5. **Лебедев А. А.** О критериях эквивалетности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии.— «Проблемы прочности», 1970, № 4.
6. **Patel S. A., Cozzarelli F. A., Venkatraman B.** Creep of compressible circular plates.— «Intern. J. Mech. Sci.», 1953, vol. 5, N 1.
7. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
8. **Никитенко А. Ф.** О влиянии третьего инварианта девиатора напряжений на ползучесть неупрочняющихся материалов.— ПМТФ, 1969, № 5.
9. **Соснин О. В.** О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1970, № 5.
10. **Амбарцумян С. А.** Об одной модели наследственно упругого тела, разносопротивляющегося растяжению и сжатию.— ПММ, 1971, т. 35, № 1.
11. **Никитенко А. Ф.** и др. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1971, № 2.
12. **Murakami S., Jamada J.** Effects of third invariant of deviatoric stress tensor on transient creep of thickwalled tubes.— «Trans. ASME», 1974, H 96, N 3.
13. **Леллеп Я.** Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала.— «Учен. зап. Тартуского ун-та», 1974, вып. 342.
14. **Цвелодуб И. Ю.** О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 25. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
15. **Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.** Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов.— В кн.: Механ. деформ. тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
16. **Murakami S., Jamada J.** Effects of hydrostatic pressure and material anisotropy on the transient creep of thickwalled tubes.— «Intern. J. Mech. Sci.», 1974, vol. 16, N 3.
17. **Вялов С. С.** Прочность и ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся сжатию и растяжению.— В кн.: Реологические вопросы мех. горн. пород. Алма-Ата, 1964.
18. **Бойков В. Н., Лазаренко Э. С.** Кратковременная ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению — сжатию.— «Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение», 1976, № 11.
19. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 1.— «Проблемы прочности», 1973, № 5.


---

УДК 539.214; 539.374

# О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ МОЩНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

*А. Е. Алексеев*

(*Новосибирск*)

Из экстремальных теорем идеальной жестко-пластической среды [1] следует нижняя оценка мощности поверхностных сил, основанная на использовании статически допустимого поля напряжений. Известно также, что в жестко-пластической среде с выпуклым условием пластичности поле напряжений в тех зонах, где скорости деформаций отличны от нуля, единственно [2]. В работе показано, что для класса задач, в котором функционал, соответствующий нижней оценке мощности внешних поверхностных сил, нетождественно равен постоянной на множестве статически допустимых полей напряжений, существует поле напряжений, доставляющее максимум этого функционала.

1. Пусть $\Omega$ — область с кусочно-гладкой границей $S$ на плоскости $(x, y)$, $\mathrm{mes}\,(\Omega) < \infty$. Поле напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$, непрерывное и непрерывно дифференцируемое, удовлетворяющее уравнениям равновесия в $\Omega$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0, \tag{1.1}$$

граничным условиям на части границы $S_\sigma$

(1.2)
$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau n_x n_y = g(S),$$
$$\tau_n = (\sigma_y - \sigma_x) n_x n_y + \tau\left(n_x^2 - n_y^2\right) = h(S)$$

и не нарушающее условие пластичности в $\bar{\Omega} = \Omega + S$,

(1.3)
$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2 \leqslant \tau_s^2$$

называется статически допустимым.

Поле скоростей $(u, v)$, удовлетворяющее условию несжимаемости в $\Omega$

(1.4)
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и граничным условиям на части границы $S_u = S - S_\sigma$,

(1.5)
$$u = u_0(S), \quad v = v_0(S)$$

называется кинематически возможным.

В (1.1) — (1.3), (1.5) $f_x$, $f_y$, $h$, $g$, $u_0$, $v_0$ — заданные функции, $n_x$, $n_y$ — косинусы внешней нормали к $S$; $\tau_s$ — предел текучести при чистом сдвиге.

