сформулированных выше задач предполагается искать в виде рядов по $(x^1)^\alpha$, представим в виде аналогичных рядов элементы метрического тензора g_{ik} и $\sqrt{g} H^2$, $\sqrt{g} H^3$

$$\begin{gathered} g_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^1)^k, \quad g_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x^1)^k, \quad g_{33} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x^1)^k \\ \sqrt{g} H^2 = \sum_{k=0}^{\infty} H_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} H^3 = \sum_{k=0}^{\infty} h_k (x^1)^k \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь индексы k под знаками сумм имеют обычный (не тензорный) смысл порядкового номера членов ряда и степеней. Для удобства введем также следующие обозначения для коэффициентов разложений элементов g^{ik}, $\sqrt{g}$ и комбинаций $\sqrt{g}\, g^{ik}$

$$\begin{gathered} g^{11} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x^1)^k, \quad g^{22} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k (x^1)^k, \quad g^{33} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} = \sum_{k=0}^{\infty} G_k (x^1)^k \\ \sqrt{g} g^{11} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} g^{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} g^{33} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x^1)^k \end{gathered} \tag{1.5}$$

§ 2. **Эмиссия в ρ-режиме** при $\mathbf{H} \neq 0$ определяется следующими условиями на эмиттере: при $x^1 = 0$

$$\begin{gathered} V = 0, \ \varphi = 0, \ \partial\varphi / \partial x^1 = 0, \quad \rho v_{x^1} = J(x^2, x^3) \\ H_{x^1} = 0, \quad H_{x^2} = m(x^2, x^3), \quad H_{x^3} = n(x^2, x^3) \\ m^2 + n^2 = h^2 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь v_{x^i}, H_{x^i} — физические компоненты скорости и магнитного поля. Будем искать решение задачи (1.1), (2.1) в виде

$$\begin{gathered} v_1 = \sum_{k=2}^{\infty} U_k (x^1)^{1/3 k}, \quad v_2 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k (x^1)^{1/3 k}, \quad v_3 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} W_k (x^1)^{1/3 k} \\ 2\varphi = \sum_{k=4}^{\infty} \varphi_k (x^1)^{1/3 k}, \quad 2\sqrt{g}\rho = \sum_{k=-2}^{\infty} \rho_k (x^1)^{1/3 k} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Рассмотрение условий регулярности течения приводит к результату

$$V_k = \frac{3}{k+3}(U_k)_2', \qquad W_k = \frac{3}{k+3}(U_k)_3' \qquad (k \neq 3q,\ k \geqslant 2)$$

$$V_{3q} = \frac{1}{q+1}[(U_{3q})_2' - h_q], \qquad W_{3q} = \frac{1}{q+1}[(U_{3q})_3' + H_q] \qquad (q = 0, 1, \ldots) \tag{2.3}$$

$$V_1 = W_1 = 0, \qquad (U_k)_2' = \frac{\partial U_k}{\partial x^2}, \qquad (U_k)_3' = \frac{\partial U_k}{\partial x^3}$$

Подставляя выражения для v_i в первое уравнение (1.1), имеем

$$\varphi_s = \sum_{k=2}\left[\left(U_k^2 + 2\sum_{l=2}^{k-1} U_l U_{2k-l}\right) A_{1/3\,(s-2k)} + \left(2\sum_{l=2}^{k} U_l U_{2k-l+1}\right) A_{1/3\,(s-2k-1)}\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}\left[\left(V_k^2 + 2\sum_{l=0}^{k-1} V_l V_{2k-l}\right) B_{1/3\,(s-2k-6)} + \left(2\sum_{l=0}^{k} V_l V_{2k-l+1}\right) B_{1/3\,(s-2k-7)} +\right.$$

$$\left.+ \left(W_k^2 + 2\sum_{l=0}^{k-1} W_l W_{2k-l}\right) C_{1/3\,(s-2k-6)} + \left(2\sum_{l=0}^{k} W_l W_{2k-l+1}\right) C_{1/3\,(s-2k-7)}\right] \tag{2.4}$$

$$(s = 4, 5, \ldots)$$

Суммирование по k управляется посредством дробного индекса у A, B, C. Так, при $s = 7$ первая группа членов в (2.4) дает слагаемое с $k = 2$, вторая с $k = 3$, четвертая и шестая — с $k = 0$, третья и пятая не участвуют вовсе; коэффициенты с индексами, не входящими в (1.4), (1.5), (2.2), по определению равны нулю (например все коэффициенты с отрицательными индексами в (1.4), (1.5)). Условимся также считать, что суммирование по k от a до b при $b < a$ имеет результатом нуль.

