3. **Иванов Г. В.** Упругопластическое течение оболочек при условии текучести Мизеса.—«Изв. АН СССР. МТТ», 1969, № 3.
4. **Иванов Г. В.** Аппроксимация конечного соотношения между усилиями и моментами оболочек при условии пластичности Мизеса.—«Инж. журн. МТТ», 1967, № 6.

УДК 539.3

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В. П. Ольшанский

(Харьков)

Как известно [1, 2], при действии сосредоточенных нагрузок решения уравнений оболочек имеют сингулярный характер. Эти решения различными методами строились главным образом для нормальной сосредоточенной силы. Попытка получить фундаментальные решения для касательной силы привела к весьма громоздким результатам [3]. Ниже методом интегральных преобразований Фурье удалось получить более компактные решения в виде степенных и тригонометрических рядов. В дополнение к известным результатам при анализе сингулярностей напряженного состояния в окрестности сосредоточенного источника радиуса r показано, что кроме тангенциальных усилий, растущих, как r^{-1} при $r\to 0$, более слабую особенность логарифмического вида имеет также одна из перерезывающих сил. Даны асимптотические формулы поведения фундаментальных решений при малых значениях аргумента.

Анализ упругого локального напряженного состояния проводится на основе уравнений теории тонких, пологих, изотропных оболочек. Решение этих уравнений с помощью двумерного преобразования Фурье, подробно изложенное в работе [3], дает следующие значения компонент внутренних силовых факторов:

$$t_1 = \frac{-2X}{1-\nu}\left[\frac{1-\nu}{2}A_1 + \frac{2-\nu-\nu^2}{2}A_2 + \left(a_1 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2}b^4a_5\right)A_5 + \right. \tag{1}$$

$$\left. + \left(a_2 - \nu a_3 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2}b^4a_4\right)A_6\right], \quad t_2 = \frac{-2X}{1-\nu}\left[\nu\frac{1-\nu}{2}A_1 + \frac{\nu-1}{2}A_2 + \right.$$

$$\left. + \left(\nu a_1 + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2}b^4a_5\right)A_5 + \left(\nu a_2 - a_3 + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2}b^4a_4\right)A_6\right],$$

$$t_{12} = -X\left[A_3 - \nu A_4 + (a_1 - a_3)A_8 + a_2A_7\right], \quad m_1 = \frac{2X}{(1-\nu)R_2}\left[a_5B_1 + \nu a_4B_2 + \right.$$

$$\left. + (a_4 + \nu a_5)B_3\right], \quad m_2 = \frac{2X}{(1-\nu)R_2}\left[\nu a_5B_1 + a_4B_2 + (a_5 + \nu a_4)B_3\right],$$

$$m_{12} = \frac{2X}{R_2}(a_4B_4 + a_5B_5),$$

$$q_1 = \frac{-2X}{(1-\nu)R_2}(a_4B_7 + a_5B_6), \quad q_2 = \frac{-2X}{(1-\nu)R_2}(a_4B_8 + a_5B_9),$$

где t_1, t_2, t_{12} — тангенциальные и сдвигающие усилия; m_1, m_2, m_{12} — изгибающие и скручивающий моменты; q_1, q_2 — перерезывающие силы; X — внешняя касательная сила, направленная по линии главной кривизны большего радиуса; R_1, R_2 — радиусы кривизны ($R_2 \leqslant R_1$); ν — коэффициент Пуассона материала оболочки; h — ее толщина. Коэффициенты $a_{1\ldots5}$ и b^4 выражаются через параметры оболочки по формулам

(2) $$a_1 = 6(1-\nu)(1+2\lambda\nu+\lambda^2)h^{-2}R_2^{-2}, \quad a_2 = 12\lambda^2(1-\nu^2)h^{-2}R_2^{-2},$$

$$a_3 = 12\left[\frac{1+\nu}{2}(1+2\lambda\nu+\lambda^2) - (\lambda+\nu)(1+\lambda\nu)\right]h^{-2}R_2^{-2},$$

$$a_4 = \frac{1+\nu}{2}(1+\lambda\nu) - (\lambda+\nu), \quad a_5 = -(1-\nu)(\lambda+\nu)2^{-1},$$

$$\lambda = R_2R_1^{-1}, \quad b^4 = 12(1-\nu^2)h^{-2}R_2^{-2},$$

$A_{1\ldots8}$, $B_{1\ldots9}$ означают двумерные интегралы Фурье. С помощью символа Кронекера δ_{jm} их можно записать в виде