Уравнение связи между скоростями и напряжениями для идеальной жестко-пластической среды с условием пластичности Мизеса имеет вид

(1.6)
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}}.$$

Из экстремальных теорем для идеального жестко-пластического тела [1] следует

(1.7)
$$I_1\left(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau^*\right) \geqslant \sup_{(\sigma_x, \sigma_y, \tau) \in G} I_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau),$$

где

(1.8)
$$I_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = \int_{S_u} [(\sigma_x u_0 + \tau v_0) n_x + (\tau u_0 + \sigma_y v_0) n_y] dS$$

— линейный функционал на множестве $G$ статически допустимых полей напряжений; $\sigma_x^*, \sigma_y^*$, $\tau^*$ — напряжения, соответствующие решению задачи (1.1) — (1.6).

Пусть $(u, v)$ — какое-либо непрерывное и непрерывно дифференцируемое в $\Omega$ кинематически возможное поле скоростей. Тогда, используя формулу Гаусса — Остроградского и условие несжимаемости (1.4), функционал (1.8) можно привести к виду

(1.9)
$$I_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\sigma_x - \sigma_y) + \tau\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) d\Omega -$$
$$- \int_{S_\sigma} [g(S) v_n + h(S) v_t] dS - \int_{\Omega} (f_x u + f_y v) d\Omega \equiv I_2(\sigma_x, \sigma_y, \tau),$$

где $v_n$, $v_t$ — нормальная и касательные составляющие скорости на поверхности $S$.

**2.** Предположим, что множество $G$ непусто и функционал $I_2$ нетождественно равен постоянной на $G$. Пусть $(\bar\sigma_x, \bar\sigma_y, \bar\tau)$ — какое-либо статически допустимое поле напряжений. Пусть $\varphi \in C^3(\Omega)$ такая, что

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\bar\sigma_x}{\tau_s} - \frac{\bar\sigma_y}{\tau_s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar\tau}{\tau_s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2 \leqslant 1 \text{ в } \bar\Omega; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial n\partial S} = 0 \text{ на } S_\sigma. \tag{2.2}$$

Тогда любое поле напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$, удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{\sigma_x}{\tau_s} = \frac{\bar\sigma_x}{\tau_s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\sigma_y}{\tau_s} = \frac{\bar\sigma_y}{\tau_s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\tau}{\tau_s} = \frac{\bar\tau}{\tau_s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \tag{2.3}$$

является статически допустимым.

Используя (2.3), функционал (1.9) запишем в виде

$$I_2(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = I_2(\bar\sigma_x, \bar\sigma_y, \bar\tau) + I_0(\varphi), \tag{2.4}$$

где

$$I_0(\varphi) = \int\limits_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] d\Omega \tag{2.5}$$

— линейный функционал на множестве функций $\varphi \in C^3(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.2).

По данному полю напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$ функция $\varphi$, согласно (2.3), определяется с точностью до линейной функции, поэтому для установления взаимооднозначного соответствия между множеством функций $\varphi$, удовлетворяющих (2.1), (2.2), и множеством $G$ статически допустимых полей напряжений положим

$$\int\limits_\Omega \varphi d\Omega = 0, \quad \int\limits_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x} d\Omega = 0, \quad \int\limits_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial y} d\Omega = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $M$ — множество функций $\varphi \in C^3(\Omega)$, удовлетворяющих (2.2), (2.6), и $M_1$ — подмножество функций из $M$, для которых справедливо неравенство (2.1). Тогда, используя (1.9), (2.5), неравенство (1.7) можно представить в виде

$$I_2(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau^*) \geqslant I_2(\bar\sigma_x, \bar\sigma_y, \bar\tau) + \sup_{\varphi \in M_1} I_0(\varphi). \tag{2.7}$$

Обозначим через $H$ соответствующее $M$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_\Omega \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\right] d\Omega$$

и нормой

$$\|\varphi\|_H^2 = (\varphi, \varphi). \tag{2.8}$$

Покажем, что из $(\varphi, \varphi) = 0$ следует $\varphi = 0$. Остальные аксиомы скалярного произведения выполняются очевидным образом. Пусть $(\varphi, \varphi) = 0$, тогда из (2.7), (2.8) имеем

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3(x^2 + y^2).$$

Если $S_\sigma \neq \varnothing$, то из (2.2), (2.6) следует, что $\alpha_i = 0$ $(i = 0, \ldots, 3)$ и $\varphi = 0$. Заметим, что второе из условий (2.2) выполняется при любых $\alpha_i$.

