УДК 539.3

СТРУКТУРНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ХРУПКИХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

В. И. Смирнов

Петербургский государственный университет путей сообщения, 198103 Санкт-Петербург
E-mail: smirnov@VS13866.spb.edu

Обсуждаются варианты формулировки двумерного критерия разрушения. Анализируются возможные способы определения значения структурного параметра разрушения. Проведено сравнение теоретических оценок с экспериментальными данными и с результатами, полученными с использованием альтернативных критериев.

Ключевые слова: трещина, отверстие, полость, структурный критерий, критическая нагрузка.

Введение. В последнее время для оценки прочности материалов с концентраторами напряжений активно применяются так называемые нелокальные критерии разрушения (см. работу [1] и библиографию к ней), в частности интегральный критерий, или критерий средних напряжений. Идея осреднения напряжений на некотором промежутке длины d перед вершиной трещины предложена Г. Нейбером [2] и В. В. Новожиловым [3]. Позднее дискретный критерий Нейбера — Новожилова в одномерной формулировке неоднократно использовался различными исследователями. Двумерный критерий средних напряжений применительно к дисковидной трещине нормального отрыва предложен в [4].

Присутствие в критерии параметра осреднения d означает, что процесс разрушения обладает собственной структурой, которая в общем случае необязательно связана со структурой материала. В силу этого, следуя [5], критерий средних напряжений будем называть структурным критерием, а подход Нейбера — Новожилова — структурным подходом.

Достоинствами структурного критерия являются простота, применимость как к сингулярным дефектам (трещины, угловые вырезы), так и к регулярным (отверстия, полости), возможность использования приближенных и точных аналитических решений задач теории упругости. В последнем случае при последовательном уменьшении размера дефекта имеет место предельный переход к бездефектному материалу (см. также [6]). В формулировках критерия, рассматриваемых в данной работе, используются лишь две константы материала: предел прочности при растяжении σ_c и статическая вязкость разрушения $K_{\mathrm{I}c}$, причем обе механические характеристики определяются по результатам стандартных испытаний.

В отличие от одномерной формулировки структурного критерия в двумерном случае возникают некоторые трудности, обусловленные необходимостью выбора конкретной величины структурного параметра d для количественной оценки размерных критических нагрузок. Для сред с гладкими дефектами (вырезы, отверстия, полости) актуальной задачей остается определение параметра d и в одномерном критерии. В данной работе анализируются расчетные схемы решения этих задач.

1. Одномерный критерий разрушения. Рассмотрим упругую однородную изотропную плоскость, ослабленную прямолинейной центральной трещиной длиной $2l$. Ось Ox, начало которой находится в середине трещины, проходит через линию расположения трещины. Плоскость растягивается на бесконечности равномерной нагрузкой p в направлении оси Oy, перпендикулярной трещине.

Для разрывающего напряжения на продолжении трещины приближенное решение имеет вид

$$\sigma_y = K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi(x-l)} + O(1), \qquad x - l \to 0, \quad x > l, \tag{1.1}$$

где $K_{\mathrm{I}} = p\sqrt{\pi l}$ — коэффициент интенсивности напряжений.

Точное представление определяется выражением

$$\sigma_y = px/\sqrt{x^2 - l^2}\,, \qquad y = 0, \quad x > l. \tag{1.2}$$

Применим к асимптотическому решению (1.1) структурный критерий

$$\frac{1}{d}\int\limits_{l}^{l+d} \sigma_y(x)\,dx = \sigma_c, \tag{1.3}$$

где d — структурный параметр разрушения; σ_c — предел прочности материала на растяжение. Полагая, что при выполнении равенства $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}c}$ (критерий Ирвина) происходит разрушение, найдем величину d:

$$d = 2K_{\mathrm{I}c}^2/(\pi\sigma_c^2) \tag{1.4}$$

и критическую нагрузку

$$p_* = K_{\mathrm{I}c}/\sqrt{\pi l}\,. \tag{1.5}$$

Подставив точное решение (1.2) в критерий (1.3), получим величину предельной нагрузки, справедливую для трещины любой длины:

$$p_* = \sigma_c/\sqrt{1 + 2l/d}\,. \tag{1.6}$$

Представляет интерес сравнение величины p_* с предельной нагрузкой, вычисленной по критериям Гриффитса и Леонова — Панасюка, а также с результатами экспериментов. В работе [7] экспериментально исследована зависимость разрушающей нагрузки от длины центральной трещины в стеклянной пластине, одноосно нагруженной по краям равномерной нагрузкой, действующей по нормали к плоскости трещины. Механические характеристики силикатного стекла следующие: предел прочности при растяжении $\sigma_c = 39{,}2$ МПа [8], коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}24$, модуль упругости $E = 67$ ГПа, удельная поверхностная энергия разрушения $\gamma = 2{,}1\cdot 10^{-6}$ Дж/мм^2 ($2{,}1\cdot 10^{-3}$ МПа$\cdot$мм), вязкость разрушения определена с использованием характеристик материала ν, E, γ [7] и равна $K_{\mathrm{I}c} = 0{,}546$ МПа$\cdot$м$^{1/2}$.