(3) $$A_j = \frac{i}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}[(\xi^2+\eta^2)^4 + b^4(\xi^2+\lambda\eta^2)^2]^{-1}\{[\delta_{1j}\xi^3 + \delta_{2j}\xi\eta^2 + \delta_{3j}\eta^3 +$$

$$+ \delta_{4j}\eta\xi^2](\xi^2+\eta^2)^2 + \delta_{5j}\xi^3 + \delta_{6j}\xi\eta^2 + \delta_{7j}\eta^3 +$$

$$+ \delta_{8j}\eta\xi^2\}e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta, \qquad i = \sqrt{-1},$$

$$B_j = \frac{i}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}[(\xi^2+\eta^2)^4 + b^4(\xi^2+\lambda\eta^2)^2]^{-1}\{\delta_{1j}\xi^5 + \delta_{2j}\xi\eta^4 + \delta_{3j}\xi^3\eta^2 +$$

$$+ \delta_{4j}\xi^2\eta^3 + \delta_{5j}\xi^4\eta - i(\xi^2+\eta^2)[\delta_{6j}\xi^4 + \delta_{7j}\xi^2\eta^2 + \delta_{8j}\xi\eta^3 +$$

$$+ \delta_{9j}\xi^3\eta]\}e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

При этом $0x$, $0y$ являются осями прямоугольной системы, ориентированной так, что сила X направлена вдоль $0x$ и точка приложения ее лежит в начале координат.

Таким образом, исследование локального напряженного состояния оболочки сводится к анализу выражений (3).

В дальнейшем ограничимся случаем оболочек нулевой и положительной гауссовых кривизн, для которых $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Вычислим интеграл

(4) $$A_1(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^3(\xi^2+\eta^2)^2\sin\xi x\cdot\cos\eta y}{(\xi^2+\eta^2)^4 + b^4(\xi^2+\lambda\eta^2)^2}d\xi d\eta.$$

Перейдя к новым переменным $\xi = \gamma\cos\varphi$, $\eta = \gamma\sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, заменим в (4) произведение синуса и косинуса тригонометрическим рядом

$$\sin\xi x\cdot\cos\eta y = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(\gamma r)\cos(2k+1)\theta\cdot\cos(2k+1)\varphi,$$

в котором $J_{2k+1}(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка $2k+1$. Тогда получим

(5) $$A_1(r,\theta) = 2\pi^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cos(2k+1)\theta\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}[\gamma^4 + b^4(\cos^2\varphi +$$

$$+ \lambda\sin^2\varphi)^2]^{-1}\gamma^4 J_{2k+1}(\gamma r)\cos^3\varphi\cdot\cos(2k+1)\varphi d\gamma d\varphi.$$

Для вычисления внутреннего интеграла по γ воспользуемся представлением Меллина — Бернса функций Бесселя [4]

$$J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\nu-s}{2}\right)}ds, \qquad -\nu < c < 1.$$

Будем иметь

$$L = \int\limits_0^\infty \frac{\gamma^4 J_{2k+1}(\gamma r)}{\gamma^4 + b_2^4}d\gamma = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2k+1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2k+1-s}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\frac{(\gamma r)^{-s}}{\gamma^4+b_2^4}d\gamma ds.$$

Здесь $b_2^4 = b^4(\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi)^2$; Γ — гамма-функция. Учитывая, что [5]

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\rho-1}dx}{(p+qx^\nu)^{\mu+1}} = \frac{1}{\nu p^{\mu+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\rho/\nu}\frac{\Gamma(\rho/\nu)\,\Gamma(1+\mu-\rho/\nu)}{\Gamma(1+\mu)},$$
$$0 < \rho/\nu < \mu + 1,$$

вычисление L сводим к интегрированию на комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси. Последнее легко осуществляется, так как вычеты гамма-функций расположены на отрицательной вещественной полуоси. По теории вычетов находим

$$L = \frac{1}{r}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m\,\Gamma(1+k-m)\left(\frac{rb_2}{2}\right)^{2m}}{\Gamma(m+k+1)}\cos\frac{m\pi}{2} + \frac{1}{r}\lim_{\mu\to 0}\frac{\pi}{\sin(k-\mu)\pi}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(m+k+2+\mu)\left(\frac{rb_2}{2}\right)^{2m+2k+2}}{\Gamma(m+2k+2+\mu)\,\Gamma(m+1+\mu)}\,\frac{\cos\frac{1+m+k}{2}\pi}{\Gamma(m+k+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma(m+k+2)\left(\frac{rb_2}{2}\right)^{2+2m+2k-2\mu}\cos\frac{1+m+k-\mu}{2}\pi}{\Gamma(m+k+2-\mu)\,\Gamma(m+2k+2)\,\Gamma(m+1)}\right].$$