Пользуясь уравнением Пуассона, находим

$$\rho_{t-3} = \frac{t}{9}\sum_{s=0}^{t-1}(s+4)\,\varphi_{s+4}\alpha_{1/3\,(t-s-1)} + \sum_{s=4}^{t-3}\{[(\varphi_s)_2'\beta_{1/3\,(t-s-3)}]_2' + [(\varphi_s)_3'\gamma_{1/3\,(t-s-3)}]_3'\}$$

$$(t = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

Наконец, уравнение сохранения тока позволяет получить соотношения для определения функций $U_k(x^2, x^3)$

$$\frac{1}{3}p\sum_{t=0}^{p}\rho_{t-2}\sum_{l=0} A_l U_{p-t-3l+2} + \sum_{t=0}^{p-4}\left[\left(\rho_{t-2}\sum_{l=0} B_l V_{p-t-3l-4}\right)_2' +\right.$$

$$\left.+ \left(\rho_{t-2}\sum_{l=0} C_l W_{p-t-3l-4}\right)_3'\right] = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

Формулы (2.2)—(2.6) дают решение поставленной задачи. Рассматривая (2.6) при $p = 1$, имеем $U_3 = \varphi_5 = \rho_{-1} = 0$. Вычислим еще несколько членов разложения потенциала, записывая (2.6) при $p = 2, 3, 4, 5$ и учитывая, что плотность тока эмиссии — заданная величина; получим

$$\varphi_4 = \left(\frac{9}{2}J\right)^{2/3} a_0^{2/3}, \quad \varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = \frac{1}{10}h^2 a_0, \quad \varphi_7 = \left(\frac{9}{2}J\right)^{2/3}\left(\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{8}{15}T\right) a_0^{7/6}$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{14}\left(\frac{9}{2}J\right)^{1/3}\left[\frac{9}{100}\frac{h^4}{J} + \frac{2}{7}\frac{nJ_P' - mJ_Q'}{J} - (nk_2 - m\delta_2) + (n_P' - m_Q')\right] a_0^{4/3}$$

$$\varphi_9 = \left[\frac{1}{20}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}h^2 + \frac{27}{700}h^2 T + \frac{1}{28}(\varkappa_1 n^2 + \varkappa_2 m^2) + \frac{1}{56}(h^2)_S'\right] a_0^{3/2}$$

Здесь индексы S, P, Q означают дифференцирование по длинам дуг криволинейных осей x^1, x^2, x^3; $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — главные кривизны поверхности $x^1 = 0$, $T = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — ее полная кривизна; k_1 и k_2, δ_1 и δ_2 — главные кривизны поверхностей $x^2 = \mathrm{const}$, $x^3 = \mathrm{const}$ соответственно, вычисленные при $x^1 = 0$.

Если в качестве параметра, по которому ведется разложение, выбрать длину дуги S криволинейной оси x^1, ортогональной к эмиттеру, то выражение для потенциала примет вид

$$
\begin{aligned}
2\varphi = \left(\frac{9}{2}J\right)^{2/3} S^{4/3} + \frac{1}{10}h^2 S^2 + \frac{8}{15}\left(\frac{9}{2}J\right)^{2/3} T S^{7/3} + \\
+ \frac{1}{14}\left(\frac{9}{2}J\right)^{1/3}\left[\frac{9}{100}\frac{h^4}{J} + \frac{2}{7}\frac{nJ_P' - mJ_Q'}{J} - (nk_2 - m\delta_2) + (n_P' - m_Q')\right] S^{8/3} + \\
+ \left[\frac{27}{700}h^2 T + \frac{1}{28}(\varkappa_1 n^2 + \varkappa_2 m^2) + \frac{1}{56}(h^2)_S'\right] S^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Первая поправка к закону $^3/_2$ Чайлда—Лэнгмюра в локальной записи определяется только абсолютным значением напряженности магнитного поля на эмиттере. Следующий член совпадает с первой поправкой к закону $^3/_2$ в электростатическом случае. Четвертый член описывает более тонкие эффекты, связанные не только с наличием магнитного поля, но и с его неоднородностью, неоднородностью плотности тока эмиссии и геометрическими факторами. Наконец, коэффициент при S^3 учитывает взаимодействие магнитного поля с геометрией эмиттера и скорость изменения h^2 в направлении нормали к $x^1 = 0$.