Рассмотрим множество $N \subset H$ такое, что почти всюду в $\Omega$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\bar\sigma_x}{\tau_s} - \frac{\bar\sigma_y}{\tau_s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar\tau}{\tau_s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2 \leqslant 1, \quad \varphi \in N. \tag{2.9}$$

Из (1.3), (2.9) следует

$$\|\varphi\|_H^2 = \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right] d\Omega \leqslant 2\left\{\frac{1}{\tau_s^2}\int\limits_\Omega \left[\frac{1}{4}(\bar\sigma_x - \bar\sigma_y)^2 + \bar\tau^2\right] d\Omega + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\bar\sigma_x}{\tau_s} - \frac{\bar\sigma_y}{\tau_s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar\tau}{\tau_s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right] d\Omega\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 4\,\mathrm{mes}\,(\Omega) < \infty, \quad \varphi \in N.$$

Следовательно, $N$ ограничено.

Покажем, что $N$ — сильно выпуклое множество, т. е. существует такая постоянная $\gamma > 0$, для которой любая функция $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 + \psi \in N$, если $\varphi_1, \varphi_2 \in N$ и $\|\psi\|_H \leqslant \gamma\|\varphi_1 - \varphi_2\|_H$. Обозначим

$$L\varphi = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.10}$$
$$\bar L\varphi = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\bar\sigma_x}{\tau_s} - \frac{\bar\sigma_y}{\tau_s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar\tau}{\tau_s} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Опуская очевидные выкладки, имеем

$$\left(\bar L\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \psi\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}(\bar L\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\bar L\varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(L(\varphi_1 - \varphi_2))^2 +$$
$$+ (L\psi)^2 + 2L\psi\sqrt{\frac{1}{2}(\bar L\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\bar L\varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(L(\varphi_1 - \varphi_2))^2} =$$
$$= \left(L\psi + \sqrt{\frac{1}{2}(\bar L\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\bar L\varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(L(\varphi_1 - \varphi_2))^2}\right)^2.$$

Откуда, так как $\varphi_1, \varphi_2 \in N$, получаем

$$\left(\bar L\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \psi\right)\right)^2 \leqslant \left(L\psi + \sqrt{1 - \frac{1}{4}(L(\varphi_1 - \varphi_2))^2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{8}(L(\varphi_1 - \varphi_2))^2 + L\psi\right)^2.$$

Пусть $\psi$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$L\psi \leqslant \frac{1}{8}(L(\varphi_1 - \varphi_2))^2, \tag{2.11}$$

тогда

$$\left(\overline{L}\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\psi\right)\right)^2\leqslant 1$$

и функция

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\psi\in N.$$

Из (2.8), (2.10) следует

$$\|\varphi\|_H^2=\int\limits_\Omega (L\varphi)^2\,d\Omega. \tag{2.12}$$

Очевидно, что для $\varphi_1$, $\varphi_2\in N$ справедливо

$$(1/2)L(\varphi_1-\varphi_2)\leqslant 1. \tag{2.13}$$

Из (2.11) — (2.13) имеем цепочку неравенств

$$\|\psi\|_H^2=\int\limits_\Omega (L\psi)^2\,d\Omega\leqslant\frac{1}{64}\int\limits_\Omega (L(\varphi_1-\varphi_2))^4\,d\Omega\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{16}\int\limits_\Omega (L(\varphi_1-\varphi_2))^2\,d\Omega=\frac{1}{16}\|\varphi_1-\varphi_2\|_H^2,$$

откуда следует, что достаточно положить $\gamma=1/4$.

Следуя результатам работы [3], можно показать, что $N$ замкнуто. Таким образом, $N$ — ограниченное, сильно выпуклое множество.