Подставив значение L в (5), проводим интегрирование по φ. Это осуществляем с помощью формулы

$$\int\limits_0^\pi (1-\varepsilon\cos\varphi)^q\cos k\varphi d\varphi = \frac{\pi\Gamma(q+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(q-k+1)}\left(\frac{2z}{1+z}\right)^{-q}\times$$
$$\times\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{k/2}{}_2F_1\left(k-q,\,-q;\;k+1;\;\frac{z-1}{z+1}\right),$$

где $z = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$; ${}_2F_1$—гипергеометрическая функция. Взяв далее предел по μ, получаем окончательный результат для A_1. Аналогичным путем вычисляются и остальные интегралы. Опуская подробности, приводим результаты вычислений:

$$\sum_{s=1}^{8} A_s\delta_{sj} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,[(1+2\delta_{1357j})\,T_{kj}(k,r) + (3\delta_{15j} - 3\delta_{37j} + \tag{6}$$

$$+\delta_{26j}-\delta_{48j})T_{kj}(k+1,r)+(1-2\delta_{2468j})T_{kj}(k+2,r)+(1-\delta_{2367j})\times$$
$$\times T_{kj}(|k-1|,r)](C_k\delta_{1256j}+S_k\delta_{3478j}),\qquad j=1,2\ldots 8;$$
$$\sum_{s=1}^{9}B_s\delta_{sj}=\frac{1}{128\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[(\delta_{124j}-\delta_{35j})\Phi_{kj}(k+3,r)+$$
$$+(5\delta_{1j}-3\delta_{25j}-\delta_{3479j}+\delta_{68j})\Phi_{kj}(k+2,r)+(10\delta_{1j}+2\delta_{23j}-2\delta_{4589j}+4\delta_{6j})\times$$
$$\times\Phi_{kj}(k+1,r)+(10\delta_{1j}+2\delta_{23457j}+6\delta_{6j})\Phi_{kj}(k,r)+(5\delta_{1j}-3\delta_{2j}-\delta_{3j}+$$
$$+\delta_{4j}+3\delta_{5j}+4\delta_{6j}+2\delta_{89j})\Phi_{kj}(|k-1|,r)+(\delta_{12569j}-\delta_{3478j})\Phi_{kj}\times$$
$$\times(|k-2|,r)]\left(C_k\delta_{123j}+S_k\delta_{45j}+\widetilde{C}_k\delta_{67j}+\widetilde{S}_k\delta_{89j}\right),\qquad j=1,2\ldots 9.$$

При этом $C_k=\cos(2k+1)\theta,\quad S_k=\sin(2k+1)\theta,$

$$\widetilde{C}_k=2(2-\delta_{k0})\cos 2k\theta,\quad \widetilde{S}_k=4\sin 2k\theta,$$
$$T_{kj}=U_k\delta_{1234j}+V_k\delta_{5678j},\quad \Phi_{kj}=W_k\delta_{12345j}+Q_k\delta_{6789j},$$

$\delta_{mn\cdots j}$ — обобщенный символ Кронекера, равный единице при совпадении значений двух его произвольных индексов и равный нулю в противном случае.