Формулы для критической нагрузки имеют вид [9]:

— по критерию Гриффитса

$$p_* = \sqrt{2E\gamma/(\pi(1-\nu^2)l)}\;; \tag{1.7}$$

— по критерию Леонова — Панасюка

$$p_* = (2/\pi)\sigma_c \arccos\left[\exp\left(-\delta_c/(8\sigma_c c l)\right)\right]. \tag{1.8}$$

В (1.8) $c = (1-\nu^2)/(\pi E)$; $\delta_c = 2\gamma/\sigma_c$ — критическое раскрытие трещины, зависящее от удельной энергии разрушения и прочности материала.

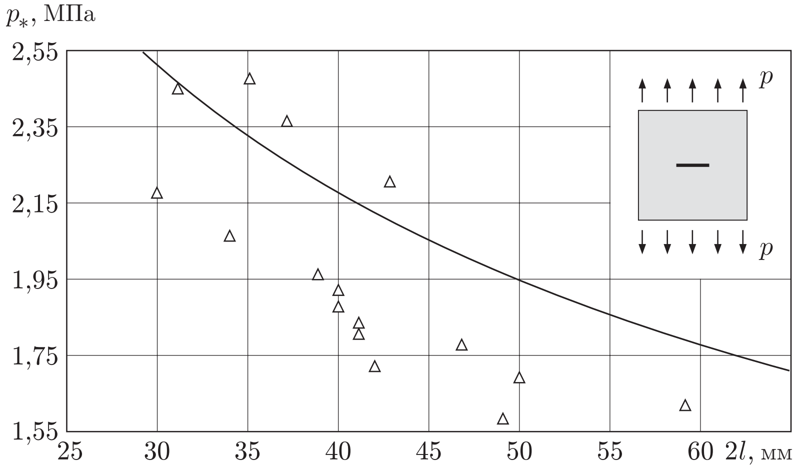

Рис. 1. Зависимость предельной нагрузки от длины трещины: линия — результаты расчетов; точки — экспериментальные данные [7]

Результаты расчета по формулам (1.5)–(1.8), а также экспериментальные данные работы [7] представлены на рис. 1. Видно, что в рассматриваемом диапазоне длин трещин критерии дают одинаковые оценки предельной нагрузки. Различия обнаруживаются лишь при $2l < 1$ мм.

Отметим, что при $l \to 0$ критерии Гриффитса и Ирвина дают бесконечно большое значение предельной нагрузки, в то время как из критерия Леонова — Панасюка и структурного критерия следует, что $p_* \to \sigma_c$. Иными словами, пластина с трещиной нулевой длины имеет прочность бездефектного материала. Однако скорость приближения критической нагрузки к пределу прочности различна:

— в соответствии с критерием (1.6)

$$p_*(l) = \sigma_c(1 - l/d) + O(l^2);$$

— в соответствии с критерием (1.8)

$$p_*(l) = \sigma_c + O(0).$$

Следовательно, для указанного выше материала предельная нагрузка, определенная согласно (1.8) для длин трещин, находящихся в диапазоне $0 \div 0{,}03$ мм, практически неизменна и равна σ_c. Значение структурного параметра для стекла $d = 0{,}124$ мм.

Приравняв критические нагрузки, определенные по критериям Ирвина (1.5) и Гриффитса (1.7), найдем известную связь между удельной поверхностной энергией разрушения γ и вязкостью разрушения $K_{\mathrm{I}c}$ (при плоской деформации):

$$\gamma = (1 - \nu^2) K_{\mathrm{I}c}^2/(2E). \qquad (1.9)$$

Теперь найдем зависимость структурного параметра d от удельной энергии разрушения γ. Из (1.4) имеем

$$K_{\mathrm{I}c}^2 = \pi d \sigma_c^2/2. \qquad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.9), получаем

$$d = 4E\gamma/(\pi(1 - \nu^2)\sigma_c^2),$$

что практически совпадает с оценкой [10]

$$d = 4E\gamma/(3(1 - \nu^2)\sigma_c^2).$$

В полярной системе координат (r, θ) рассмотрим одноосное растяжение бесконечной упругой пластины с круговым отверстием радиусом a. Если равномерное растягивающее напряжение p, приложенное на бесконечности, действует в направлении $\theta = \pm\pi/2$, то максимальное значение нормального разрывающего окружного напряжения вдоль оси $\theta = 0$ определяется выражением

$$\sigma_\theta(r,0) = p[1 + (1/2)(a/r)^2 + (3/2)(a/r)^4]. \tag{1.11}$$

Как и в предыдущем случае, элементарная ячейка разрушения представляет собой отрезок, поэтому в соответствии со структурным подходом критериальное соотношение записывается в виде

$$\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d} \sigma_\theta(r,0)\,dr = \sigma_c.$$