§ 3. Эмиссия в *T*-режиме в заданном внешнем магнитном поле **H** определяется следующими условиями: при $x^1 = 0$

$$
\begin{gathered}
V = 0, \quad \varphi = 0, \quad \sqrt{g^{11}}\,\partial\varphi / \partial x^1 = \varepsilon(x^2, x^3), \quad \rho v_{x^1} = J(x^2, x^3) \\
H_{x^1} = 0, \quad H_{x^2} = m(x^2, x^3), \quad H_{x^3} = n(x^2, x^3) \\
m^2 + n^2 = h^2
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Будем строить разложения для v_i, φ, ρ, удовлетворяющие (1.1), (3.1), по полуцелым степеням x^1

$$
\begin{gathered}
v_1 = \sum_{k=1}^{\infty} U_k (x^1)^{1/2 k}, \qquad v_2 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k (x^1)^{1/2 k}, \qquad v_3 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} W_k (x^1)^{1/2 k} \\
2\varphi = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k (x^1)^{1/2 k}, \qquad 2\sqrt{g}\,\rho = \sum_{k=-1}^{\infty} \rho_k (x^1)^{1/2 k}
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Рассмотрение условий потенциальности обобщенного импульса дает связь между V_k, W_k и U_k, H_k, h_k

$$
\begin{gathered}
V_{2q} = \frac{1}{q+1}[(U_{2q})_2' - h_q], \qquad V_{2q+1} = \frac{1}{q + {}^3/_2}(U_{2q+1})_2', \qquad V_0 = -h_0 \\
W_{2q} = \frac{1}{q+1}[(U_{2q})_3' + H_q], \qquad W_{2q+1} = \frac{1}{q + {}^3/_2}(U_{2q+1})_3', \qquad W_0 = H_0 \\
(q = 0, 1, \ldots)
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Используя интеграл энергии для определения коэффициентов разложения потенциала, получаем

$$
\begin{aligned}
\varphi_s = \sum_{k=1}\left[\left(U_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k-1} U_l U_{2k-l}\right) A_{1/2 s-k} + \left(2\sum_{l=1}^{k} U_l U_{2k-l+1}\right) A_{1/2(s-1)-k}\right] + \\
+ \sum_{k=0}\left[\left(V_k^2 + 2\sum_{l=0}^{k-1} V_l V_{2k-l}\right) B_{1/2(s-4)-k} + \left(2\sum_{l=0}^{k} V_l V_{2k-l+1}\right) B_{1/2(s-5)-k} + \right. \\
\left. + \left(W_k^2 + 2\sum_{l=0}^{k-1} W_l W_{2k-l}\right) C_{1/2(s-4)-k} + \left(2\sum_{l=0}^{k} W_l W_{2k-l+1}\right) C_{1/2(s-5)-k}\right]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$(s = 2, 3, \ldots)$$

Уравнение Пуассона дает следующие выражения для ρ_{t-2}: (3.5)

$$\rho_{t-2}=\sum_{s=2}\{{}^1/_4 st\varphi_s\alpha_{1/2\,(t-s)+1}+[(\varphi_s)_2{}'\beta_{1/2\,(t-s)-1}]_2{}'+[(\varphi_s)_3{}'\gamma_{1/2\,(t-s)-1}]_3{}'\}\qquad(t=1,\,2,\,\ldots)$$

Наконец, из уравнения сохранения тока находим рекуррентные соотношения для определения U_k

$$\sum_{t=1}\Big\{{}^1/_2 p\,\rho_{t-2}\sum_{l=1}U_lA_{1/2\,(p-t-l)+1}+\Big[\rho_{t-2}\sum_{l=0}V_lB_{1/2\,(p-t-l)-1}\Big]_2{}'+$$
$$+\Big[\rho_{t-2}\sum_{l=0}W_lC_{1/2\,(p-t-l)-1}\Big]_3{}'\Big\}=0\qquad(p=1,\,2,\ldots)\tag{3.6}$$

Формулы (3.2)—(3.6) решают поставленную задачу.