Значения функций U_k, V_k, W_k следуют из соотношений

$$\delta_{1l}U_k(j,r)+\delta_{2l}V_k(j,r)+\delta_{3l}W_k(j,r)=\frac{\pi}{\Gamma(1+j)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{j/2}\times \tag{7}$$
$$\times\left(\frac{\delta_{1l}}{2r}-\frac{r\delta_{2l}}{8b_1^2}+r\delta_{3l}\right)\sum_{m=0}^{k-1+\delta_{1l}}\frac{(-1)^m\Gamma(1+m-\delta_{2l})\Gamma(k-m+\delta_{1l})}{\Gamma(m+k+2-\delta_{1l})\Gamma(m-j+1-\delta_{2l})}\times$$
$$\times\left(\frac{2z}{1+z}\right)^{-m+\delta_{2l}}\left(\frac{rb_1}{2}\right)^{2m}\left[(\delta_{1l}+\delta_{3l})\cos\frac{m\pi}{2}+\delta_{2l}\sin\frac{m\pi}{2}\right]N_{1m}+$$
$$+\frac{\pi(-1)^k}{\Gamma(j+1)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{j/2}\left(\frac{\delta_{1l}}{2r}+\frac{r\delta_{2l}}{8b_1^2}-r\delta_{3l}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2z}{1+z}\right)^{-m-k-\delta_{1l}+\delta_{2l}}}{\Gamma(m+2k+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(m+k+2\delta_{1l}+\delta_{3l})\left(\frac{rb_1}{2}\right)^{2m+2k+2\delta_{1l}}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+k+2\delta_{1l}+\delta_{3l}-j)}N_{2m}\left\{\left[2\ln\frac{rb_1}{2}-\ln\frac{2z}{1+z}+\right.\right.$$
$$+\psi(m+k+2\delta_{1l}+\delta_{3l})-\psi(m+2k+2)-\psi(m+1)-\psi(m+k+2\delta_{1l}+$$
$$\left.+\delta_{3l}-j)-H_m\right]\left[(\delta_{2l}-\delta_{1l})\sin\frac{m+k}{2}\pi+\delta_{3l}\cos\frac{m+k}{2}\pi\right]-$$
$$\left.-\frac{\pi}{2}\left[(\delta_{1l}-\delta_{2l})\cos\frac{m+k}{2}\pi+\delta_{3l}\sin\frac{m+k}{2}\pi\right]\right\},$$
$$H_m=N_{2m}^{-1}\sum_{n=1}^{m+k+\delta_{1l}-\delta_{2l}}\frac{\Gamma(m+k+1+\delta_{1l}-\delta_{2l}-j)\Gamma(m+k+1+}{\Gamma(m+k+1+\delta_{1l}-\delta_{2l}-j-n)\Gamma(m+k+1+}\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{+\delta_{1l}-\delta_{2l})\Gamma(j+1)}{+\delta_{1l}-\delta_{2l}-n)\Gamma(n+j+1)}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n[\psi(m+k+1+\delta_{1l}-$$
$$-\delta_{2l}-j-n)-\psi(m+k+1+\delta_{1l}-$$
$$-\delta_{2l}-j)+\psi(m+k+1+\delta_{1l}-\delta_{2l}-n)-\psi(m+$$
$$+k+1+\delta_{1l}-\delta_{2l})],$$
$$N_{1m}={}_2F_1(j-m+\delta_{2l},\ -m+\delta_{2l};\ j+1;\ (z-1)/(z+1)),$$

$$N_{2m} = {}_2F_1(j - m - k - \delta_{1l} + \delta_{2l}, -m - k - \delta_{1l} + \delta_{2l};\ j + 1;\ (z-1)/(z+1)).$$

Выражение $Q_k(j, r)$ получается из $W_k(j, r)$ путем деления последнего на r и замены в нем $\Gamma(m + k + 2)$, $\Gamma(m + 2k + 2)$ и $\psi(m + 2k + 2)$ соответственно на $\Gamma(m + k + 1)$, $\Gamma(m + 2k + 1)$ и $\psi(m + 2k + 1)$.

В (7) обозначение

$$b_1^2 = \frac{1+\lambda}{2} b^2, \quad z = \frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}},$$

$\psi(z)$ — пси-функция.

Достаточно громоздкие решения (6), (7) сводятся к простым асимптотическим формулам при $r \to 0$. Так, с учетом свойств записанных специальных функций [4] находим

(8)
$$A_{1,2} = \frac{1}{8\pi r} [(2 \pm 1)\cos\theta \mp \cos 3\theta] + O(r),$$

$$A_{3,4} = \frac{1}{8\pi r} [(2 \pm 1)\sin\theta \pm \sin 3\theta] + O(r),$$

$$A_{5,6} = \frac{(2 \pm 1)r}{32b^2} \frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} \left(1 \mp \frac{1}{2 \pm 1}\beta\right)\cos\theta + O(r^3),$$

$$A_{7,8} = \frac{(2 \pm 1)r}{16b^2} \frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{2 \pm 1}\beta\right) \frac{\sin\theta}{1 \mp 1 + \sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda}} + O(r^3),$$

$$B_1 = -\frac{5r}{64\pi}\alpha\cos\theta + O(r), \quad B_2 = B_3 = -\frac{r}{64\pi}\alpha\cos\theta + O(r),$$

$$B_4 = B_5 = -\frac{r\alpha}{64\pi}\sin\theta + O(r), \quad B_{6,7} = -\frac{2 \pm 1}{32\pi}\alpha + O(1),$$

$$B_{8,9} = \frac{-1}{32\pi}\left(2\sin 2\theta \pm \frac{1}{2}\sin 4\theta\right) + O(r^2), \quad \alpha = 2\ln r, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}.$$