Вычислив интеграл в последнем равенстве, получим

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{1}{1 - (\Theta/2)(\Theta/(\Theta+1) - 1) - (\Theta/2)[(\Theta/(\Theta+1))^3 - 1]}, \tag{1.12}$$

где $\Theta = a/d$. При $\Theta \to 0$ $p_* = \sigma_c$, при $\Theta \to \infty$ $p_*/\sigma_c = 1/3$.

В задаче о прямолинейной центральной трещине выражение для структурного параметра d определено на основе сопоставления значений критической нагрузки, вычисленных по структурному критерию и критерию Ирвина. Проанализируем возможность использования этого выражения в данной задаче.

В работе [11] приведены результаты экспериментов по определению критической нагрузки p_* при одноосном растяжении пластин с круговым отверстием диаметром $0{,}7 \div 16{,}0$ мм. Пластина с размерами $120 \times 400 \times 2$ мм (размеры выбраны таким образом, чтобы влияние краевых эффектов было пренебрежимо мало) изготовлена из серого чугуна марки СЧ 12-28 с механическими свойствами $\sigma_c = 170$ МПа, $K_{\mathrm{I}c} = 14$ МПа$\cdot$м$^{1/2}$, $\nu = 0{,}3$, $E = 100 \cdot 10^3$ МПа. Для данного материала значение структурного параметра разрушения d, определенное согласно (1.4), равно 4,3 мм.

На рис. 2 показана зависимость критической нагрузки от радиуса отверстия a, рассчитанная по формуле (1.12) (кривая *1*). Видно, что при использовании структурного подхода результаты расчета достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. На рис. 2 приведена также аналогичная зависимость (кривая *2*), построенная по критерию, предложенному М. Я. Леоновым и К. Н. Русинко [12]: $p_* = \sigma_c/k$, где k — коэффициент концентрации макронапряжений:

$$k = \frac{2\nu\alpha^2}{(1+\nu)(1+\alpha)^2(1+2\alpha+2\alpha^2)} + \frac{3 + 11\alpha + 25\alpha^2 + 40\alpha^3 + 42\alpha^4 + 24\alpha^5 + 8\alpha^6}{(1+2\alpha+2\alpha^2)^3}; \tag{1.13}$$

$\alpha = \rho/a$; ρ — структурная характеристика материала, учитывающая его микронеоднородность. Теоретическое значение параметра ρ получено в [12]:

$$\rho = \beta E\gamma/\sigma_c^2. \tag{1.14}$$

Здесь параметр β зависит только от коэффициента Пуассона:

$$\beta = [4\nu\sqrt{1+\sqrt{2}} + (3 - 4\nu)\sqrt{2} - 1]^2/[4\pi(1+\sqrt{2}\,)(1-\nu^2)]. \tag{1.15}$$

В (1.15) коэффициент β изменяется в диапазоне от 0,347 до 0,545 при $\nu = 0 \div 0{,}5$.

Для серого чугуна теоретическое значение структурного параметра материала ρ, вычисленное по формуле (1.14), равно 1,3 мм. Однако наилучшее соответствие экспериментальным данным получается при $\rho = 1{,}4$ [11].