Выпишем несколько коэффициентов разложения потенциала

$$\varphi_2=2\varepsilon a_0{}^{1/2},\qquad \varphi_3=\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{J}{\sqrt{\varepsilon}}a_0{}^{3/4},\qquad \varphi_4=\left(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0{}^{3/2}}\varepsilon+\varepsilon T-\frac{1}{3}\frac{J^2}{\varepsilon^2}\right)a_0$$

$$\varphi_5=\sqrt{2}\,\frac{J}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0{}^{3/2}}+\frac{11}{15}T+\frac{1}{9}\frac{J^3}{\varepsilon^3}+\frac{1}{15}\frac{Jh^2}{\varepsilon}\right)a_0{}^{5/4}$$

$$\varphi_6=\left\{\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0{}^{3/2}}\left(\varepsilon T-\frac{1}{3}\frac{J^2}{\varepsilon^2}\right)-\frac{1}{12}\frac{a_1{}^2}{a_0{}^3}\varepsilon+\frac{1}{3}\frac{a_2}{a_0{}^2}\varepsilon-\frac{1}{5}\frac{J^2}{\varepsilon^2}T+\right.$$
$$+\frac{1}{3}\varepsilon T^2+\frac{1}{3}\varepsilon T_S{}'-\frac{8}{81}\frac{J^4}{\varepsilon^5}-\frac{4}{45}\frac{J^2h^2}{\varepsilon^3}+\frac{1}{9\varepsilon}\Big[J(m\delta_2-nk_2)+(nJ)_P{}'-(mJ)_Q{}'+$$
$$+\frac{J}{\varepsilon}(-n\varepsilon_P{}'+m\varepsilon_Q{}')\Big]+\frac{1}{3}[(3k_1+k_2)\varepsilon_P{}'+(3\delta_1+\delta_2)\varepsilon_Q{}'-2\varepsilon(k_1{}^2+\delta_1{}^2)-$$
$$-\varepsilon(k_1k_2+\delta_1\delta_2)-\varepsilon_P{}''-\varepsilon_Q{}''+\varepsilon(k_{1P}{}'+\delta_{1Q}{}')]$$

Переходя от разложения по $s=a_0^{1/2}x^1$ к разложению по длине дуги S криволинейной оси x^1 при помощи соотношения (3.7)

$$s=S-\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0{}^{3/2}}S^2+\frac{1}{6}\left(\frac{a_1{}^2}{a_0{}^3}-\frac{a_2}{a_0{}^2}\right)S^3+\left(-\frac{7}{48}\frac{a_1{}^3}{a_0{}^{9/2}}+\frac{13}{48}\frac{a_1a_2}{a_0{}^{1/2}}-\frac{1}{8}\frac{a_3}{a_0{}^{5/2}}\right)S^4+\ldots$$

приходим к следующему выражению:

$$2\varphi=2\varepsilon S+\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{J}{\sqrt{\varepsilon}}S^{3/2}+\left(\varepsilon T-\frac{1}{3}\frac{J^2}{\varepsilon^2}\right)S^2+\frac{\sqrt{2}}{15}\frac{J}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\Big(11\varepsilon T+$$
$$+\frac{5}{3}\frac{J^2}{\varepsilon^2}+h^2\Big)S^{5/2}+\Big\{-\frac{1}{5}\frac{J^2}{\varepsilon^2}T+\frac{1}{3}\varepsilon T^2+\frac{1}{3}\varepsilon T_S{}'-\frac{8}{81}\frac{J^4}{\varepsilon^5}-$$
$$-\frac{4}{45}\frac{J^2h^2}{\varepsilon^3}+\frac{1}{9\varepsilon}\Big[J(m\delta_2-nk_2)+(nJ)_P{}'-(mJ)_Q{}'+\frac{J}{\varepsilon}(-n\varepsilon_P{}'+m\varepsilon_Q{}')\Big]+$$
$$+\frac{1}{3}[(3k_1+k_2)\varepsilon_P{}'+(3\delta_1+\delta_2)\varepsilon_Q{}'-2\varepsilon(k_1{}^2+\delta_1{}^2)-$$
$$-\varepsilon(k_1k_2+\delta_1\delta_2)-\varepsilon_P{}''-\varepsilon_Q{}''+\varepsilon(k_{1P}{}'+\delta_{1Q}{}')]\Big\}S^3+\ldots\tag{3.8}$$

Интересно сравнить формулы (2.7) и (3.8). Видно, что при $\varepsilon\neq0$ действие магнитного поля затруднено, а доминируют геометрические эффекты: h^2 появляется в коэффициенте при $S^{5/2}$, а T — уже при S^2; градиенты магнитного поля вошли лишь в последний член в (3.8), в котором учтено также изменение полной кривизны в направлении нормали к эмиттеру, появляющееся в (2.7) только в коэффициенте при $S^{10/3}$ и т. д.