Из асимптотических формул (8) и соотношений (1), (2) следует, что бесконечными в точке приложения касательной силы будут тангенциальные и сдвигающие усилия t_1, t_2, t_{12}. Они имеют особенности порядка r^{-1}, что соответствует известным результатам [6]. Кроме этого, в бесконечность при $r = 0$ обращается перерезывающая сила q_1. Ее особенность имеет порядок $\ln r$. Перерезывающая сила q_2 сохраняет конечной величину, причем зависит от полярного угла так, что на линиях главных кривизн обращается в нуль. Нулевыми в рассматриваемой точке оказываются также изгибающие и скручивающие моменты m_1, m_2, m_{12}.

Асимптотические формулы (8) дают значения интегралов (3) в непосредственной близости к точке приложения силы. Возникает вопрос, как будут вести себя решения при удалении от этой точки. С практической точки зрения имеет смысл изучение сходимости полученных решений при значениях аргумента $br/2 < 1$, так как за пределами этих значений напряженное состояние оболочки зависит и от других факторов, в частности граничных условий, которые не учитывались при решении задачи. Кроме этого, в случае больших значений аргумента фундаментальные решения можно представить в другой форме, более удобной при численной реализации. Анализ двойных рядов (6), (7) показывает, что скорость их сходимости зависит не только от r, но и от соотношения радиусов главных кривизн. Так, для сферической оболочки $\lambda = 1$ ($z = 1$) в рядах (6) сохранятся только слагаемые, которым в (7) соответствует $j = 0$. Так как при $z = 1$ $H_m = 0$, $N_{1m} = N_{2m} = 1$, то бесконечные суммы (7) также упростятся и станут аналогом разложений функций Томсона [4], которые, как известно, сходятся весьма быстро. Несколько хуже обстоит дело со сходимостью для оболочек других форм и особенно для цилиндрической оболочки, когда $\lambda = 0$, $(z - 1)/(z + 1) = 1$. Из (8) видно, что при $\lambda \to 0$, $r \neq 0$ бесконечным становится интеграл A_8. Однако это не обращает в бесконечность усилие t_{12}, так как $\lim\limits_{\lambda \to 0} (a_1 - a_3) A_8 = 0$.

По своей структуре ряды (6) состоят из двух частей. Первая соответствует конечной, а вторая — бесконечной суммам по m в (7). В силу того, что гамма-функция равна бесконечности, когда аргумент ее приобретает целое отрицательное значение, первая часть состоит из нескольких одинарных рядов по k, отвечающих тем значениям m, при которых $m - j + 1 - \delta_{2l} \geqslant 1$. Если просуммировать входящие туда гипергеометрические функции по формуле [4]

$$ {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\,\Gamma(c - b)}, \tag{9} $$

то можно показать, что сходимость этих рядов будет не хуже, чем $\sum\limits_k [\Gamma(2k - 1)]^{-1}$, т. е. будет весьма быстрой. Что касается вторых частей, то, просуммировав с помощью (9) функции N_{2m} и H_m с учетом формулы удвоения аргумента гамма-функций [4] и неравенств

$$ \Gamma(x + y) > \Gamma(x)\Gamma(y), \quad \psi(x, y) < x + y, $$

справедливых при x, $y \gg 1$, находим, что двойные ряды при больших m и k сходятся не хуже, чем

$$ \sum_k \sum_m \frac{m + k}{m!\,(m + 3)!\,(k - 1)!\,\Gamma(k - 3/2)}. $$

Таким образом, решения (6), (7) сохраняют силу для оболочек как положительной, так и нулевой гауссовой кривизны.

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Даревский В. М.** Контактные задачи теории оболочек.— В кн.: Труды VI Всесоюзной конф. по теор. оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
2. **Величко П. М.** и др. Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизн.— В кн.: Труды X Всесоюзной конф. по теор. оболочек и пластин. Кутаиси, «Мецниереба», 1975.
3. **Величко П. М.** и др. Напряженно-деформированное состояние оболочек положительной кривизны под действием сосредоточенных касательных сил.— ПМ, 1969, т. 5, вып. 12.
4. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Ч. 1, 2. М., «Наука», 1974.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. **Чернышов Г. Н.** О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую оболочку произвольного очертания.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.