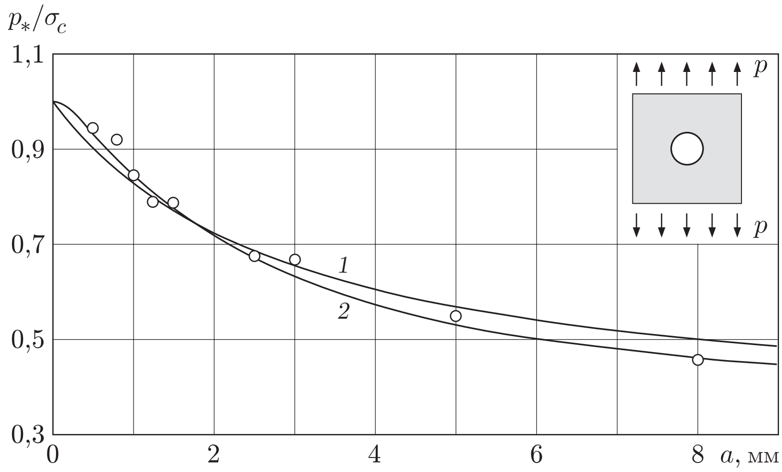

Рис. 2

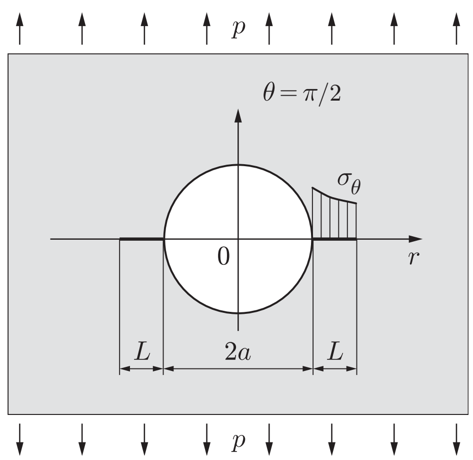

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость предельной нагрузки от радиуса отверстия:
1 — структурный критерий; *2* — критерий Леонова — Русинко; точки — экспериментальные данные (серый чугун)

Рис. 3. Геометрия фиктивной трещины в пластине с отверстием

При $a \to 0$ коэффициент концентрации напряжений k стремится к теоретическому значению $k = 3$. В то же время, как следует из (1.13), при $a \to \infty$ $k \to 1$, что соответствует прочности бездефектного материала ($p_* \to \sigma_c$).

В работе [6] использован иной подход к решению данной задачи. Для оценки разрушающей нагрузки p_* при одноосном растяжении пластины с круговым отверстием радиусом a вводится так называемая фиктивная трещина. Это обусловлено необходимостью иметь в распоряжении какую-либо характеристику с размерностью длины, для того чтобы сопоставить ее с размером отверстия. Фиктивная трещина длиной L, начало которой находится на границе отверстия, располагается в направлении опасного сечения (рис. 3).

Предположим, что на берегах фиктивной трещины действует напряжение $\sigma_\theta(r,0)$, распределенное в соответствии с (1.11). В случае, когда на берегах трещины задано напряжение, соответствующий коэффициент интенсивности напряжений можно найти по известной формуле

$$K_{\rm I} = \frac{p}{\sqrt{\pi L/2}} \int\limits_a^{a+L} \sigma_\theta(r,0) \sqrt{\frac{r-a}{L-(r-a)}}\, dr. \qquad (1.16)$$

Подставляя в (1.16) σ_θ из (1.11), находим

$$K_{\rm I} = p\sqrt{\pi L/2}[1 + (1/2)(1+\vartheta)^{-3/2} + (3/2)(1+\vartheta)^{-7/2}(1 + \vartheta/2 + \vartheta^2/8)], \qquad (1.17)$$

где $\vartheta = L/a$. При $\vartheta \to 0$ выражение в квадратных скобках (1.17) становится коэффициентом концентрации напряжений K_t. При $\vartheta \to \infty$ получаем пластину без отверстия с прочностью σ_c и с фиктивной трещиной, которая начнет “распространяться” при $K_{\rm I} \to K_{{\rm I}c}$. Таким образом, в предельном случае принимаем $\vartheta \to \infty$, $p \to \sigma_c$, $K_{\rm I} \to K_{{\rm I}c}$. Тогда из (1.17) следует

$$L = 2K_{{\rm I}c}^2/(\pi\sigma_c^2). \qquad (1.18)$$

Правая часть выражения (1.18) тождественна выражению для структурного параметра d (1.4). Таким образом, в структурном подходе фиктивная трещина длиной L является эквивалентом зоны предразрушения длиной d.

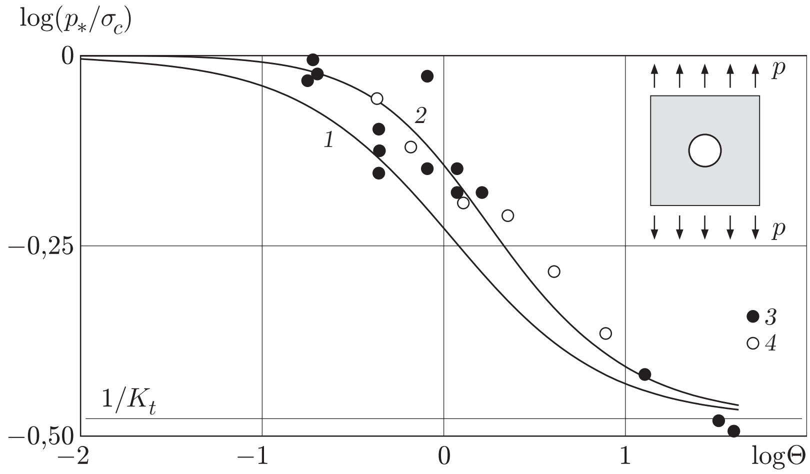

Рис. 4. Зависимость критической нагрузки от радиуса отверстия:
1 — структурный критерий (1.12); *2* — фиктивная трещина (1.19); *3* — экспериментальные данные [6] для эпоксидного углепластика; *4* — то же для эпоксидного стеклопластика