Пусть $(u,\ v)$ — какое-либо непрерывное и непрерывно дифференцируемое в $\Omega$ кинематически возможное поле скоростей. Тогда из (2.5) и неравенства Коши — Буняковского имеем

$$I_0(\varphi)\leqslant C\|\varphi\|_H,$$

где

$$C=\left(\int\limits_\Omega\left(4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)d\Omega\right)^{1/2},$$

и, следовательно, $I_0(\varphi)$ — линейный ограниченный функционал, заданный на множестве $M$, плотном в $H$. Из теорем функционального анализа вытекает, что в этом случае $I_0(\varphi)$ можно и притом единственным образом продолжить на все пространство $H$. При этом продолженный функционал $I_0(\varphi)$ непрерывен в $H$.

Существование единственного элемента $\varphi^*\in N$ такого, что

$$I_0(\varphi^*)=\sup_{\varphi\in N} I_0(\varphi), \tag{2.14}$$

вытекает из следующего утверждения.

Пусть $H$ — гильбертово пространство, $l\varphi$ — линейный непрерывный функционал, $V\subset H$ — сильно выпуклое, ограниченное замкнутое множество с границей $Q$. Тогда существует единственный элемент $\varphi\in Q$, для которого

$$l\varphi=\sup_{\psi\in V}(\inf)\,l\psi.$$

Доказательство утверждения аналогично доказательству теоремы о минимуме квадратичного функционала с односторонними ограничениями [3, 4].

Пусть $\{\psi_n\} \in V$ — последовательность такая, что

$$\lim_{n\to\infty} l\psi_n = \sup_{\psi\in V} l\psi. \tag{2.15}$$

Так как $V$ ограничено, то

$$\|\psi_n\|_H \leqslant K < \infty$$

и можно извлечь такую подпоследовательность $\{\psi_{nk}\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} l\psi_{nk} = l\chi, \quad \chi \in H. \tag{2.16}$$

Из замкнутости и выпуклости $V$ следует, что $V$ слабо замкнуто. Тогда $\chi \in V$ и, полагая $\varphi = \chi$, из (2.15), (2.16) имеем

$$l\varphi = \sup_{\psi\in V} l\psi, \quad \varphi \in V.$$

Покажем, что $\varphi \in Q$. Предположим противное. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $V_\delta \subset V$, $V_\delta = (\psi \,|\, \|\varphi - \psi\| < \delta)$. По теореме Рисса о виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве имеем

$$l\varphi = (\varphi, \varphi_0), \ \varphi_0 \in H.$$

Рассмотрим элемент $\psi_1 \in H$ такой, что

$$\psi_1 = \varphi + \frac{\delta}{2} \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|_H}.$$

Очевидно, что $\psi_1 \in V_\delta$ и, кроме того,

$$l\psi_1 = (\psi_1, \varphi_0) = (\varphi, \varphi_0) + \frac{\delta}{2} \|\varphi_0\| > l\varphi = \sup_{\psi\in V} l\psi.$$

Получаем противоречие. Следовательно, $\varphi \in Q$. Так как $\varphi \in Q$, то из линейности функционала и сильной выпуклости $V$ следует единственность.

Аналогично доказывается существование единственного элемента $\varphi \in \hat{Q}$, для которого

$$l\varphi = \inf_{\psi\in V} l\psi.$$

3. Максимум функционала $I_0(\varphi)$ определяется на множестве $N \subset H$. Поэтому представляет интерес вопрос о том, в каком смысле напряжения (2.3), соответствующие элементу $\varphi \in N$, удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1) и граничным условиям (1.3).

Из (2.8) следует, что если $\varphi \in H$, то производные $\partial^2\varphi/\partial x\partial y$, $(\partial^2\varphi/\partial y^2 - \partial^2\varphi/\partial x^2)$ суммируемы с квадратом в $\Omega$. Следовательно, напряжения

$$\begin{gathered} \sigma_x - \sigma_y = \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y + \tau_s(\partial^2\varphi/\partial y^2 - \partial^2\varphi/\partial x^2), \\ \tau = \bar{\tau} - \tau_s \partial^2\varphi/\partial x\partial y, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}) \in G,$$

также суммируемы с квадратом в $\Omega$.