§ 4. **Случай ненулевой начальной скорости** соответствует следующим условиям на эмиттирующей поверхности: при $x^1 = 0$

$$v_{x^1} = u = \mathrm{const}, \quad \varphi = 0, \quad \sqrt{g^{11}}\, \partial\varphi / \partial x^1 = \varepsilon(x^2, x^3), \quad \rho v_{x^1} = J(x^2, x^3)$$
$$H_{x^1} = 0, \quad H_{x^2} = m(x^2, x^3), \quad H_{x^3} = n(x^2, x^3), \quad m^2 + n^2 = h^2 \tag{4.1}$$

Решение задачи (1.1), (4.1) ищем в виде

$$v_1 = \sum_{k=0}^{\infty} U_k (x^1)^k, \quad v_2 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k (x^1)^k, \quad v_3 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} W_k (x^1)^k$$
$$2\varphi + (u)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (x^1)^k, \qquad 2\sqrt{g}\,\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k (x^1)^k \tag{4.2}$$

Зависимость V_k, W_k от U_k и коэффициентов разложения компонент магнитного поля определяется формулами

$$(k+1) V_k = (U_k)_2' - h_k, \qquad (k+1) W_k = (U_k)_3' + H_k \quad (k=0, 1, \ldots) \tag{4.3}$$

При этом $u = A_0^{1/2} U_0$. Пользуясь интегралом энергии, находим

$$\varphi_s = \sum_{k=0} \Big[\Big(U_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k} U_{l-1} U_{2k-l+1}\Big) A_{s-2k} + \Big(2\sum_{l=0}^{k} U_l U_{2k-l+1}\Big) A_{s-2k-1} +$$
$$+ \Big(V_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k} V_{l-1} V_{2k-l+1}\Big) B_{s-2k-2} + \Big(2\sum_{l=0}^{k} V_l V_{2k-l+1}\Big) B_{s-2k-3} +$$
$$+ \Big(W_k^2 + 2\sum_{l=1}^{k} W_{l-1} W_{2k-l+1}\Big) C_{s-2k-2} + \Big(2\sum_{l=0}^{k} W_l W_{2k-l+1}\Big) C_{s-2k-3}\Big] \tag{4.4}$$
$$(s = 0, 1, \ldots)$$

Уравнение Пуассона дает для ρ_{t-1}

$$\rho_{t-1} = t \sum_{s=1}^{t+1} s\varphi_s \alpha_{t-s+1} + \sum_{s=1}^{t-1} \{[(\varphi_s)_2' \beta_{t-s-1}]_2' + [(\varphi_s)_3' \gamma_{t-s-1}]_3'\} \tag{4.5}$$
$$(t = 1, 2, \ldots)$$

Рекуррентные соотношения для определения коэффициентов разложений записываются следующим образом:

$$p \sum_{t=0}^{p} \rho_t \sum_{l=0}^{p-t} A_l U_{p-t-l} + \sum_{t=0}^{p-2} \Big[\Big(\rho_t \sum_{l=0}^{p-t-2} B_l V_{p-t-l-2}\Big)_2' + \Big(\rho_t \sum_{l=0}^{p-t-2} C_l W_{p-t-l-2}\Big)_3'\Big] = 0$$
$$(p = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