Полагая, что при $p \to p_*$ выполняется равенство $\sigma_c = K_{\mathrm{Ic}}\sqrt{2/(\pi L)}$, следующее из (1.18), из (1.17) находим критическую нагрузку. Для удобства сравнения с результатами экспериментов и значением разрушающей нагрузки на основе структурного подхода (1.12) введем безразмерный параметр $\Theta = a/L$. Тогда из (1.17) окончательно получаем

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{1}{1 + (1/2)(1+1/\Theta)^{-3/2} + (3/2)(1+1/\Theta)^{-7/2}(1 + 1/(2\Theta) + 1/(8\Theta^2))}. \tag{1.19}$$

На рис. 4 в логарифмических координатах показана зависимость критической нагрузки от относительного радиуса отверстия в пластине. Экспериментальные данные о разрушении композитных пластин с круговым отверстием взяты из работы [6], содержащей ссылки на оригинальные работы.

Из рис. 4 следует, что во всем диапазоне размеров отверстия структурный подход дает более низкие значения предельной нагрузки по сравнению с “методом фиктивной трещины”, что, однако, идет в запас прочности конструкции. Максимальное различие составляет 21,4 % при $\Theta = 0{,}85$.

Таким образом, в данной задаче, как и в задаче о растяжении плоскости с центральной трещиной, для определения структурного параметра d в качестве первого приближения можно использовать формулу (1.4).

2. Двумерный критерий разрушения. Рассмотрим осесимметричную задачу о растяжении на бесконечности упругого пространства с дисковидной трещиной радиусом a равномерной нагрузкой p. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) асимптотика разрывающего напряжения на продолжении трещины имеет вид

$$\sigma_z = K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi(r-a)} + O(1), \qquad r - a \to 0, \quad r > a, \tag{2.1}$$

где

$$K_{\mathrm{I}} = 2p\sqrt{a/\pi}\,. \tag{2.2}$$

Также известно точное представление растягивающего напряжения σ_z на продолжении трещины:

$$\sigma_z = -(2p/\pi)[\arcsin(a/r) - a/\sqrt{r^2 - a^2}\,] + p, \qquad z = 0, \quad r > a. \tag{2.3}$$

Применяя к (2.2) критерий Ирвина, находим

$$p_* = (1/2)K_{\mathrm{I}c}\sqrt{\pi/a}\,. \tag{2.4}$$

Применим структурный критерий. Полагая, что элементарная ячейка разрушения имеет форму кольцевого сектора ($a \leqslant r \leqslant a + d$, $-d/(2a) \leqslant \theta \leqslant d/(2a)$) площадью $S = d(2ad + d^2)/(2a)$, критерий разрушения запишем следующим образом:

$$\frac{2}{2ad + d^2}\int\limits_a^{a+d} \sigma_z(r) r\,dr = \sigma_c. \tag{2.5}$$

Применив (2.5) к асимптотическому решению (2.1) и выполнив интегрирование, с учетом (2.2) можно найти критическую нагрузку. Приравняв ее значение к (2.4), получим зависимость вязкости разрушения $K_{\mathrm{I}c}$ от предела прочности σ_c:

$$K_{\mathrm{I}c} = \sigma_c\sqrt{\frac{\pi d}{2}}\,\frac{1 + d/(2a)}{1 + d/(3a)}. \tag{2.6}$$

Теперь структурный параметр разрушения определяется как корень кубического уравнения (2.6) и зависит не только от прочностных констант материала, но и от радиуса трещины. Обозначим этот параметр через d_0.

Как следует из (2.6), при $d_0/a \to 0$ $\;d_0 \to d$. Предельным переходом при $a/d_0 \to 0$ можно получить $d_0(0) = 4d/9$. Таким образом, структурный параметр d_0 можно рассматривать как обобщение параметра d, и наоборот, d — как асимптотический (при $d_0/a \to 0$) или вырожденный случай d_0.