Пространство $H$ есть пополнение множества $M$ по норме (2.8), следовательно, существует такая последовательность $\{\varphi_n\} \in M$, что

$$\|\varphi - \varphi_n\|_H \to 0,\ n \to \infty. \tag{3.2}$$

При этом для каждой $\varphi_n$ справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)\right]d\Omega = 0,$$

где $\delta u = u_2 - u_1$, $\delta v = v_2 - v_1$; $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ — произвольные непрерывные и непрерывно дифференцируемые кинематически возможные поля скоростей. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)\right)d\Omega\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x\partial y}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)\right)d\Omega\right| \leqslant C_1\|\varphi - \varphi_n\|_H,$$

$$C_1 = \left[\int\limits_{\Omega}\left(4\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)^2\right)d\Omega\right]^{1/2}.$$

Откуда, согласно (3.2), получаем

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)\right]d\Omega = 0. \tag{3.3}$$

Тогда из (3.1) следует

$$\int\limits_{\Omega}\left[(\sigma_x - \sigma_y)\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \tau\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)\right]d\Omega - \int\limits_{S_\sigma}[g(S)\,\delta v_n + h(S)\,\delta v_t]\,dS - \tag{3.4}$$

$$- \int\limits_{\Omega}(f_x\delta u + f_y\delta v)\,d\Omega = 0.$$

Таким образом, для элемента $\varphi \in H$ соответствующее поле напряжений (2.3) удовлетворяет уравнениям равновесия (1.1) и граничным условиям (1.2) в обобщенном смысле (3.4). Если, в частности, $\varphi \in M \subset H$, то для напряжений (2.3) уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) удовлетворяются в обычном смысле.

В заключение отметим, что полученные результаты справедливы для всей области $\Omega$, занятой средой, независимо от распределения жестких и пластических областей. Доказательство единственности поля напряжений только для тех частей тела, где скорости деформаций отличны от нуля, приводится в работе [2].

*Поступила 31 V 1978*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.
4. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.


---

УДК 539.374

# ЗАДАЧА О ЧИСТОМ СДВИГЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕКОАКСИАЛЬНЫМИ КРУГОВЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

*А. В. Резунов, А. Д. Чернышов*

(*Воронеж, Винница*)

Рассматривается задача о течении вязкопластического материала между двумя некоаксиальными круговыми цилиндрами. Приближенное решение находится с помощью итерационного метода, описанного в [1, 2]. Аналитические методы решения подобных задач рассмотрены в работах [3—5]. В [6, 7] приближенное решение находится с использованием вариационных методов [8].

1. Задача решается в цилиндрической системе координат. Ось $Oz$ направлена параллельно образующим цилиндров, контуры поперечного сечения которых задаются уравнениями $R_0 = R_0(\varphi)$, $R_1 = R_1(\varphi)$. Внешний цилиндр неподвижен, внутренний движется в положительном направлении оси $Oz$ со скоростью $v_*$. В этом случае отлична от нуля лишь одна компонента скорости $v_z = v(r, \varphi)$. В рассматриваемом течении компоненты тензора скоростей деформации имеют вид

$$e_{rr} = e_{\varphi\varphi} = e_{zz} = e_{r\varphi} = 0, \quad e_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}, \quad e_{\varphi z} = \frac{1}{2r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}. \tag{1.1}$$

Связь между компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}$ и компонентами тензора скоростей деформации $e_{ij}$ для вязкопластической среды с условием пластичности Мизеса запишем в форме [9]

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{e_{kl}e_{kl}}} + 2\mu\right)e_{ij} - p_1\delta_{ij}, \tag{1.2}$$

где $p_1$ — гидростатическое давление; $k$ — предел текучести; $\mu$ — коэффициент вязкости. Подставляя (1.1) в (1.2), получим

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = -p_1, \ \sigma_{r\varphi} = 0, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{k + \mu\gamma}{\gamma}\frac{\partial v}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{k + \mu\gamma}{r\gamma}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Запишем уравнения равновесия

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0. \tag{1.4}$$