Чтобы оценить влияние магнитного поля, приходится выписать четыре члена разложения потенциала

$$\varphi_1 = 2\varepsilon a_0^{1/2}, \qquad \varphi_2 = \Big(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\varepsilon + \frac{J}{u} + \varepsilon T\Big) a_0$$

$$\varphi_3 = \Big[\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\Big(\frac{J}{u} + \varepsilon T\Big) - \frac{1}{12}\frac{a_1^2}{a_0^3}\varepsilon + \frac{1}{3}\frac{a_2}{a_0^2}\varepsilon + \frac{1}{3}\Big(-\frac{\varepsilon J}{u^3} + 2\frac{J}{u}T +$$
$$+ \varepsilon T^2 + \varepsilon T_S'\Big) - \frac{2}{3}\varepsilon(k_1^2 + \delta_1^2) - \frac{1}{3}\varepsilon(k_1 k_2 + \delta_1\delta_2) + \Big(k_1 + \frac{1}{3}k_2\Big)\varepsilon_P' +$$
$$+ \Big(\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2\Big)\varepsilon_Q' - \frac{1}{3}(\varepsilon_P'' + \varepsilon_Q'') + \frac{1}{3}\varepsilon(k_{1P}' + \delta_{1Q}')\Big] a_0^{3/2}$$

$$\varphi_4 = \Big\{\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\Big[-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon J}{u^3} + \frac{1}{2}\frac{J}{u}T + \frac{1}{4}\varepsilon T^2 + \frac{1}{4}\varepsilon T_S' + \frac{3}{4}\Big(-\frac{2}{3}\varepsilon(k_1^2 + \delta_1^2) -$$
$$- \frac{1}{3}\varepsilon(k_1 k_2 + \delta_1\delta_2) + \Big(k_1 + \frac{1}{3}k_2\Big)\varepsilon_P' + \Big(\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2\Big)\varepsilon_Q' - \frac{1}{3}(\varepsilon_P'' + \varepsilon_Q'') +$$

$$+\frac{1}{3}\varepsilon\left(k_{1P}'+\delta_{1Q}'\right)\Big)\Big]-\frac{1}{48}\frac{a_1^2}{a_0^3}\left(\frac{J}{u}+\varepsilon T\right)+\frac{1}{32}\frac{a_1^3}{a_0^{9/2}}\varepsilon+\frac{1}{3}\frac{a_2}{a_0^2}\left(\frac{J}{u}+\varepsilon T\right)-$$

$$-\frac{1}{8}\frac{a_1a_2}{a_0^{7/2}}\varepsilon+\frac{1}{4}\frac{a_3}{a_0^{5/2}}\varepsilon-\frac{1}{12}\frac{J^2}{u^4}+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2J}{u^5}+\frac{1}{12}\frac{Jh^2}{u^3}-\frac{1}{3}\frac{\varepsilon J}{u^3}T+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{J}{u}T^2+\frac{1}{12}\varepsilon T^3+\frac{1}{4}\frac{J}{u}T_S'+\frac{1}{4}\varepsilon TT_S'+\frac{1}{12}\varepsilon T_S''+$$

$$+\frac{1}{12}\frac{J}{u^2}(m\delta_2-nk_2)+\frac{3}{4}T\Big[-\frac{2}{3}\varepsilon(k_1^2+\delta_1^2)-\frac{1}{3}\varepsilon(k_1k_2+\delta_1\delta_2)+$$

$$+\left(k_1+\frac{1}{3}k_2\right)\varepsilon_P'+\left(\delta_1+\frac{1}{3}\delta_2\right)\varepsilon_Q'-\frac{1}{3}(\varepsilon_P''+\varepsilon_Q'')+\frac{1}{3}\varepsilon(k_{1P}'+\delta_{1Q}')\Big]-$$

$$-\Big[\frac{1}{3}(\varkappa_{1P}'-k_{1S}')-\frac{3}{4}\left(\varkappa_1-\frac{1}{3}\varkappa_2\right)\left(k_1+\frac{1}{3}k_2\right)\Big]\varepsilon_P'-\Big[\frac{1}{3}(\varkappa_{2Q}'-\delta_{1S}')+$$

$$+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\varkappa_1-\varkappa_2\right)\left(\delta_1+\frac{1}{3}\delta_2\right)\Big]\varepsilon_Q'-\frac{1}{2}\varepsilon k_1\Big[k_{1S}'-\left(\varkappa_1+\frac{1}{2}\varkappa_2\right)_P'+$$