Критическая нагрузка, определенная по точному решению (2.3), равна

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{\pi(1 - \eta_0^2)}{2(\arccos\eta_0 + \eta_0\sqrt{1 - \eta_0^2}\,)}.$$

Здесь $\eta_0 = a/(a + d_0)$ $\;(0 \leqslant \eta_0 \leqslant 1)$; $d_0 = d_0(a)$ — корень уравнения (2.6), в котором d надо заменить на d_0.

В данной задаче можно применить также одномерный вариант критерия разрушения

$$\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d} \sigma_z(r)\,dr = \sigma_c. \tag{2.7}$$

Введем безразмерный параметр $\eta = a/(a + d)$ $\;(0 \leqslant \eta \leqslant 1)$. Тогда

$$p_*/\sigma_c = \pi(1 - \eta)/(2\arccos\eta).$$

В случае одномерного критерия разрушения (2.7) значение p_* несколько меньше, чем в случае двумерного критерия (2.5).

Разрушающую нагрузку также можно определить [9] по критерию Гриффитса:

$$p_*/\sigma_c = \sqrt{2a_*/a}$$

и по критерию критического раскрытия трещины:

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \begin{cases} 1, & a < a_*, \\ \sqrt{2a_*/a}\sqrt{1 - a_*/(2a)}, & a \geqslant a_*, \end{cases} \tag{2.8}$$

где

$$a_* = \pi E\delta_c/(8(1 - \nu^2)\sigma_c);$$

$\delta_c = 2\gamma/\sigma_c$ — критическое раскрытие трещины.

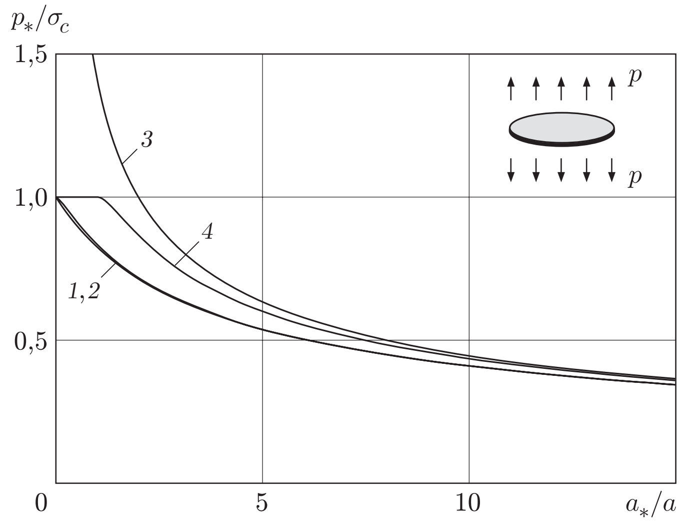

Рис. 5. Зависимость критической нагрузки от радиуса дисковидной трещины: *1* — одномерный структурный критерий; *2* — двумерный структурный критерий; *3* — критерий Гриффитса (Ирвина); *4* — критерий критического раскрытия трещины

На рис. 5 представлены графики, построенные с учетом эквивалентности силового и энергетического критериев разрушения (равенство (1.9)). Анализ показывает, что различие значений p_*/σ_c, определенных по структурному критерию при интегрировании по кольцу (двумерный вариант) и отрезку (одномерный вариант), не превышает 1,7 %. Однако наблюдается значительное различие значений критической нагрузки, определенных по критерию критического раскрытия трещины и по структурному критерию для трещин малого размера (максимальное различие составляет 18,5 %).

Из условия (2.8) следует, что для дисковидной трещины размер a_* является предельным, т. е. трещинами с радиусом $a < a_*$ можно пренебречь и считать материал бездефектным. Однако этот вывод не следует непосредственно из решения задачи: точное решение представляет собой лишь вторую строку в (2.8) и в диапазоне $a_*/2 \leqslant a \leqslant a_*$ критическая нагрузка убывает от σ_c до нуля, причем при $a = a_*$ $dp_*/da = 0$. Для построения решения (2.8) в работе [9] использованы дополнительные предположения, в результате чего решение ограничивается случаем $a \geqslant a_*$.

С физической точки зрения существование таких малых, “не влияющих на прочность” дискообразных трещин объясняется в [9] тем, что распространение трещины диаметром $2a < 2a_*$ энергетически невыгодно, так как при раскрытии трещины количество освобождающейся упругой энергии меньше количества эффективной поверхностной энергии, аккумулирующейся на ее свободных поверхностях. Однако неясно, почему такие предельные размеры не выявляются, например, в случае центральной трещины (плоская задача).