$$+\varkappa_1\left(k_1+\frac{1}{2}k_2\right)\Big]-\frac{1}{2}\varepsilon\delta_1\Big[\delta_{1S}'-\left(\frac{1}{2}\varkappa_1+\varkappa_2\right)_Q'+\varkappa_2\left(\delta_1+\frac{1}{2}\delta_2\right)\Big]-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\varkappa_1-\frac{1}{3}\varkappa_2\right)\varepsilon_P''+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\varkappa_1-\varkappa_2\right)\varepsilon_Q''+\frac{1}{4}\varepsilon\Big[\frac{1}{3}(k_{1S}'-T_P')_P'+$$

$$+\varkappa_1k_{1P}'-\frac{1}{3}k_2(k_{1S}'-T_P')\Big]+\frac{1}{4}\varepsilon\Big[\frac{1}{3}(\delta_{1S}'-T_Q')_Q'+\varkappa_2\delta_{1Q}'-$$

$$-\frac{1}{3}\delta_2(\delta_{1S}'-T_Q')\Big]-\frac{1}{12u}\left(J_P'-\frac{nJ}{u}\right)_P'-\frac{1}{12u}\left(J_Q'+\frac{mJ}{u}\right)_Q'+$$

$$+\frac{1}{2u}J_P'\left(k_1+\frac{1}{6}k_2\right)+\frac{1}{2u}J_Q'\left(\delta_1+\frac{1}{6}\delta_2\right)-$$

$$-\frac{J}{u}\Big[\frac{7}{12}(k_1^2+\delta_1^2)+\frac{1}{4}(k_1k_2+\delta_1\delta_2)-\frac{1}{4}(k_{1P}'+\delta_{1Q}')\Big]\Big\}a_0^2$$

Пользуясь формулой (3.7), приходим к выражению

$$2\varphi=-u^2+2\varepsilon S+\left(\frac{J}{u}+\varepsilon T\right)S^2+$$

$$+\frac{1}{3}\Big[-\frac{\varepsilon J}{u^3}+2\frac{J}{u}T+\varepsilon T^2+\varepsilon T_S'-2\varepsilon(k_1^2+\delta_1^2)-\varepsilon(k_1k_2+\delta_1\delta_2)+$$

$$+(3k_1+k_2)\varepsilon_P'+(3\delta_1+\delta_2)\varepsilon_Q'-\varepsilon_P''-\varepsilon_Q''+$$

$$+\varepsilon(k_{1P}'+\delta_{1Q}')\Big]S^3+\vartheta_4S^4+\ldots \qquad (4.7)$$

Под ϑ_4 в (4.7) понимается часть φ_4, не содержащая a_1, a_2, a_3. Следует отметить, что отличие начальной скорости эмиссии от нуля действует в том же направлении, что и электрическое поле $\varepsilon \neq 0$: геометрические факторы оказывают более сильное влияние, чем магнитное поле. Действительно, при $\varepsilon = 0$ с точностью до слагаемых, соответствующих одномерному течению между параллельными плоскостями ($T = 0$), третий член разложения суть $^2/_3\, u^{-1}JT$, а магнитное поле появляется лишь в коэффициенте при S^4. Заметим, что вклад со стороны $\mathbf{H}$ в φ_4 осуществляется как за счет абсолютного значения магнитного поля на эмиттере, так и за счет его производных в направлениях P, Q. При $\varepsilon \neq 0$ геометрические эффекты будут еще более сильными: полная кривизна входит уже в φ_2.

Задачами, рассмотренными в [1] и выше, исчерпывается весь комплекс проблем, которые можно поставить для моноэнергетических пучков, когда все необходимые условия заданы на эмиттирующей поверхности.

§5. Пучок при наличии неподвижного фона. Результаты §§ 2—4 легко обобщить на случай течения на неподвижном фоне однородной плотности N_0. При этом $N_0 > 0$, если фон образован зарядами того же знака, что и заряд частиц пучка, и $N_0 < 0$ в противоположном случае. Решение будет определяться формулами §§ 2—4 с той только разницей, что в уравнениях (2.6), (3.6) и (4.6) функции ρ_t должны быть заменены на R_t, которые задаются приводимыми ниже формулами.

Обозначая через Φ_k коэффициенты разложения потенциала при наличии фона и через Δ_k поправки к уже вычисленным функциям φ_k, соответствующим случаю $N_0 = 0$, $\Delta_k = \Phi_k - \varphi_k$, приведем формулы, дающие эти поправки.