В качестве примера гладкого концентратора напряжений рассмотрим задачу об одноосном равномерном растяжении напряжением p упругого пространства, содержащего сферическую полость радиусом a. Растяжение производится в направлении оси z в цилиндрической системе координат (r, θ, z). Выражение для разрывающего напряжения σ_z в плоскости $z = 0$ имеет вид

$$\sigma_z(r) = p\Big(1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)}\,\frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)}\,\frac{a^5}{r^5}\Big). \qquad (2.9)$$

Двумерный структурный критерий разрушения в данной задаче имеет такой же вид, как и в случае дисковидной трещины (2.5). Подставив выражение (2.9) в критериальное соотношение (2.5), находим

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{1+\eta}{1+\eta(1+\eta)(1+3\eta^2/(7-5\nu))}, \tag{2.10}$$

где $\eta = a/(a+d)$.

Используя одномерный структурный критерий (2.7), получаем

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{1}{1+\eta(1+\eta)[1+3(1+\eta^2)/(2(7-5\nu))]/4}. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что при $\eta \to 0$ (бесконечно малый дефект) $p_* \to \sigma_c$, а при $\eta \to 1$ (бесконечно большой дефект)

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{2(7-5\nu)}{3(9-5\nu)} = \frac{1}{K_t}$$

(K_t — коэффициент концентрации напряжений). Таким образом, решения (2.10) и (2.11) асимптотически эквивалентны, т. е. совпадают при $\eta \to 0$ и $\eta \to 1$. Однако при других важных с практической точки зрения значениях параметра η эти решения различаются (рис. 6).

Оценим предельную нагрузку с помощью метода фиктивной трещины. Для этого рассмотрим произвольное плоское сечение, проходящее через центр полости вдоль оси Oz. Для такой фиктивной трещины длиной L, начинающейся на границе полости и расположенной в опасном сечении $z = 0$, коэффициент интенсивности напряжений определим

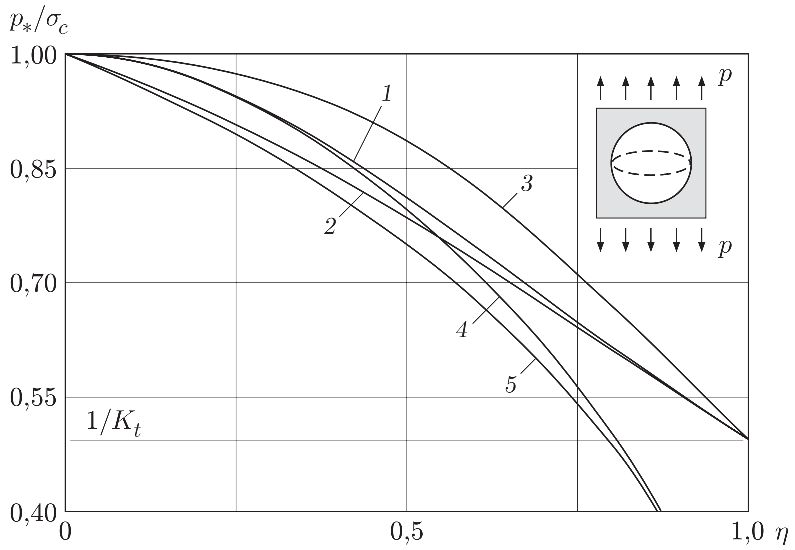

Рис. 6. Зависимость критической нагрузки от параметра η для сферической полости ($\nu = 0{,}25$):

1 — двумерный структурный критерий (2.5); *2* — одномерный структурный критерий (2.7); *3* — метод фиктивной трещины (2.12); *4* — дисковидная трещина (двумерный структурный критерий (2.5)); *5* — дисковидная трещина (одномерный структурный критерий (2.7)) из выражения (1.16), в котором вместо $\sigma_\theta(r,0)$ используем $\sigma_z(r,0)$. Действуя далее как в задаче о круговом отверстии, получим

$$p_*/\sigma_c = 1/f(\eta), \qquad \eta = a/(a+d), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{2.12}$$

где

$$f(\eta) = 1 + \frac{4-5\nu}{8(7-5\nu)}\Big(3+\frac{1}{\eta}\Big)\Big(\frac{1}{\eta}\Big)^{-5/2} + \\ + \frac{9}{128(7-5\nu)}\Big[64 + 5\Big(\frac{1}{\eta}-1\Big)^3 + 24\Big(\frac{1}{\eta}-1\Big)^2 + 48\Big(\frac{1}{\eta}-1\Big)\Big]\Big(\frac{1}{\eta}\Big)^{-9/2}.$$

Зависимость (2.12) представлена на рис. 6. Видно, что метод фиктивной трещины дает результат, более близкий к результату, полученному с использованием двумерного структурного критерия.

В работе [13] сделано допущение, что влияние сферической поры на прочность сплава на основе карбида вольфрама и кобальта (WC — 10 % Co) равносильно воздействию дисковидной трещины того же диаметра. Эту гипотезу подтверждают оценки, полученные выше с использованием структурного подхода (кривые *4, 5* на рис. 6). Из рис. 6 следует, что для сферических пор малых размеров (по сравнению с d) наблюдается хорошее соответствие критических нагрузок для круглой трещины и сферической полости. При этом в случае двумерного структурного критерия значения предельных нагрузок практически совпадают. Для обоих дефектов в окрестности точки $\eta = 0$ имеем оценку

$$p_*/\sigma_c = 1 - \eta^2 + O(\eta^3).$$

При $a \leqslant 1{,}6d$ относительное различие критических нагрузок не превышает 5 % для материала с $\nu = 0{,}25$. При меньших значениях коэффициента Пуассона это различие несколько больше, а при $\nu = 0{,}5$ — наименьшее. Можно предположить, что использование в данной задаче двумерного структурного критерия предпочтительнее.

Для того чтобы получить количественную оценку размерной критической нагрузки, необходимо конкретизировать значение структурного параметра d. В данной задаче как приближенный вариант используем решение для дисковидной трещины. Как сказано выше, максимальное значение структурного параметра равно d и определяется по формуле (1.4), а его минимальное значение равно $4d/9$. Косвенное сравнение с экспериментальными данными [13] свидетельствует о том, что лучшее соответствие теоретических и опытных данных получается в случае, когда структурный параметр d вычисляется так же, как в плоской задаче, т. е. по формуле (1.4). Отметим, что в работе [14] на основе градиентного подхода с помощью структурного параметра d, вычисленного по формуле (1.4), определен минимально безопасный диаметр сферической поры, который для металлокерамики WC — 10 % Co равен $2{,}237d$.

Заключение. Анализ экспериментальных данных и теоретических оценок прочности материалов с остроконечными разрезами и гладкими концентраторами напряжений дает основание полагать, что в плоских задачах структурный параметр разрушения d может определяться с использованием двух стандартных характеристик: предела прочности при растяжении σ_c и вязкости разрушения $K_{\mathrm{I}c}$. Для пространственных дефектов в одноосном поле растяжения с круговой границей раздела граничных условий предельную нагрузку целесообразно определять с использованием двумерного варианта структурного критерия разрушения.

Проведенный анализ показал, что структурный критерий качественно описывает зависимость прочности тела от размеров концентратора напряжений как в плоских задачах, так и в пространственных. Для более достоверной количественной оценки разрушающих нагрузок требуется уточнение значения структурного параметра разрушения d на основе экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сукнев С. В.** Критерий локальной прочности // Пробл. прочности. 2004. № 4. С. 108–124.
2. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, № 2. С. 212–222.
4. **Смирнов В. И.** Двухкритериальная модель разрушения хрупкого пространства с дисковидной трещиной / Механизмы деформации и разрушения перспективных материалов // Тр. 35-го семинара “Актуальные проблемы прочности”, Псков, 15–18 сент. 1999 г. Псков: 1999. Ч. 1. С. 66–68.
5. **Петров Ю. В.** “Квантовая” макромеханика динамического разрушения твердых тел. СПб., 1996. (Препр. / Ин-т пробл. машиноведения РАН; № 139).
6. **Tirosh J.** On the tensile and compressive strength of solids weakened (strengthened) by an inhomogeneity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 3. P. 449–454.
7. **Ковчик С. Е.** Некоторые экспериментальные исследования распространения трещин в стеклянных пластинах // Вопросы механики реального твердого тела. Киев: Наук. думка, 1964. Вып. 2. С. 172–176.
8. **Давиденков Н. Н., Ставрогин А. Н.** О критерии прочности при хрупком разрушении и плоском напряженном состоянии // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1954. № 9. С. 101–109.
9. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968.
10. **Леонов М. Я.** Механика деформаций и разрушения. Фрунзе: Илим, 1981.
11. **Ярема С. Я., Ратыч Л. В.** Исследование хрупкого разрушения образцов с концентраторами напряжений // Концентрация напряжений. Киев: Наук. думка, 1965. Вып. 1. С. 338–343.
12. **Леонов М. Я., Русинко К. Н.** Макронапряжения упругого тела // ПМТФ. 1963. № 1. С. 104–110.
13. **Nordgren A., Melander A.** Influence of porosity on strength of WC — 10 % Co cemented carbide // Powder Metallurgy. 1988. V. 31, N 3. P. 189–200.
14. **Леган М. А.** О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 146–154.

Поступила в редакцию 26/II 2006 г.,
в окончательном варианте — 10/VII 2006 г.