При эмиссии в ρ-режиме

$$R_{3q} = \rho_{3q} - 2N_0G_q \quad (q = 0, 1, \ldots), \qquad R_t = \rho_t \quad (t \neq 3q); \qquad \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_7 = 0,$$

$$\Delta_6 = \frac{9}{10} N_0 a_0, \qquad \Delta_8 = \frac{9}{200}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} J^{-2/3} N_0 \left(h^2 - \frac{17}{14} N_0\right) a_0^{4/3}, \qquad \Delta_9 = N_0\left(\frac{9}{20}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{99}{350} T\right) a_0^{3/2}$$

Обозначая через ϑ_k коэффициенты при разложении потенциала по S в случае $N_0 = 0$, имеем

$$2\varphi = \varphi_4 S^{4/3} + \left(\vartheta_6 + \frac{9}{10} N_0\right) S^2 + \vartheta_7 S^{7/3} +$$
$$+ \left[\vartheta_8 + \frac{9}{200}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} J^{-2/3} N_0 \left(h^2 - \frac{17}{14} N_0\right)\right] S^{8/3} + \left(\vartheta_9 + \frac{99}{350} N_0 T\right) S^3 + \ldots$$

Отсюда видно, что фон приводит к тому же эффекту, что и ненулевое магнитное поле: даже при $\mathbf{H} = 0$, но при $N_0 \neq 0$ разложение ведется по степеням $S^{1/3}$.

При эмиссии в T-режиме

$$R_{2q} = \rho_{2q} - 2N_0 G_q, \qquad R_{2q-1} = \rho_{2q-1} \quad (q = 0, 1, \ldots); \quad \Delta_2 = \Delta_3 = 0, \qquad \Delta_4 = N_0 a_0$$

$$\Delta_5 = -\frac{2\sqrt{2}}{45}\frac{J}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} N_0 a_0^{5/4}, \qquad \Delta_6 = \left(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{70}{9}\frac{J^2}{\varepsilon^3} + \frac{1}{3} T\right) N_0 a_0^{3/2}$$

$$2\varphi = \varphi_2 S + \varphi_3 S^{3/2} + (\vartheta_4 + N_0) S^2 + \left(\vartheta_5 - \frac{2\sqrt{2}}{45}\frac{J}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} N_0\right) S^{5/2} +$$
$$+ \left[\vartheta_6 + \left(\frac{70}{9}\frac{J^2}{\varepsilon^3} + \frac{1}{3} T\right) N_0\right] S^3 + \ldots$$

При ненулевой начальной скорости

$$R_t = \rho_t - 2N_0 G_t \qquad (t = 0, 1, \ldots)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0, \qquad \Delta_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{u^2} - T\right) N_0 a_0^{3/2}, \qquad \Delta_4 = \left\{\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon}{u^2} - T\right) + \frac{1}{12}\frac{J}{u^3} - \right.$$
$$- \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{u^4} - \frac{1}{12}\frac{h^2}{u^2} - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{u^2} T + \frac{1}{6} T^2 - \frac{1}{12} T_S' + \frac{1}{12}\left[-\left(k_1 + \frac{n}{u}\right)_P' - \right.$$
$$\left.\left. - \left(\delta_1 - \frac{m}{u}\right)_Q' + (2k_1 + k_2)\left(k_1 + \frac{n}{u}\right) + (2\delta_1 + \delta_2)\left(\delta_1 - \frac{m}{u}\right)\right]\right\} N_0 a_0^2$$

$$2\varphi = \varphi_1 S + \varphi_2 S^2 + \left[\vartheta_3 + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{u^2} - T\right) N_0\right] S^3 + \left\{\vartheta_4 + \left(\frac{1}{12}\frac{J}{u^3} - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{u^4} - \right.\right.$$
$$- \frac{1}{12}\frac{h^2}{u^2} - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{u^2} T + \frac{1}{6} T^2 - \frac{1}{12} T_S' + \frac{1}{12}\left[-\left(k_1 + \frac{n}{u}\right)_P' - \left(\delta_1 - \frac{m}{u}\right)_Q' + \right.$$
$$\left.\left.\left. + (2k_1 + k_2)\left(k_1 + \frac{n}{u}\right) + (2\delta_1 + \delta_2)\left(\delta_1 - \frac{m}{u}\right)\right]\right\} N_0 S^4 + \ldots$$

Поступила 30 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. ПМТФ, 1966, № 2.